ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 519.857.3

ЗАДАЧА О НЕСТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ГРУППОВОМ ДВИЖЕНИИ В УСЛОВИЯХ ПРЕПЯТСТВИЙ[1]

А. Б. Куржанский

Статья посвящена задаче координированного управления стаей управляемых систем, совершающих совместное движение к целевому множеству в условиях нестолкновения ее элементов. В ней приводится одна из подзадач этой общей проблемы. А именно по ходу движения к цели члены группы должны находиться внутри виртуального эллипсоидального контейнера, образующего эталонное движение (трубку), уклоняющуюся от заранее известных препятствий, используя свою реконфигурацию. В ответ на это стая должна перестраиваться внутри контейнера, избегая взаимных столкновений. Поведению стаи именно внутри контейнера, при координации своих движений с эволюцией контейнера, посвящена настоящая работа.

Ключевые слова: групповое управление, стая, целевое множество, эллипсоидальная траектория, эталонное движение, нестолкновение, препятствия, координация.

A. B. Kurzhanskii. Problem of collision avoidance for a group motion with obstacles.

The paper is devoted to the problem of coordinated control for a flock of control systems moving jointly towards a target set with the requirement of noncollision of its elements. In the present paper, we consider its subproblem, which is formulated as follows. During the motion to the target, the members of the group must stay within a virtual ellipsoidal container, which forms a reference motion ("tube"). The container avoids obstacles, which are known in advance, by means of reconfigurations. In response, the flock must rearrange itself inside the container, avoiding collisions between its members. The present paper is concerned with the behavior of the flock inside the container, when the flock coordinates its motions according to the evolution of the container.

Keywords: group control, flock, target set, ellipsoidal trajectory, reference motion, noncollision, obstacles, coordination.

Введение

В данной публикации приводится подзадача из числа указанных в статье [1], посвященной общему решению задачи группового управления целевым движением в условиях препятствий. А именно рассматриваемые в ней групповые движения реализуются при помощи виртуального эллипсоидального контейнера $E_c[t]$, в котором они должны находиться во время движения контейнера к целевому множеству. Для обеспечения нестолкновений элементов группы ("стаи") во время подобного движения предполагается, что каждый из этих элементов является центром шара с *радиусом безопасности* $r > 0$ и внутренности шаров не должны пересекаться.Таким образом, элементы группового движения должны передвигаться, сохраняя *свойство вместимости стаи*, — находиться внутри контейнера $E_c[t]$ в условиях *взаимного нестолкновения.* При этом ключевые вопросы о поведении стаи именно внутри контейнера и возникающие здесь многомерные задачи еще не были достаточно охвачены. Им посвящена настоящая статья.

Особенность рассматриваемой здесь ситуации состоит в том, что контейнер $E_c[t]$ ради прохождения среди препятствий, должен претерпевать реконфигурацию с сохранением своего объема в заданных пределах, обеспечивая вместимость стаи. В ответ на это элементы стаи должны осуществлять перегруппировку внутри контейнера, чтобы оставаться в нем, не допуская взаимных столкновений. В настоящей статье поясняется конструирование эллипсоидальной траектории ("трубки") $E_c[t]$, образующей *эталонное движение,* которая к началу

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-05950а) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2692.2014.1)

движения стаи предполагается известной. Вычисление таких трубок изложено в публикациях [2–4].

Таким образом, данная работа посвящена синтезу управлений именно для реальных движений стаи внутри контейнера $E_c[t]$, достигающих целевого множества вместе с содержащим их виртуальным контейнером. Рассматриваемые движения моделируются, как и в [1], на основе гамильтонова формализма в виде соответствующих уравнений динамического программирования Гамильтона — Якоби — Беллмана (см. [2; 5–7]). В условиях негладкости решения этих уравнений могут быть интерпретированы в обобщенном минимаксном смысле А. И. Субботина [6] или эквивалентном "вязкостном" смысле [8]. Такие подходы дополняются методами вариационного анализа и теории минимаксных задач [9–12]. Среди решений задач группового управления в иных постановках отметим [13–15].

1. Групповое управление: проблема нестолкновения

Следуя статье [1], напомним упомянутую в ней основную задачу. Рассмотрим уравнения совместных движений набора однотипных управляемых систем

$$\ddot{x} = \mathbf{f}(t, x, \dot{x}, \mathbf{u}), \quad x \in \mathbb{R}^{nm}, \quad n \leq 3, \quad u \in \mathbb{R}^{nm}, \tag{1.1}$$

$$x^{(j)} = \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ \vdots \\ x_n^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} A(t)x^{(1)} + C(t)\dot{x}^{(1)} + B(t)u^{(1)}, \\ \vdots \\ A(t)x^{(m)} + C(t)\dot{x}^{(m)} + B(t)u^{(m)}, \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m)} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \vdots \\ \mathcal{P} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{P}, \qquad u^{(j)} \in \mathbb{R}^n,$$

с непрерывными коэффициентами $A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ на рассматриваемом интервале $t \in [t_0, \vartheta]$, длина которого предполагается достаточной для реализации всех конструируемых движений.

Введем обозначения

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \quad \mathbf{x}^{(m)}\}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2n \times m}, \quad \mathbf{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbf{x}^{(j)\prime} = \{x^{(j)\prime}, \dot{x}^{(j)\prime}\},$$

$$x^{(j)\prime} = \{x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\}, \quad \dot{x}^{(j)\prime} = \{\dot{x}_1^{(j)}, \ldots, \dot{x}_n^{(j)\prime}\} \;\; \forall j.$$

Здесь штрих означает транспонирование. Тогда

$$x^{(j)} = N_s \mathbf{x}^{(j)}, \quad \dot{x}^{(j)} = N_v \mathbf{x}^{(j)}, \quad N_s = \{I, \mathcal{O}\}, \quad N_v = \{\mathcal{O}, I\}; \quad N_s, N_v \in \mathbb{R}^{n \times 2n},$$

где I — единичная матрица, $\mathcal{O}$ — нулевая матрица соответствующих размеров.

Уравнение (1.1) отражает совместное движение m систем с фазовыми векторами $x^{(j)}, \dot{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ и управлениями $u^{(j)} \in \mathbb{R}^n, \;\; j = 1, \ldots, n$, подверженными жестким геометрическим ограничениям

$$u^{(j)} \in \mathcal{P}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

где множество $\mathcal{P} = -\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым и компактным, содержащим внутреннюю точку $0 \in \mathrm{int}\mathcal{P}$.

Система (1.1) предполагается *вполне управляемой*, допускающей при ограничении (1.2) условие $\dot{x}^{(j)}(t) = \mathrm{const}$ и достижимость любого $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ за конечное время. Подобные условия заведомо выполняются при $p = n, A(t) \leq 0, C(t) \leq 0$.

Для обеспечения нестолкновения элементов группового движения — траекторий $x^{(j)}(t)$ — каждое отдельное движения $x^{(j)}(t)$ представлено в виде подвижного виртуального евклидова шара $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))$ с реальным центром $x^{(j)}(t)$ и радиусом безопасности $r > 0$. Тогда условие нестолкновения шаров имеет вид

$$D\big(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathcal{B}_r(x^{(k)}(t))\big) \geq 0, \quad j \neq k, \quad j,k = 1,\dots,m, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.3}$$

где

$$D(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \max\{0, d(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)\}$$

— евклидово расстояние между двумя выпуклыми компактными множествами $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, причем

$$d(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \inf\big\{\|z^* - z^{**}\| \mid z^* \in \mathcal{X}_1, z^{**} \in \mathcal{X}_2\big\}.$$

Заметим, что $D(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = 0$ возможно лишь при касании этих множеств, которое не запрещено.

Пусть $\mathcal{E}(q, Q) = \{q_0 \in \mathbb{R}^n : \langle q_0 - q, Q^{-1}(t)(q_0 - q)\rangle \leq 1\}$ означает невырожденный эллипсоид с центром q и матрицей конфигураций $Q = Q' > 0$.

Наряду с уравнением (1.1) задано виртуальное эллипсоидальнозначное движение (“эталонная трубка”) $E_c[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))$, стартующее из начальной позиции $E_c[t_0] = E^0$ и завершающееся в конечной позиции $E_f = E_c[\vartheta] \subseteq \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M), M = M' > 0$, где $\mathcal{M}$ — заданный эллипсоид. По ходу движения эллипсоидальная трубка $E_c[t]$ избегает пересечений с заданными постоянными препятствиями $\mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)})$:

$$E_c[t] \cap \mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)}) = \varnothing \ \ \forall i = 1,\dots,i_o, \ \forall t \in [t_0, \vartheta],$$

сохраняя свои размеры, а именно удовлетворяя ограничениям

$$k_-^2 \leq \mathrm{vol}\mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t)) \leq k_+^2 \tag{1.4}$$

по объему. Этот объем $\mathrm{vol}\mathcal{E}(0, Q_c(t)) = k_v\{\Pi\lambda_j \mid j = 1,\dots,m\}$, где k_v — коэффициент, указанный ниже, $\lambda_j = \lambda_j(Q_c(t))$ — собственные числа матрицы $Q_c(t) = Q_c'(t) > 0$:

$$\lambda_- = \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_+.$$

Допустимые пределы объема контейнера

$$k_-^2 \leq \{\Pi\lambda_j \mid j = 1,\dots,m\} \leq k_+^2$$

определяются условиями вместимости стаи в контейнер при реконфигурациях, необходимых по ходу движения для избежания пересечений с препятствиями.

Как приведено в статье [1], трубка $E_c[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))$ является управляемой, однако подробное решение задачи об управлении ею выходит за рамки данной работы. Эта задача была рассмотрена в статьях [3; 4]. В настоящей же статье указана схема конструирования трубки $E_c[t]$, после чего она далее считается известной.

Общая задача статьи [1] теперь сводится к следующей. Перепишем систему (1.1) в новых обозначениях. Поскольку каждый член группы движений, обозначенный ранее как $x^{(j)}$, удовлетворяет линейному уравнению вида

$$\dot{x}_1^{(j)} = x_2^{(j)}, \quad \dot{x}_2^{(j)} = f(t, \mathbf{x}^{(j)}, u), \quad j = 1,\dots,m,$$

система (1.1) фактически допускает представление в виде матричного уравнения.

Действительно, обозначим

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = \{F(t)\mathbf{x}^{(1)}, \dots, F(t)\mathbf{x}^{(m)}\}, \quad \mathbf{B}(t) = \{B(t), \dots, B(t)\}, \quad B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A(t) & C(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \mathbf{B}(t) \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad N = \begin{pmatrix} N_s \\ N_v \end{pmatrix}.$$

Представим $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$, используя дополнительные обозначения. Пусть $\otimes$ означает Кронекерово произведение матриц. Тогда символ

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^{(i)} \otimes (A\mathbf{e}^{(i)}),$$

где $\mathbf{e}^{(i)}$ — взаимно ортогональные единичные орты в прямоугольной системе координат, будет означать вектор, полученный путем вытягивания столбцов $n \times n$-матрицы A в n^2-мерный вектор, один под другим, начиная с первого. Тогда обозначим $2nm$-вектор $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{X}}$. Аналогично пусть $n\times nm$-матрица $N\mathbf{F} = \{NF, \ldots, NF\}$ и символ $\overline{N\mathbf{F}}$ означает $nm\times n$-матрицу, полученную из выпрямленной матрицы $N\mathbf{F}$. Поэтому в рассматриваемой системе под первой $n\times n$-матрицей $NF(t)$ стоит снова $NF(t)$ и так далее, вплоть до m-й $NF(t)$.

Далее, пусть $I^{n\times n}_{m\times m}(i)$ означает блочную $nm \times nm$-матрицу, содержащую m диагональных $n \times n$ блоков, где блок i — единичная $n \times n$-матрица, а остальные блоки нулевые. Тогда выражение $\sum_1^m I^{n\times n}_{m\times m}(i)\overline{\mathbf{F}}(t)$ представляет собой блочную $mn \times mn$-матрицу, содержащую m диагональных $n \times n$-блоков $NF(t)$. Аналогично поступаем для $n \times mn$-матрицы $\mathbf{B}(t)$ и $mn \times n$-матрицы $\overline{\mathbf{B}}(t)$ будет получена из $\mathbf{B}(t)$ подобно предыдущему случаю. Выражение $\sum_1^m I^{n\times p}_{m\times m}(i)\overline{\mathbf{B}}(t)$ тогда представляет собой блочную $mn \times mp$-матрицу, содержащую m диагональных $n \times p$-блоков $B(t)$.

Теперь исходная система примет матричный вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{B}(t, \mathbf{u}). \tag{1.5}$$

Далее, пусть

$$N\mathbf{X} = \begin{cases} N_s\mathbf{X} = \mathbf{X}_s, \\ N_v\mathbf{X} = \mathbf{X}_v, \end{cases} \qquad \bar{\mathbf{X}}_s = \mathbf{x}_s, \;\; \bar{\mathbf{X}}_v = \mathbf{x}_v.$$

Тогда в векторном варианте предыдущая система имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v \\ A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{m} I^{n\times p}_{m\times m}(i)\mathbf{B}(t, \mathbf{u}).$$

Задача H (*О групповом управлении внутри контейнера*).

Пусть заданы система (1.5) группового управления и виртуальное “эталонное” эллипсоидальное движение $E_c[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t)),\ t \in [t_0, \vartheta]$.

Пусть начальное состояние (*позиция*) $\{t_0, \mathbf{X}[t_0]\}$ системы (1.5) удовлетворяет следующим “свойствам стаи”:

CC(i) $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t_0)) \subset E_c[t_0],\ \ \dot{x}^{(j)}(t_0) = \dot{q}(t_0) = 0,\ \ j = 1, \ldots m,$

CC(ii) $D(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t_0))),\ \ \mathcal{B}_r(x^{(k)}(t_0)) \geq 0,\ \ j \neq k,\ \ j, k = 1, \ldots, m.$

В условиях ограничений (1.2) в задаче H требуется найти управления $u^{(i)}(t, \mathbf{X})$, переводящие стаю $\mathbf{X}(t_0) = \{\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \ldots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)\}$ в конечное состояние $\mathbf{X}(\vartheta)$, сохраняя условия включения стаи в трубку $E_c[t]$ — ограничения

$$\bigcup \{\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)),\ j = 1, \ldots m\} \subset E_c[t], \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.7}$$

и выполняя условия нестолкновений внутри стаи — ограничения

$$D\big(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), \mathcal{B}_r(x^{(k)}(t))\big) \geq 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, \ldots, m, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{1.8}$$

Конечное состояние $\mathbf{X}(\vartheta)$ определяется включением

$$\mathbf{X}(\vartheta) \subset \bigcup \{\mathcal{B}_r(x^{(j)}(\vartheta)),\ j = 1, \ldots m\} \subset E_c[t] = E_f[\vartheta] \subseteq \mathcal{E}(m, M) \tag{1.9}$$

и терминальным ограничением на скорости

$$\mathcal{O} \le \|\dot{x}^{(j)}(\vartheta) - \dot{q}(\vartheta)\| \le \delta_f^2, \quad j = 1, \dots, m. \tag{1.10}$$

Чтобы обеспечить вместимость элементов стаи, находящейся в $E_c[t]$, здесь указаны внутренние ограничения (1.3). Вместе с внешними (1.7) они реализуют требование сохранять размеры эллипсоида в предписанных пределах вдоль реализуемого движения. Условия (1.7), (1.3) определяют выбор k_-, k_+ в ограничениях (1.4).

Введенный ранее эллипсоид $\mathcal{E}(m, M) \subseteq \mathbb{R}^n$ означает терминальное *целевое множество*, не пересекающееся с эллипсоидами

$$\mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)}), \quad i = 1, \dots, i_o,$$

— постоянными *препятствиями* на пути группового движения, отстоящими друг от друга не менее чем на $2r + \sigma, \sigma > 0$.

Параметры $q_c(t)$, $Q_c(t)$ контейнера $E_c[t]$ предполагаются управляемыми в силу уравнений вида

$$\ddot{q}_c = v, \ \langle v, v\rangle \le \mu^2, \quad \mathbf{q}_c(t_0) = \mathbf{q}_c^0, \tag{1.11}$$

$$\dot{Q}_c(t) = T(t)Q_c(t) + Q_c(t)T'(t) + B(t)V(t)B'(t), \quad trV'V \le \nu^2, \tag{1.12}$$

при $\mathbf{q}_c' = \{q, \dot{q}\}$, $Q_c(t_0) = Q_c^0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Таким образом, $\mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t)) = E_c[t]$ изображает виртуальное движение, реализуемое эллипсоидальнозначной траекторией, где $v \in \mathbb{R}^n$ — управление траекторией центра $q(t)$, $V(t)$ — управление матрицей конфигураций $Q_c(t)$. При этом управление $v(t)$ ответственно за направление движения эллипсоида, управление $V(t)$ — за его конфигурацию и ориентацию. Оно, в частности, должно обеспечивать прохождение $E_c[t]$ между препятствиями, не нарушая требуемых размеров (1.4), за счет реконфигурации матрицы $Q_c(t)$.

Итак, рассматривается задача целевого управления (1.7)–(1.10) следующего вида. Эллипсоид $E_c[t]$ должен совершать движение в течение интервала $[t_0, \vartheta]$, от начального состояния $E_c[t] = \mathcal{E}(q_c(t_0), Q_c(t_0))$ до конечного $E_f[\vartheta] = \mathcal{E}(q_c(\vartheta), Q_c(\vartheta)) \subseteq \mathcal{E}(m, M)$, маневрируя между известными препятствиям $\mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)}),\ i = 1, \dots, k$, сохраняя объем в заданных пределах (1.4), обеспечивающих свойства стаи, находящейся внутри. В условиях непересечения трубки $E_c[t]$ с препятствиями решение задачи управления ее движением должно допускать реконфигурацию контейнера $E_c[t]$ при указанных выше ограничениях. Следовательно, реализации движений непересекающихся шаров $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))$ внутри контейнера должны быть *координированы* как с движением $E_c[t]$, так и между собой. В настоящей статье задача синтеза таких координированных управлений рассматривается при полной информации о текущих координатах всех задействованных движений.

Перейдем к строгой постановке задачи, рассматривая ее далее в *трехмерном пространстве* по координатам положения $\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ и при *четном* размере m стаи.

2. Траектория эллипсоидального контейнера

Опишем гарантированные размеры и траекторию контейнера $E_c[t]$, обеспечивающие разрешимость поставленных задач.

Начальное состояние $E_c[t_0]$ контейнера определим следующим образом. Рассмотрим прямоугольный параллелотоп в $\mathbb{R}^3$ в виде

$$\mathcal{P}(p, P, \alpha) = \Big\{x : x = p + \sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_i p^{(i)} \mid \alpha_i \ge 0, \ \ \xi = \{-1, 1\Big\}.$$

где $P = \{p^{(1)}, \dots, p^{(m)}\}$, причем $p^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$ — взаимно ортогональные единичные орты в прямоугольной системе координат и векторы $p, \alpha, \xi \in \mathbb{R}^3$. Начальные размеры $\mathcal{P}(p, P, \alpha)$ определяются условием вместимости стаи — набора из m непересекающихся шаров $\mathcal{B}_r(x^{(i)}),\ i = 1, \dots, m$.

Каждому шару $\mathcal{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ поставим в соответствие куб $C_r(0)$ размеров $2r \times 2r \times 2r$, туго облегающий $\mathcal{B}_r(0)$. При заданных m элементах стаи в качестве начальной позиции системы рассмотрим параллелотоп $\mathcal{P}[t_0] = \mathcal{P}(p, P, \alpha)[t_0]$ наименьшего объема, составленный из таких кубов и содержащий стаю — внутри каждого куба по шару с центром $x^{(i)}$, элементом стаи. При этом, в зависимости от m, некоторые из кубов могут остаться пустыми.

Так, в трехмерном пространстве при $m = 6$ в качестве такого параллелотопа можем взять

$$\mathcal{P}[t_0] = \mathcal{P}(p, P, \alpha)[t_0] = p^0 + \cup\{C_r^i = C_r(x^{(i)}),\ i = 1, \dots, 6\},\ p^0 = p(t_0),$$

полагая

$$x^{(1)} = \{-2, -1, r\}, \quad x^{(2)} = \{0, -1, r\}, \quad x^{(3)} = \{2, -1, r\},$$
$$x^{(4)} = \{-2, 1, r\}, \quad x^{(5)} = \{0, 1, r\}, \quad x^{(6)} = \{2, 1, r\}$$

и все кубы C_r^i занятыми. Его объем $\mathrm{vol}\mathcal{P}[t_0] = 6r \times 4r \times r$.

Далее, определим $E_c^0[t_0] = \mathcal{E}(q_c(t_0), Q_c(t_0))$ как эллипсоид наименьшего объема, содержащий $\mathcal{P}[t_0] = \mathcal{P}(p, P, \alpha)[t_0]$. Для параллелотопа $\mathcal{P}[t_0]$ это будет при $p(t_0) = q_c^0 = q_c(t_0)$ и $Q_c^{-1}(t_0) = I[\alpha^2]$, где $I[\alpha^2]$ — диагональная матрица с элементами $3\alpha_i^2(t_0)$ по диагонали. Тогда

$$\mathcal{P}[t_0] \subset E_c^0[t_0], \quad \mathrm{vol}\mathcal{P}[t_0] = \min.$$

Заметим, что для m-мерного эллипсоида при объеме $\mathrm{vol}\mathcal{P}[t_0] = 2^m \prod \alpha_i(t_0), i = 1, \dots, m$, имеем $\mathrm{vol}E_c^0[t_0] = k_v \prod_1^m \alpha_i(t_0)$, $k_v = \pi^{m/2}/\Gamma(m/2 + 1)$.

В указанном выше трехмерном случае имеем, при объеме $\mathrm{vol}\mathcal{P}[t_0] = (6 \times 4 \times 2)r^3$, что оптимальный по минимуму объема внешний эллипсоид будет определяться через $q_c^0 = p^0, Q_c(t_0) \in \mathbb{R}^{3\times3}; (\alpha^2)'(t_0) = \{9r^2, 4r^2, r^2\}$, при объеме $\mathrm{vol}E_c^0[t_0] = (4/3)(3 \times 2 \times 1)3\sqrt{3}\pi r^3 = 24\sqrt{3}\pi r^3$.

Начальные скорости будем считать равномерно ограниченными:

$$\|\dot{x}^{(j)}(t_0)\| \le \delta_0^2, \quad \dot{q}_c(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

2.1. Схема движения контейнера со стаей

Напомним, что эталонное эллипсоидальное движение $E_c^0[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))$, исходящее из состояния $E_c^0[t_0]$, подчиняется уравнениям (1.11), (1.12) с управлениями v, V. Оно должно совершать движение к целевому множеству $\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M)$, обеспечивая условие на скорости (1.10) и передвигаясь таким образом в пространстве размерности $\mathbb{R}^n$, избегая внешние препятствия в виде непересекающихся невырожденных эллипсоидов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, ограниченных сферами радиуса $2rm$. Заметим, что трубка $E_c^0[t]$ определена в n-мерном пространстве положений при фазовом ограничении на скорости $\dot{x}$. Будем считать, что вся трубка лежит, как и целевое множество $\mathcal{M}$, в области $x_3 \ge 0$.

При конструировании движения $E_c^0[t] = \mathcal{E}(q_c, Q_c(t))$ первоначально определяется траектория центра $q_c(t)$, которая делится на три этапа : начальный участок $[t_0, t_s^-]$ движения без учета препятствий, участок $[t_s^-, t_s^+]$ прохождения препятствий и участок $[t_s^+, \vartheta]$ движения после препятствий, завершающегося попаданием в центр целевого множества : $q_c(\vartheta) = m$. Эти этапы пояснены ниже. К моменту t_s^- эллипсоид $\mathcal{E}(q_c, Q_c(t))$ должен произвести реконфигурацию за счет изменения матрицы $Q_c(t)$.

Предположим, что $E_c[t_0]$ расположен следующим образом: $\mathbf{q(t_0)} = 0$ при положительно определенной диагональной матрице $Q(t_0) = \{\kappa^{(1)}(t_0), \kappa^{(2)}(t_0), \kappa^{(3)}(t_0)\}$, приняв $\kappa^{(i)}(t_0) = \beta_{ii}^2(t_0)\mathbf{e}^{(i)}$, где $\beta_{ii}^2 = 3\alpha_{ii}$ и $\mathbf{e}^{(i)}$ — единичные орты в $\mathbb{R}^n$, причем $\beta_{11}^2 \ge \beta_{22}^2 \ge \beta_{33}^2$. Собственные числа $Q(t_0)$ суть $\lambda_i(t_0) = \beta_{ii}^2$. Для реконфигурации движения $E_c[t]$ необходимо преобразовать вектор $q(t)$ и матрицу $Q(t)$. Используем два отображения. Первое из них, полагая $q(t) = R(t, t_0)q(t_0)$, $Q_R(t) = R'(t, t_0)Q(t_0)R(t, t_0)$, — с ротационной матрицей $R(t, t_0)$, сохраняющей собственные значения $\lambda_i(t) = \lambda_i(t_0)\ \forall i$ и, следовательно, объем $\mathrm{vol}E_c[t]$). Тогда $E_c[t]$ превращается в $E_R[t] = \mathcal{E}(q(t), Q_R(t))$.

Второе — при помощи матрицы сжатия-растяжения S, положительной, диагональной, с коэффициентами $\tau_{ii}^2 > 0$. Тогда $SQ(t) = Q_S(t)$ остается диагональной, но с элементами $\beta_{ii}^2[S] = \tau_{ii}^2\beta_{ii}^2$. Эллипсоид $E = E_R[t]$ преобразуется в $E_S[t] = \mathcal{E}(q(t), Q_S(t))$. Чтобы сохранить объем $\mathrm{vol}E_R[t]$, следует соблюсти условие

$$\prod_i \beta_{ii}^2 = \prod_i \beta_{ii}^2[S]. \tag{2.1}$$

Отметим, что при $n = 3$ матрица $R(t, t_0)$ при поворотах E_c вокруг оси $\mathbf{e}_Q^{(1)}$ против часовой стрелки имеет вид

$$R(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi(t - t_0) & -\sin\phi(t - t_0) \\ 0 & \sin\phi(t - t_0) & \cos\phi(t - t_0) \end{pmatrix},$$

где $\phi(t - t_0)$ — угол между $\mathbf{e}_Q^{(2)}(t)$ и $\mathbf{e}_Q^{(2)}(t_0)$, а также между $\mathbf{e}_Q^{(3)}(t)$ и $\mathbf{e}_Q^{(3)}(t_0)$. Эта матричная функция непрерывна по t, t_0. Преобразование $S(t, t_0)$ также может быть выбрано непрерывным.

К моменту $t = t_s^-$ начала прохождения между препятствиями эллипсоид $E_c[t] = E_S[t]$ должен быть перестроен согласно преобразованиям

$$\mathcal{E}_S(t) = \mathcal{E}(q(t),\quad Q_S(t)) = \mathcal{E}\big(R(t, t_0)q(t_0), S(t, t_0)R(t, t_0)Q(t_0)R'(t, t_0)S(t, t_0)\big).$$

Как указано в [1], реконфигурации эллипсоида объясняется необходимостью избежать столкновения с препятствиями $E_c^0[t]$ — *с сохранением вместимость стаи* по ходу всего движения. Но для достижения этого при использовании $\mathcal{P}(p, P, \alpha)$ может потребоваться увеличение на этапах $[t_0, t_s^-]$, $[t_s^+, \vartheta]$ размеров этого параллелотопа, а значит, и содержащего его эллипсоида $E_c^0[t]$. Последнее достигается заменой (2.1) условием (1.4). Таким образом, решение задачи нестолкновений внутри контейнера должно отражаться на построении внутренних ограничений на $E_c^0[t]$ и, далее, на разрешимости задачи о прохождении трубкой $E_c^0[t]$ препятствий $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. (Их число далее ограничиваем двумя.)

Обсудим вначале движение трехмерного эллипсоида $E_c^0[t]$ на промежутке $[t_s^-, t_s^+]$ прохождения препятствий $E_i[t] = \mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)})$, $i = 1, 2$. Для определенности будем полагать

$$\kappa_k^{(i)} > \nu r, \quad i = 1, 2; \quad \kappa_3^{(i)} \geq 6r; \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следуя [1], заметим, что минимальное расстояние между этими эллипсоидами, доступное для прохождения и учитывающее используемую схему, должно быть не менее $D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq 2r\sqrt{3}$. Поэтому далее полагаем

$$\delta_0 = D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \max_l \big\{\langle l, \kappa^{(1)} - \kappa^{(2)}\rangle - \langle l, Q_1 l\rangle^{1/2} - \langle l, Q_2 l\rangle^{1/2} \mid \langle l, l\rangle^{1/2} = 1\big\} = 2r\sqrt{3}$$

при единственным максимизаторе l^0. Тогда $\delta_0 = \|d^{(1)} - d^{(2)}\|$, где

$$\langle -l^0, d^{(1)}\rangle = \langle l^0, Q_1 l^0\rangle^{1/2}, \quad \langle -l^0, d^{(2)}\rangle = \langle l^0, Q_2 l^0\rangle^{1/2}.$$

Обозначив $d^0 = d^{(1)} - d^{(2)}$, $d^* = d^{(2)} + d^0/2$ рассмотрим гиперплоскости

$$\mathcal{H}_z = \{x : \langle x - d^*, d^0\rangle = 0\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{x : \langle x - d^{(1)}, d^0\rangle = 0\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{x : \langle x - d^{(2)}, d^0\rangle = 0\}.$$

Эти гиперплоскости параллельны, они ортогональны d^0, причем $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ суть опорные гиперплоскости к $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, при том что $\mathcal{H}_z$ расположено посередине. Будем также считать, что система координат выбрана так, чтобы плоскости $\mathcal{H}_z, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ были перпендикулярны плоскости $\mathcal{H}_3 = \{x : x_3 = 0\}$.

Далее будем требовать, чтобы эталонная векторная траектория $q(t) = q_c(t)$ центра параллелотопа $\mathcal{P}[t]$ и эллипсоида $E_c[t]$, соединяющая начальное положение $p^0 = q^0$ с целевым вектором $q(\vartheta) = m$, лежала на промежутке прохождения препятствий $[t_s^-, t_s^+]$ в плоскости $\mathcal{H}_z$ и в момент $t = t^*$ прохождения минимального расстояния $D(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ проходила бы через точку $d^* = d^2 + d^0/2 \in \mathcal{H}_z$.

При этом после реконфигурации главная полуось эллипсоида $E_c^0[t] = \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))$ должна быть ориентирована на промежутке $[t_s^-, t_s^+]$ вдоль вектора $\dot{q}_c(t)$, исходящего из точки d^*, и целиком лежать в плоскости $\mathcal{H}_z$. Она будет перпендикулярна d^0, т.е. $\langle d^0, \dot{q}_c(t)\rangle = 0$. При этом вторая полуось, ориентированная вдоль вектора d^0, будет не короче $r\sqrt{3}$. Далее будем полагать $\|d^0\| = r\sqrt{3}$, что потребует прохождения препятствий последовательно всеми членами стаи “в цепочку” (“гуськом”). Третья полуось получается автоматически. Она перпендикулярна плоскости $\mathcal{H}_3$.

Промежуток $[t_s^-, t_s^+]$ определяется следующим образом. Такой интервал времени может быть обозначен при помощи *барьерных гиперплоскостей.* При этом будем полагать, что выбор вектора h_b и чисел c_b^-, c_b^+ должен соответствовать условиям

$$d(d^*, \mathcal{H}_b^-) \geq 3rm, \quad d(d^*, \mathcal{H}_b^+) \geq 3rm$$

и что эти расстояния достигались в точках $q_-^* \in \mathcal{H}_{bz}^-, \quad q_+^* \in \mathcal{H}_{bz}^+$, где $\mathcal{H}_{bz}^- = \mathcal{H}_b^- \cap \mathcal{H}_z$, $\mathcal{H}_{bz}^+ = \mathcal{H}_b^+ \cap \mathcal{H}_z$. Тогда плоскости $\mathcal{H}_{bz}^-, \mathcal{H}_{bz}^+$ будут перпендикулярны к $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, а также к $\mathcal{H}_3$. Расположение этих плоскостей может быть определено заранее, независимо от вычисления трубки $E^c[t]$.

Потребуем далее, чтобы эталонная траектория $q_c(t)$ центра трубки $E_c^0[t]$ удовлетворяла на $[t_s^-, t_s^+]$ следующим условиям:

$$q_c(t_0) = q_c^0 = 0, \quad q_c(t_s^-) \in \mathcal{H}_{zb}^-, \quad q_c(t_s^+) \in \mathcal{H}_{zb}^+, \quad q_c(t) \in \mathcal{H}_z, \quad \dot{q}_c(t) \in \mathcal{H}_z. \tag{2.2}$$

Пусть $q_-^* = q_c(t_s^-)$, $q_+^* = q_c(t_s^+)$, тогда траектория $q_c(t) \in \mathcal{H}_z$ будет лежать на прямой $\mathcal{L}(q_-^*, q_+^*)$, направленной вдоль единичного вектора $(q_+^* - q_-^*)\|q_+^* - q_-^*\|^{-1} = \mathbf{e}^*$ и проходящей через d_0.

Соотношения (2.2) сформулированы в виде стандартной задачи теории оптимального управления. Но чтобы решить задачу H, момент t_s^- должен быть скоординирован с временем движения стаи внутри $E_c^0[t]$, которое, в свою очередь, должно учитывать время на перестройки внутри контейнера, обеспечивающие нестолкновения. Как будет указано далее, после упомянутой координации моменты времени t_s^-, t_s^+ и значения $q(t_s^-)$, $q(t_s^+)$ могут быть вычислены заранее. Поскольку выбор ограничения μ на управление v находится в нашем распоряжении, полученные значения t_s^-, t_s^+ можно варьировать.

2.2. Координация промежутков движений контейнера и стаи

Будем исходить из того, что расстояние $d(q_c(t_0), \mathcal{H}_{zb}^-) > 2krm, k \geq 3$. Движение стаи будет далее построено так, чтобы между плоскостями $\mathcal{H}_b^-, \mathcal{H}_b^+$ все ее элементы последовательно проходили через точки q_-^*, q_+^*.

Найдем оценку интервала времени на перестройку стаи от конфигурации $\mathbf{X}(t)$, с эллипсоидом $E_c^0[t]$ в момент $t \geq t_0$, до конфигурации $\mathbf{X}(t^*)$, $t^* > t$, (“в цепочку”), с эллипсоидом $E_c^0[t^*]$. *Верхний индекс* 0 в E_c^0 *далее опускаем.*

Пусть τ_- — момент попадания из $x^{(1)}(t_0)$ в $x^{(1)}(\tau_-) = q_-^* \in \mathcal{H}_{zb}^-$ со скоростью $v_s = v_s^{(j)}$, $\forall j$. Он может быть найден путем решения обычной задачи управления для системы (1.1) с учетом условий координации, указанных ниже. Пусть также τ_+ — момент попадания последнего элемента стаи в состояние $x^{(m)}(\tau_+) = \dot{q_+} *$.

Чтобы эллипсоид $E_c^0[t]$, содержащий стаю в виде цепочки, был построен, начиная с момента τ_- и далее достиг второй барьерной плоскости $\mathcal{H}_{zb}^+$, потребуем условий

$$x^{(1)}(\tau_-) = q_-^* \in \mathcal{H}_{zb}^-, \quad x^{(m)}(\tau_+) = q_+^* \in \mathcal{H}_{zb}^+, \tag{2.3}$$

$$x^{(1)}(t) = x^{(2)}(t+2h) = \ldots = x^{(m)}(t+2(m-1)h) = x^{(1)}(t) + 2r(m-1)\mathbf{e}^*, \tag{2.4}$$
$$t \in [\tau_-, \tau_+ + 2(m-1)h], \quad x^{(1)}(t) = q_-^* + (t-\tau_-)v_s,$$

где h — время прохождения траекториями $x^{(j)}(t)$ расстояния r при постоянном управлении $v_s = \text{const}$, задаваемом при ограничении

$$\dot{x}^{(j)}(t) = v_s \in \mathbb{R}^n \ \forall j = 1, \ldots, m, \quad \|v_s\|h \geq r,$$

на промежутке $t \in [\tau_-, \tau_+ + (m-1)h]$.

Наряду с (2.4), (2.3) на том же промежутке должны быть также выполнены условия

$$\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{B}_r(x^{(j)}(t-2(j-1)h)) \subset E_c[t-2(m-1)h], \tag{2.5}$$

$$\text{vol}E_c[t_0] = \text{vol}E_c[\tau_- + (m-2)h] = \text{vol}E_c[\tau_+ - (m-2)h].$$

Таким образом, в момент $t = \tau_-$ происходит первое пересечение $E_c[t]$ с $\mathcal{H}_{bz}$ и при $t = t^* = \tau_- + (m-2)h$ половина стаи будет выстроена в цепочку вдоль прямой $\mathcal{L}(q_-^*, q_+^*)$. Это обстоятельство должно быть учтено при реконфигурации $E_c[t]$. Заметим, что при $t = t^{**} = \tau_+ + 2(m-1)h$ уже вся стая $\mathbf{X}[t]$ будет целиком выстроена в цепочку, расположенную на прямой $\mathcal{L}(q_-^*, q_+^*)$. Стороны параллелотопа $\mathcal{P}(p, P, \alpha)$ в $\mathbb{R}^3$ здесь будут определяться параметрами $\alpha = \{2mr, 2r, 2r\}$, а полуоси $E_c[t]$. будут равны $mr\sqrt{3}, r\sqrt{3}, r\sqrt{3}$. Подобная ситуация продлится вплоть до момента $t^\sharp = \tau_+ + (m-1)h$, когда $x^{(1)}(t^\sharp) = q_+^*$ и $x^{(m)}(\tau_+) = q_+^*$.

Будем считать, что для перестройки контейнера от $E_c[t]$ до $E_c[t^*]$ необходимо время $\tau^* = (t_r - t_0) \geq 4mr/\|v_s\|$. Тогда следует учесть, что одновременно должно быть выполнено и условие $q_c(t^*) = q_-^*$ с соблюдением первого из соотношений (2.3) вместе с (2.4). Следовательно, ограничения μ на скорости $\dot{q}_c(t)$ и стаи, например ее элемента $\dot{x}^{(1)}$, определяющего τ_-, должны быть согласованы, а именно они должны обеспечивать выполнение *условия координации*

$$t_0 + \tau^* \leq t^* = \tau_- + (m-1)h$$

наряду с (2.4), (2.3) и (2.5).

Теперь, когда время τ_- скоординировано, можно положить $t_s^- = \tau_-$. Далее, на участке $[\tau_-, \tau_+]$ при движении $E_c[t]$ от $\mathcal{H}_{zb}^-$, где $x^{(1)}(\tau_-) = q_-^*$, до $\mathcal{H}_{zb}^+$, где $x^{(m)}(\tau_+) = q_+^*$, со скоростью v_s, эталонная траектория $q_c(t)$ должна двигаться с той же скоростью $v = v_s = \text{const}$, что и элементы стаи $x^{(j)}$, завершая проход через $q_+^* \in \mathcal{H}_{zb}^+$ за время

$$\tau_{bz} = \|q_-^+ - q_+^-\|/\|v_s\| = 6rm/\|v_s\|, \quad \tau_+ = t_s^+$$

при условии $x^{(m)}(\tau_+) = q_+^*$. Здесь $t_s^+ = \tau_- + \tau_{bz} = \tau_+$.

На последнем участке $[t_s^+, \vartheta]$ остается совершить реконфигурацию от $E_c[\tau_+]$ до $E_c[\vartheta] \subseteq \mathcal{E}(m, M) + \varepsilon\mathcal{B}_r(m) = \mathcal{M}_\varepsilon$, сохраняя условия вместимости и отсутствия столкновений внутри стаи. (Предполагается, что подбор $\varepsilon \geq 0$ доставляет такую возможность.) Координация движения $q_c(t)$ и $E_c[t]$ здесь реализуется так же, как и выше.

После прохождения препятствий, на промежутке $t \in [t_s^+ + mh, \vartheta]$, стае $\mathbf{X}[t] \subseteq E_c[t]$ может снова потребоваться реконфигурация для обеспечения включения $E_c^f[\vartheta] \subset \mathcal{M}$. Координация движения контейнера и стаи внутри тогда производится аналогично приведенной схеме.

З а м е ч а н и е. Переход от $E_c[t_0]$ к $E_c[\tau_-]$ и от $E_c[\tau_+]$ к $E_c^f[\vartheta]$ может потребовать расширения размеров контейнера (объема $\text{vol}E_c^0[t]$) при сохранении объемов

$$\text{vol}E_c^0[t_0] = \text{vol}E_c^0[t_s^-] = \text{vol}E_c^0[t_s^-] = \text{vol}E_c[\vartheta].$$

Перейдем теперь к описанию управлений при нестолкновениях.

3. Групповое движение при нестолкновениях. Управляющие стратегии.

Полагая, что эллипсоидальная траектория $E_c[t]$ известна на всех участках, управление движением стаи $\overline{\mathbf{X}[t]} = \mathbf{x}[t]$ будем конструировать из условий пребывания ее элементов внутри $E_c[t]$ с сохранением условий нестолкновения и выполнении соотношений (2.3), (2.4), (2.5). Описание приведем как соединение решений на трех частях траектории, соответствующих интервалам $[t_0, \tau_-]$, $[\tau_-, \tau_+]$, $[\tau_+, \vartheta]$. При этом ограничения (I), (II), указанные ниже, одинаковы для всех трех интервалов, тогда как условия (III) различны для каждого из них.

Обсудим разрешимость перечисленных ранее условий для нахождения синтезированных управлений $u^{(j)}(t, \mathbf{x})$ и способы вычисления этих управлений. По каждому условию укажем составляющие общей функции цены, свойства которой будут определять условия совместности этих требований.

(I) **Внешние фазовые ограничения (выпуклые)**

$$\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)) \subset E_c^0[t] = \mathcal{E}^0(q_c(t), Q_c(t)), \quad \dot{x}^{(j)}(t) \in E_v^0[t] = \mathcal{E}(\dot{q}_c(t), \delta^2\mathcal{B}_1(0)),$$

$$j = 1, \ldots, m; \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Напомним, что $h_+(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \min\{\varepsilon : \mathcal{X}_2 + \varepsilon\mathcal{B}_1(0) \supset \mathcal{X}_1)$ означает хаусдорфово полурасстояние от множества $\mathcal{X}_2$ до множества $\mathcal{X}_1$. Тогда здесь

$$d^2(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), E_c^0[t]) = d_{cr}^2[t, x^{(j)}] = h_+^2(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t)), E_c^0[t])$$

будет означать квадрат такого полурасстояния от $E_c^0[t]$ до $\mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))$ и $d^2(\dot{x}^{(j)}(t), E_v^0[t]) = d_v^2[t, \dot{x}^{(j)}]$ — квадрат нормы разности скоростей $\dot{x}^{(j)}(t)$ и центра $\dot{q}_c(t)$ эллипсоида $E_v^0[t]) = \mathcal{E}(\dot{q}_c(t), \delta^2 I)$.

В данном случае, при известном $q_c(t)$, ограничения $d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q_c}] = d_{cr}^2[t, x^{(j)}] + d_v^2[t, \dot{x}^{(j)}] = 0$ обеспечиваются в случае задачи Н неравенствами

$$U_E^{(j)}(t, \mathbf{x}^{(j)}) = \begin{cases} u : \left\{ d(d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q}_c])/dt\,|_u \;\middle|\; u \in \mathcal{P} \right\} \le 0 \;\text{ при }\; d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q}_c] > 0, \\ \mathcal{P} \;\text{ при }\; d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q}_c] = 0. \end{cases}$$

(Для определения этого множества может потребоваться вторая производная $d^2(d_r^2[t, \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{q}_c])/dt^2$.) В задаче Н подобное условие будет обеспечиваться добавками в соответствующее уравнение ГЯБ, имеющими вид

$$h_{jq}^+[t] = (h_+^2(x^{(j)}(t), \mathcal{E}(q_c(t), Q_c(t))) - r^2)_+ + (h_+^2(\dot{x}^{(j)}(t) - \dot{q}(t), \mathcal{E}(0, \delta^2 I)))_+.$$

Здесь и далее $h_+[t] = h(t)$, если $h(t) \ge 0$; $h_+(t) = 0$, если $h(t) < 0$.

(II) **Внутренние ограничения (невыпуклые). Избежание столкновений**

В соответствии с (1.3) эти ограничения можно записать при помощи *матрицы расстояний* $\mathbf{D}_r = \{D_{ij}\}$, где

$$D_{ij}(t, \mathbf{x}) = D(\mathcal{B}_r(x^{(i)}(t)), \mathcal{B}_r(x^{(j)}(t))) = D_{ji}(t, \mathbf{x}), \quad i \ne j; \quad i, j = 1 \ldots, m; \quad D_{ii} = 0.$$

Тогда условия нестолкновений внутри контейнера имеют вид

$$\mathbf{D}_r(t, \mathbf{x}) = \{D_{ij}(t, \mathbf{x})\}, \quad \mathbf{D}_r(t, \mathbf{x}) \ge 0, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{3.1}$$

Следует заметить, что указанные ограничения становятся активными только при расстоянии между центрами виртуальных шаров $\mathcal{B}_r(x^{(i)}), \mathcal{B}_r(x^{(j)})$ равном $d_{ij}(t, \mathbf{x}_s) = \|x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t)\| \le 2r$. Методы решения подобных задач приведены в работах [16; 17].

Управления, обеспечивающие указанные ограничения, определяются неравенствами

$$U_{ji}(t,\mathbf{x}) = U_{ij}(t,\mathbf{x}) = \begin{cases} u : dD_{ij}(t,\mathbf{x})/dt \geq 0, \text{ при } D_{ij}(t,\mathbf{x}(t)) = 0, \\ \mathcal{P} \text{ при } D_{ij}(t,\mathbf{x}(t)] > 0. \end{cases}$$

(Здесь также может потребоваться вторая производная $d^2(D_{ij}^2[t,x(t)])/dt^2$.)

Для задачи H подобное условие будет также обеспечиваться добавками в соответствующее уравнение ГЯБ, имеющими вид

$$h_{ij}[t] = h^+(r^2 - \|x^{(i)}(t) - x^{(j)}(t)\|^2)_+, \quad i > j, \quad i,j = 1\ldots,m; \quad t \in [t_0,\vartheta].$$

Далее приняты обозначения

$$H_{1+}(t,\mathbf{x},\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{m} h_{jq}^+[t],\ H_{2+}(t,\mathbf{x},q) = \sum_{i>j=1}^{m} h_{ij}^+[t],$$

$$H_+(t,\mathbf{x},\mathbf{q}) = H_{1+}(t,\mathbf{x},\mathbf{q}) + H_{2+}(t,\mathbf{x},q).$$

Дальнейшие условия отдельно выпишем для трех интервалов.

(III) **Построение уравнения ГЯБ для стаи**

Интервал III-1 ($t \in [t_0, \tau_-]$ при $t_s^- = \tau_-$).

Эти условия могут быть записаны в следующем виде.
Рассмотрим терминальный функционал

$$\varphi(\tau_-,\mathbf{x}) = \|x^{(1)}(\tau_-) - q_-^*\|^2 + \|\dot{x}^{(1)}(\tau_-) - v_s)\|^2$$

и назначим функцию цены для задачи H1: найти

$$\mathbf{V}^{(1)}(t,\mathbf{x}) = \min_u \left\{\varphi(\tau_-,\mathbf{x}(\tau_-)) + \int_{t_0}^{\tau_-} H_+(t,\mathbf{x},\mathbf{q})dt \mid \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{P}\right\}.$$

Пусть

$$\mathbf{x}_s = N_s\mathbf{x},\ \ \mathbf{x}_v = N_v\mathbf{x}, \quad \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x} = \{\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_s, \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v\}.$$

Функция $\mathbf{V}^{(1)}(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ)

$$\partial\mathbf{V}/\partial t + \langle\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v\rangle + \langle\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v\rangle$$

$$+ \min_{u\in\mathcal{P}}\{\langle\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}}\rangle\} + H_+(t,\mathbf{x},q) = 0 \tag{3.2}$$

при краевом условии $\mathbf{V}(\tau_-,\mathbf{x}) = \varphi(\tau_-,\mathbf{x})$.

Интервал III-2 ($t \in [\tau_-,\tau_+]$ при $t_s^- = \tau_-,\ t_s^+ = \tau_+ = \tau_- + \tau_{bz} + 2(m-1)h$).

Теперь рассмотрим терминальный функционал

$$\varphi_{ob}(\tau_+,\mathbf{x}) = \|x^{(m)}(\tau_+) - q_+^*\|^2 + \|\dot{x}^{(m)}(\tau_+) - v_s)\|^2$$

и назначим функцию цены для задачи H2: найти

$$\mathbf{V}^{(2)}(t,\mathbf{x}) = \min_u \left\{\varphi(\tau_+,\mathbf{x}(\tau_+)) + \int_{\tau_-}^{\tau_+} H_+(t,\mathbf{x},\mathbf{q})dt; \mid \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{P}\right\}$$

Условия нестолкновения элементов стаи вдоль цепочки при движении с постоянной скоростью v_s будут обеспечены равенствами (2.4) вместе с добавками

$$\|x^{(1)}(t) - q_c(t)\|^2,\ t \in [\tau_-, \tau_- + \tau_{bz}], \quad q_c(t) = q_+^* + v_s(t - \tau_-)\mathbf{e}^*.$$

Обозначим

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m-1} \|x^{(i)}(t) - x^{(i+1)}(t + 2h)\|^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \|\dot{x}^{(i)}(t) - \dot{q}_c(t)\|^2.$$

Уравнение ГЯБ для $\mathbf{V}^{(2)}(t, \mathbf{x})$ имеет вид

$$\begin{gathered}\partial\mathbf{V}/\partial t + \langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v\rangle + \langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v\rangle \\ + \min_{u\in\mathcal{P}}\{\langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}}\rangle\} + \|x^{(1)}(t) - q_c(t)\|^2 + \mathbf{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0\end{gathered} \tag{3.3}$$

при краевом условии $\mathbf{V}(\tau_+, \mathbf{x}) = \varphi_{ob}(\tau_+, \mathbf{x})$.

Интервал III-3 ($t \in [\tau_+, \vartheta]$).

Здесь решается задача Н3 о попадании стаи на целевое множество $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{E}(m, M + \varepsilon I)$ при ограничениях вида

$$\begin{gathered}(a) \qquad \mathcal{B}_r(x^{(j)}(\vartheta)) \subset E_f[\vartheta] = \mathcal{E}(q_c(\vartheta), Q_c(\vartheta)) \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon, \\ \mathcal{O} \le \|\dot{x}^{(j)}(\vartheta) - \dot{q}_c^{(j)}(\vartheta)\| \le \delta_f^2; \\ (b) \qquad \mathbf{D}_r[\vartheta] = D(\mathcal{B}_r(x^{(j)}(\vartheta)), \mathcal{B}_r(x^{(k)}(\vartheta))) \ge 0, \\ j, k = 1, \dots, m, \quad j \ne k,\end{gathered}$$

где $m, M, \dot{q}_c(\vartheta)$ заданы вместе с матрицами $\mathbf{X}_s[t_0] - q_c(t_0) = \mathbf{X}_{sc}[t_0]$.

Требуется также выполнить *терминальные соотношения* $E_f[\vartheta] = E_c[t_0]$, а именно

$$q_c(\vartheta) = m,\ Q_c(\vartheta) = Q_c(t_0); \quad \mathbf{X}_s[\vartheta] - q_c(\vartheta) = \mathbf{X}_{sc}[\vartheta] = \mathbf{X}_{sc}[t_0],$$

обеспечивающие аналогичное изначальному включение

$$\mathbf{x}_{sc}^{(j)}[t_0] = \mathbf{x}_{sc}^{(j)}[\vartheta] \subset \mathcal{E}(0, Q_c(\vartheta)), \quad j = 1, \dots m,$$

при указанном в предыдущих строках условии (I) о вместимости стаи в контейнер.

В рассматриваемом случае имеем терминальный функционал

$$\varphi_f(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) = \|\mathbf{x}_{sc}(\vartheta) - \mathbf{x}_{sc}(t_0)\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{x}_v^{(j)}(\vartheta) - \dot{q}_c(\vartheta)\|^2$$

и функцию цены $\mathbf{V}^{(3)}(t, \mathbf{x})$:

$$\mathbf{V}^{(3)}(t, \mathbf{x}) = \min_u \left\{\varphi_f(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) + \int_{\tau_+}^{\vartheta} H_+(t, \mathbf{x}, \mathbf{q})dt \mid \mathbf{x}(t) = \mathbf{x},\ \mathbf{u} \in \mathbf{P}\right\}.$$

Отсюда следует и соответствующее уравнение ГЯБ

$$\begin{gathered}\partial\mathbf{V}/\partial t + \langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_v\rangle + \langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, A(t)\mathbf{x}_s + C(t)\mathbf{x}_v\rangle \\ + \min_{u\in\mathcal{P}}\{\langle \partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x}_v, \overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}}\rangle\} + H_+(t, \mathbf{x}, q) = 0\end{gathered} \tag{3.4}$$

при краевом условии $\mathbf{V}(\vartheta,\mathbf{x}) = \varphi_f(\vartheta,\mathbf{x})$.

Разрешимость задачи Н

Пусть
$$\mathcal{U}_{tot}(t) = \cup\{\mathcal{U}^{(j)}(t),\ j = 1,\dots,m\},$$
причем
$$\mathcal{U}^{(j)}(t) = \big\{\mathcal{P}\cap U_E^{(j)}(t)\textstyle\bigcap_{i<j}\{U_{ij}(t)\mid i = 1,\dots,m\}\big\}.$$

Тогда при $\mathcal{U}_{tot}(t,\mathbf{x}(t)) \neq \varnothing,\ t\in[t_0,\vartheta]$, условия разрешимости задачи Н состоят из трех условий.

А именно пусть на интервале III-1 задана начальная позиция $\{t_0,\mathbf{x}\}$ системы (1.1), удовлетворяющая свойствам стаи СС(i), СС(ii) и найдена функция цены $\mathbf{V}^{(1)}(t,\mathbf{x})$.

Тогда для разрешимости задачи Н1 необходимо и достаточно, чтобы
$$\mathbf{V}^{(1)}(t_0,\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{V}^{(1)}(t_0,\mathbf{x}(t_0)\mid\tau_-,\varphi(\tau,\cdot)) = 0.$$
Аналогично для задач Н2 и Н3 при $\mathcal{U}_{tot}(t,\mathbf{x}(t))\neq\varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы соответственно
$$\mathbf{V}^{(2)}(\tau_-,\mathbf{x}(\tau_-)) = \mathbf{V}^{(2)}(\tau_-,\mathbf{x}\mid\tau_+,\varphi_{ob}(\tau_+,\cdot)) = 0,$$
$$\mathbf{V}^{(3)}(\tau_-,\mathbf{x}(\tau_-)) = \mathbf{V}^{(2)}(\tau_-,\mathbf{x}\mid\tau_+,\varphi_f(\vartheta,\cdot)) = 0.$$

В этом случае для задачи Н получаем
$$\mathbf{V}^{(1)}\big(t_0,\mathbf{x}\mid\mathbf{V}^{(2)}(\tau_-,\cdot\mid\mathbf{V}^{(3)}(\tau_+,\cdot\mid\vartheta,\varphi_f(\varphi,\cdot)))\big) = 0, \tag{3.5}$$
а именно, что задача Н разрешима для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию (3.5).

Таким образом, указанные условия обеспечивают стыковку функций $\mathbf{V}^{(i)}$ в виде соотношений (3.5).

Множество
$$\mathcal{W}[t_0] = \big\{\mathbf{x} : \mathbf{V}^{(1)}(t_0,\mathbf{x}) = \mathbf{V}(t_0,\mathbf{x}\mid\vartheta,\varphi_f(\vartheta,\cdot)) = 0\big\}$$
состоит из начальных позиций $\{t_0,\mathbf{x}\}$, для которых задача Н имеет решение при указанных в ней ограничениях.

Теорема Н1 (О разрешимости задачи Н). *При условиях* $\mathcal{U}_{tot}(t,\mathbf{x}(t))\neq\varnothing,\ t\in t_0,\vartheta]$, *задача* Н *имеет решение в том и только том случае, когда множество* $\mathcal{W}[t_0]\neq\varnothing$.

Указанные рассуждения позволяют сформулировать *принцип оптимальности для задачи* Н *группового управления* — аналог известного для изолированных уравнений с управлениями [2], а именно
$$\mathbf{V}(t_0,\mathbf{x}\mid\vartheta,\varphi_f(\vartheta,\cdot)) = \mathbf{V}\big(t_0,\mathbf{x}\mid\tau_-,\mathbf{V}(\tau_-,\cdot\mid\tau_+,\mathbf{V}\big(\tau_+,\cdot\mid\vartheta,\varphi_f(\vartheta,\cdot))\big)\big).$$

Нахождение управлений

Общий способ нахождения управлений предполагает, что функция $\mathbf{V}_{\mathbf{x}_v}(t,\mathbf{x})$ найдена для каждого из уравнений (3.2)–(3.4). Тогда в каждом из случаев (I)–(III) синтезированная стратегия $\mathbf{u}^0(t,x)$ определяется из условия максимума вида
$$\langle\partial\mathbf{V}(t,\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}_v,\overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}^0}\rangle = \max\big\{\langle\partial\mathbf{V}(t,\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}_v,\overline{\mathbf{B}(t)\mathbf{u}}\rangle\mid\mathbf{u}\in\mathcal{U}_{tot}\big\}. \tag{3.6}$$

Теорема Н2 (О нахождении стратегий управления в задаче Н). *При разрешимости задачи Н о групповом управлении внутри контейнера имеем*:
$$\mathcal{U}_{tot}^{(j)}(t)\neq\varnothing,\quad j = 1,\dots,m,\quad t\in[t_0,\vartheta],$$
управляющие стратегии $\mathbf{u}^0(t,\mathbf{x})$, *определяются из условий максимума вида* (3.6).

Второе условие разрешимости и принцип прицеливания

Укажем множества позиций стаи, из которых задача Н имеет решение при заданном ε в целевом множестве $\mathcal{M}_\varepsilon$. Эти области будем находить, двигаясь в попятном времени от $\mathcal{M}_\varepsilon$ и интервала III-3 к интервалу III.

Задача Н1В. Пусть заданы $\{\vartheta, \mathcal{M}_\varepsilon\}$ и интервал $[\tau_+, \vartheta]$. Найти множество позиций

$$\mathbf{W}[\tau_+] = \Big\{\{\tau_+, \mathbf{X}\} : \exists E_f[\vartheta] \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon \Big| \operatorname{vol} E_c[\vartheta] \geq \operatorname{vol} E_c^0\Big\},$$

для которых, при $\mathbf{X}[\vartheta] \subset E_f[\vartheta]$, имеют место условия

$$x^{(m)}(\tau_+) = q_+^*, \quad \langle h_b, x^{(m)}(\tau_+)\rangle = c_b^+, \quad \langle h_b, x^{(j)}(\tau_+)\rangle \geq c_b^+ + r\|h_b\|, \quad j = 1, \ldots, (m-1),$$

а также выполняются включения $\mathbf{X}_s \subset E_c[t]$, $\mathbf{X}_s[t_0] = \mathbf{X}$ и неравенства $\mathbf{D}_r(t) \geq 0$, (3.1), при $t \in [\tau_+, \vartheta]$.

Задача Н2В. Пусть известны найденное множество позиций $\mathbf{W}[\tau_+]$ и интервал $[\tau_-, \tau_+]$. Найти множество позиций

$$\mathbf{W}[\tau_-] = \Big\{\{\tau_-, \mathbf{X}\} : \{\exists \mathbf{X}[t] \subset E_c[t] \;\Big|\; \mathbf{X}_s[\tau_+] \subseteq \mathbf{W}[\tau_+] \cap E_c[\tau_+]\Big\},$$

для которых при $\mathbf{X}_s[\tau_-] \subset E_c[\tau_-]$ имеют место условия

$$x^{(1)}(\tau_-) = q_-^*, \quad \langle h_b, x^{(1)}(\tau_-)\rangle = c_b^-, \quad \langle h_b, x^{(j)}(\tau_-)\rangle \leq c_b^- - r\|h_b\|, \quad j = 2, \ldots, m,$$

при выполнении неравенства $\mathbf{D}_r(t) \geq 0$, (3.1), и условий $E_c[t] \cap \mathcal{E}(q^{(i)}, Q^{(i)}) = \varnothing, i = 1, 2$, при $t \in [\tau_-, \tau_+]$.

Задача Н3В. Пусть известны найденное множество $\mathbf{W}[\tau_-]$ и интервал $[t_0, \tau_-]$. Найти множество позиций

$$\mathbf{W}[t_0] = \Big\{\{t_0, \mathbf{X}\} : \{\exists \mathbf{X}_s[t] \subseteq E_c[t] \;\Big|\; \mathbf{X}_s[\tau_-] \subset \mathbf{W}[\tau_-] \cap E_c[\tau_-]\Big\},$$

для которых при $\mathbf{X}[t_0] \subset E_c[t_0]$ имеют место условия $\mathbf{X}[t_0] \subset E_c[t_0]$ при выполнении неравенства $\mathbf{D}_r(t) \geq 0$, (3.1) на интервале $t \in [t_0, \tau_-]$.

Множества $\mathbf{W}[t]$ $t \in [t_0, \vartheta]$, состоящие из элементов из $\mathbf{X}$, образуют *трубку разрешимости* задачи Н. При непустоте этой трубки

$$\mathbf{W}[t] \neq \varnothing \;\forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Задача Н будет разрешима.

Знание трубки $\mathbf{W}[t]$ в случае выпуклости ее сечений для каждого t позволяет применить групповые управления, сохраняющие траекторию при $\mathbf{X}[t_0] \subseteq \mathbf{W}[t_0]$ внутри этой трубки ($\mathbf{X}[t] \subseteq \mathbf{W}[t]$) и приводящие ее, следовательно, в состояние $\mathbf{X}[\vartheta] \subseteq \mathbf{W}[\vartheta] \subset \mathcal{M}_\varepsilon$.

С этой целью, положив $\lambda = \max\{\lambda_i(t) \mid i = 1, \ldots, n,\ t \in [t_0, \vartheta]\}$ как наибольшее из значений собственных чисел матрицы $Q(t)$ на этом промежутке и $\|A(t)\| \leq \nu$ на том же промежутке, рассмотрим функцию

$$\mathcal{V}(t, \mathbf{X}) = \exp(-2r\gamma t) h_+^2(\mathbf{X}[t], \mathbf{W}[t]), \quad \gamma \geq \max\{\lambda, \nu\}.$$

Далее, для всех $j = \{1, \ldots, m\}$ примем стратегии управления

$$u^{(j)}(t, \mathbf{x}) \in \arg\min \sum_{j=1}^{m} \big\{\langle \partial \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) / \partial x_v^{(j)}, B(t) u^{(j)}\rangle \mid u^{(j)} \in \mathcal{U}^{(j)}\big\}. \tag{3.7}$$

Теорема H2 (Второй подход).

(i) *Задача H о групповом управлении внутри контейнера разрешима в том и только том случае, когда множества* $\mathbf{W}[t] \neq \varnothing$, *при всех* $t \in [t_0, \vartheta]$.

(ii) *Управляющие стратегии* $u^{(j)}(t, \mathbf{x})$ *определяются из условий минимума вида* (3.7).

Доказательства приведенных выше теорем, а также теорем существования решений уравнений (1.1) при управлениях (3.7), проводятся по схемам книг [2; 5; 18].

П р и м е ч а н и я.

(i) Для реализации предложенной схемы синтеза управлений члены стаи должны располагать текущей информацией о положениях и скоростях других участников. Последнее может быть достигнуто путем доступных измерений абсолютных координат стаи, сообщаемых из центра, обязательно связанного с назначенным лидером стаи, так и с наблюдениями ее относительных координат с центром $q_c(t)$. Последнее должно определяться некоторой иерархической схемой сетевых коммуникаций внутри стаи. Члены стаи должны также обладать априорной информацией о параметрах траектории виртуального эллипсоидального контейнера. Вопросы информационного обеспечения группового управления образуют подзадачу для отдельного рассмотрения.

(ii) Отдельный круг подзадач составляют и описания вычислительных процедур для рассматриваемой общей задачи. Они особенно важны для преодоления трудностей, порожденных повышенной размерностью системы. Вопросы, связанные с вычислением траектории контейнера рассматривались в работах [4; 19] в рамках теории эллипсоидальных трубок (см. [2]).

4. Заключение

Данная работа, продолжающая публикацию [1], посвящена описанию поведения группы управляемых систем с ньютоновой динамикой в условиях нестолкновений и уклонения от препятствий. Основное внимание уделено движениям стаи внутри виртуального эллипсоидального контейнера, координированным с эволюцией самого контейнера, особенно в связи его реконфигурацией при прохождении препятствий. Работа посвящена теоретическим вопросам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** О задаче группового управления в условиях препятствий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 166–179.
2. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Boston: Birkhauser, 2014. 445 p. (Systems & Control: Foundations & Appl.)
3. **Куржанский А.Б., Месяц А.И.** Оптимальное управление эллипсоидальными движениями // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 18, № 12. с. 1525-1532.
4. **Куржанский А.Б., Месяц А.И.** Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 404–414.
5. **Krasovskii N.N., Subbotin A.N.** Game-theoretical control problems. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
6. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order PDE's. The dynamic optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p. (Systems & Control: Foundations & Appl.)
7. **Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.** Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
8. **Crandall M.G., Lions P-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. P. 1–41.
9. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 2. P. 227–251.
10. **Clarke F.H.,Ledyaev Yu.S.,Stern R.J., Wolenski P.R.** Nonsmooth analysis and control theory / New York: Springer-Verlag, 1998. 278 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 178.)

11. **Rockafellar R.T., Wets R.J-B.** Variational analysis. New York: Springer, 2004. 733 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; vol. 317).
12. **Демьянов В.Ф.** Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
13. **Chang D.E.,Shadden S.,Marsden J.E.,Olfati-Saber R.**// Collision avoidance for multiple agent systems / Proc. of 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawai, 2003. Vol. 1. P. 539–543.
14. **Junge O., Ober-Bloebaum S.** Optimal reconfiguration of formation flying satellites // Proc. of 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference (ECC). Seville, 2005. P. 66–71.
15. **Olfati-Saber R.** Flocking for multi-agent dynamic systems : algorithms and theory // IEEE Trans. Automatic Control. 2006. Vol. 51, no. 3. P. 401–420.
16. **Гусев М.И., Куржанский А.Б.** К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений, I; II // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 9. С. 1591–1602; Т. 7, № 10. С. 1789–1800.
17. **Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P.** Control synthesis for state constrained systems // Proc. of the 6th IFAC Symposium NOLCOS-2004. Stuttgart, 2004. P. 813–818.
18. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 255 с.
19. **Куржанский А.Б., Дарьин А.Н.** Параллельный алгоритм вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределенных возмущениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 1. С. 47–57.

Куржанский Александр Борисович Поступила 27.04.2015
академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kurzhans@mail.ru