ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 2 2015

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА[1]

$\boxed{\text{А. В. Кряжимский}}$, А. М. Тарасьев

Работа посвящена исследованию задачи пропорционального развития в моделировании экономического роста. Рассматривается модель мультиуровневой оптимизации при построении сбалансированных пропорций для производственных факторов и инвестиций в условиях изменяющихся цен. На первом уровне изучаются модели с производственными функциями различного типа в рамках классического подхода статической оптимизации. Показывается, что все такие модели обладают свойством пропорциональности: при решении задач максимизации выпуска и минимизации затрат уровни производственных факторов прямо пропорциональны друг другу с коэффициентами пропорциональности, зависящими от цен и эластичности производственных функций. На втором уровне пропорциональные решения первого уровня передаются в модель экономического роста для решения задачи динамической оптимизации инвестиций в производственные факторы. Благодаря условиям пропорциональности и условию однородности первой степени для макроэкономических производственных функций исходная нелинейная динамика системы преобразуется в линейную систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику производственных факторов. В этом преобразовании все особенности нелинейной модели переходят во временную зависимость коэффициента масштаба (совокупной производительности факторов производства) линейной модели, которая определяется пропорциями между ценами и коэффициентами эластичности производственных функций. Для задачи управления с линейной динамикой получены аналитические решения для траекторий оптимального развития в рамках принципа Понтрягина для постановок с конечным и бесконечным горизонтом. Показано, что решения задач управления для этих двух постановок имеют существенные различия: в задачах с конечным горизонтом оптимальная стратегия инвестирования обязательно имеет нулевой режим в финальной стадии, а задача с бесконечным горизонтом всегда обладает строго положительным решением. Замечательный результат предлагаемой модели состоит в конструктивных аналитических решениях для оптимальных инвестиций в производственные факторы, которые зависят от динамики цен и экономических параметров, таких как коэффициенты эластичности производственных функций, совокупная производительность факторов производства, коэффициенты амортизации. Это свойство служит предпосылкой для продуктивного слияния моделей оптимизации инвестиций в производственные факторы в рамках мультиуровневой конструкции и обеспечивает прочный базис для построения оптимальных траекторий экономического развития.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, мультиуровневая оптимизация, пропорциональный экономический рост.

A. V. Kryazhimskiy, A. M. Tarasyev. Optimal control for proportional economic growth.

The research is focused on the question of proportional development in economic growth modeling. A multilevel dynamic optimization model is developed for the construction of balanced proportions for production factors and investments in a situation of changing prices. At the first level, models with production functions of different types are examined within the classical static optimization approach. It is shown that all these models possess the property of proportionality: in the solution of product maximization and cost minimization problems, production factor levels are directly proportional to each other with coefficients of proportionality depending on prices and elasticities of production functions. At the second level, proportional solutions of the first level are transferred to an economic growth model to solve the problem of dynamic optimization for the investments in production factors. Due to proportionality conditions and the homogeneity condition of degree 1 for the macroeconomic production functions, the original nonlinear dynamics is converted to a linear system of differential equations that describe the dynamics of production factors. In the conversion, all peculiarities of the nonlinear model are hidden in a time-dependent scale factor (total factor productivity) of the linear model, which is determined by proportions between prices and elasticity coefficients of the production functions. For a control problem with linear dynamics, analytic formulas are obtained for optimal development trajectories within the Pontryagin maximum principle for statements with finite and infinite horizons. It is shown that solutions of these two problems differ crucially from each other: in finite horizon problems the optimal investment strategy inevitably has the zero regime at the final stage, whereas the infinite horizon problem always has a strictly positive solution. A remarkable result of the proposed model consists in constructive analytical solutions for optimal investments in production factors, which depend on the price dynamics and other economic parameters such as elasticity coefficients of production functions, total factor productivity, and depreciation factors. This

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

feature serves as a background for the productive fusion of optimization models for investments in production factors in the framework of a multilevel structure and provides a solid basis for constructing optimal trajectories of economic development.

Keywords: optimal control, Pontryagin maximum principle, multilevel optimization, proportional economic growth.

Введение

Работа связана с построением и анализом модели пропорционального развития в рамках теории экономического роста. Предлагаемый подход увязывает элементы классических моделей [1–5] и идеи пропорциональности оптимальных решений статических микроэкономических и макроэкономических моделей [6] с конструкциями динамической оптимизации в принципе максимума Понтрягина [7] и его обобщениями для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом [8–11].

Модель реализует результаты исследований по оптимизации инвестиций в производственные факторы [12–21] и существенно дополняет и обновляет их применением конструкций мультиуровневой оптимизации.

Следует отметить, аналогичные подходы к исследованию моделей экономического роста на основе пропорциональных конструкций развивались в работе [22].

Основная идея работы заключается в построении модели экономического роста с конструкцией многоуровневой оптимизации.

На первом уровне рассматривается оптимизационная процедура для статической задачи при фиксации текущего временного периода. Здесь возможны две стандартные постановки: или задача минимизации затрат при фиксированном уровне выпуска, или двойственная к ней задача максимизации объемов выпуска при заданном уровне затрат. Показывается, что для моделей с классическими степенными производственными функциями Кобба — Дугласа, производственными функциями с постоянной эластичностью замещения и функциями типа "затраты-выпуск" [6] решения обеих поставленных задач статической оптимизации обладают свойствами пропорциональности: пропорции в оптимальных факторах производства определяются пропорциями между ценами и коэффициентами эластичности производственных функций.

На втором уровне исследуется задача оптимального управления в рамках теории экономического роста при выполнении условий пропорциональности. Для перехода к этой задаче решения первого уровня оптимизации подставляются в уравнения динамики производственных факторов. В таком переходе свойство однородности первой степени (свойство постоянной отдачи по масштабам производства), справедливое для производственной функции, в совокупности со свойствами пропорциональности производственных факторов генерируют линейную динамику факторов производства и затрат.

Ставится задача оптимального управления для интегральной функции полезности с логарифмическим потребительским индексом на траекториях полученной линейной системы, задающих динамику производственных факторов. Отметим, что использование логарифмического потребительского индекса является основополагающей конструкцией в теории эндогенного экономического роста [3; 6]. Функция полезности такого типа тесно связана также с понятием энтропии динамической системы.

Решение задачи оптимального управления строится в рамках принципа максимума Понтрягина [7] для конечного горизонта и его обобщений для постановок с бесконечным горизонтом [8]. Важное свойство решения заключается в том, что оно задается аналитическими формулами для широкого диапазона модельных параметров, включая программно зависящие от времени цены и коэффициенты эластичности. Отметим, что такая временная зависимость может иметь сложный характер и предусматривать тренды роста, переходные периоды, циклы и кризисы в модели.

Следует сказать, что аналитические решения для оптимального управления получаются для обеих задач — как с конечным горизонтом, так и с бесконечным горизонтом. Структура этих решений четко показывает, что в задаче с конечным горизонтом оптимальное управление всегда имеет нулевой режим инвестиций в финальной стадии. В отличие от этого случая решение задачи с бесконечным горизонтом для оптимальных инвестиций может не содержать нулевых значений на всем временном интервале.

Для первого и второго уровней оптимизации выполняется обратная процедура, в которой оптимальное решение второго уровня возвращается на первый уровень, где производится перераспределение инвестиций между факторами производства в соответствии с принципом пропорциональности.

На основе предлагаемого подхода строятся оптимальные аналитические решения на обоих уровнях оптимизации и соответствующие оптимальные уровни инвестиций генерируют систему дифференциальных уравнений для производственных факторов, схожую с репликаторной динамикой эволюционных игр [23; 24]. Следует подчеркнуть, что в упомянутом контексте полученные оптимальные решения могут быть проанализированы в рамках теории позиционных дифференциальных игр [25].

Отметим, что благодаря эффективной конструкции предлагаемая методология многоуровневой оптимизации может быть применена для эконометрической идентификации и прогностического моделирования оптимальных сценариев пропорционального роста в многоразмерных экономических системах.

Статья организована следующим образом.

Сначала формируется первый уровень оптимизации модели, на котором фиксируется временной период.

В первом разделе рассматривается задача минимизации затрат при заданном уровне выпуска для моделей с классическими производственным функциями: степенными функциями Кобба — Дугласа и функциями с постоянной эластичностью замещения. Доказывается, что решения этих задач обладают свойством пропорциональности — оптимальные затраты факторов должны быть пропорциональны с коэффициентами, зависящими от пропорций между ценами и коэффициентами эластичности.

Во втором разделе анализируется конструкция максимизации объемов выпуска, двойственная к задаче минимизации затрат. Устанавливается, что справедливы аналогичные пропорции оптимальных решений для постановок с производственными функциями Кобба — Дугласа и функциями с постоянной эластичностью замещения.

В третьем разделе условия пропорциональности естественным образом выводятся и для моделей с производственными функциями “затраты-выпуск”.

В четвертом разделе осуществляется установление связей между оптимальными объемами выпуска и затратами. Показывается, что при выполнении условия постоянной отдачи по масштабам производства (единичной эластичности производства) оптимальные объемы выпуска могут быть линейно выражены через затраты с коэффициентом масштаба, заданным пропорциями между ценами и коэффициентами эластичности. Это означает, что нелинейные зависимости в производственных функциях могут быть скрыты в структуре коэффициента масштаба и выражены через пропорции текущего периода.

В пятом разделе вводятся балансовые уравнения для потребления и инвестиций как в абсолютных, так и в относительных переменных. Эта конструкция завершает первый уровень оптимизации модели пропорционального экономического роста.

Далее делается переход ко второму уровню оптимизации, в котором временной период расфиксируется и становится основной переменной.

В шестом разделе задается динамика производственных факторов на основе системы дифференциальных уравнений, описывающих влияние инвестиций как управляющих параметров на экономическое развитие. Вводится также функция полезности для процесса экономического роста в виде интеграла на конечном или бесконечном горизонте от дисконтированного логарифмического индекса потребления, определенного на траекториях системы. Доказывается существование возможности так перераспределить инвестиции в текущем временном периоде, что поддерживаются пропорции оптимальных решений первого уровня модели по минимизации затрат или максимизации объемов выпуска. Следует отметить, что полученная система дифференциальных уравнений для динамики производственных факторов имеет характерные черты репликаторной динамики из теории эволюционных игр.

В седьмом разделе на втором уровне оптимизации модели ставится задача оптимального управления для интегрального логарифмического индекса потребления на траекториях линейной динамики затрат. Для этой задачи формулируется принцип максимума Понтрягина для обеих постановок с конечным горизонтом и бесконечным горизонтом.

Восьмой раздел посвящен анализу гамильтоновых систем, возникающих в принципе максимума Понтрягина, и построению оптимальных решений. Выводятся аналитические формулы для оптимального управления для задач с конечным горизонтом и бесконечным горизонтом. Приводятся достаточные условия оптимальности полученных решений, основанные на свойствах вогнутости максимизированного гамильтониана. Показывается, что структура оптимального управления в задаче с конечным горизонтом обязательно обладает нулевым режимом в терминальной фазе. Напротив, оптимальное управление в задаче с бесконечным горизонтом является, как правило, строго положительным на всем временном интервале. Этот результат показывает преимущества постановок задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в моделях экономического роста по сравнению с задачами на конечном горизонте.

1. Пропорциональность в задаче минимизации затрат

В этом разделе исследуются задачи минимизации затрат первого уровня для моделей с производственными функциями различного типа. Показывается, что решения этих задач обладают свойством пропорциональности: затраты производственных факторов прямо пропорциональны друг другу с коэффициентами пропорциональности, зависящими от цен и коэффициентов эластичности производственных функций.

На первом уровне фиксируется временной период t, $t \in [t_0, T]$, $t_0 \leq T \leq +\infty$, и рассматриваются статические задачи оптимизации. Чтобы не делать выкладки громоздкими, символ времени t в них опускается, хотя при этом следует иметь в виду, что все параметры и переменные модели могут зависеть от времени.

1.1. Минимизация затрат для производственной функции Кобба — Дугласа

Рассмотрим модель экономики, снабженную производственной функцией Кобба — Дугласа

$$y = a \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}. \tag{1.1}$$

Здесь y есть объемы выпуска экономики, а символами $x_1, \ldots, x_n$ обозначены размеры затрат производственных факторов $1, \ldots, n$ соответственно. Параметр a, $a > 0$, выступает в роли коэффициента масштаба (общей продуктивности факторов). Для коэффициентов эластичности α_j производственной функции по факторам предполагается выполнение следующих условий:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \varepsilon.$$

Здесь параметр ε обозначает эластичность производства по масштабам затрат. В макроэкономических моделях, как правило, предполагается, что имеет место постоянная отдача по масштабам производства – свойство однородности первой степени для производственной функции, т.е. эластичность производства равна единице, $\varepsilon = 1$.

Введем цены производственных факторов. Символом p_j, $p_j > 0$, обозначим цену единицы производственного фактора j.

Рассмотрим задачу минимизации затрат при заданном объеме выпуска. Требуется найти оптимальные значения производственных факторов $x_1, \ldots, x_n$, которые минимизируют общие затраты C:

$$\text{Minimize} \quad C = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

при ограничениях на заданный объем выпуска $y > 0$:

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0, \quad y = a \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}.$$

Здесь удобно перейти к логарифмическим ограничениям $\ln y = \ln a + \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + a_n \ln x_n$.

Согласно методу множителей Лагранжа строится функция Лагранжа:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + \lambda(\ln y - \ln a - \alpha_1 \ln x_1 - \ldots - a_n \ln x_n).$$

Здесь параметр λ обозначает множитель Лагранжа, соответствующий логарифмическим ограничениям для производственной функции Кобба — Дугласа.

Необходимые условия оптимальности в задаче минимизации затрат влекут следующую систему соотношений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = p_j - \lambda \frac{\alpha_j}{x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

которые обеспечивают текущие пропорции между производственными факторами:

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \frac{\alpha_i p_k}{\alpha_k p_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Можно вывести значения функций спроса на производственные факторы в следующем виде:

$$x_j = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\alpha_k}\right)^{\frac{\alpha_k}{\varepsilon}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В случае постоянной отдачи по масштабу, $\varepsilon = 1$, получаются следующие выражения для функций спроса:

$$x_j = \frac{y}{a} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\alpha_k}\right)^{\alpha_k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

1.2. Минимизация затрат для производственной функции CES

Рассмотрим модель, основанную на производственной функции с постоянной эластичностью замещения (CES):

$$y = e_0 \left(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}. \tag{1.3}$$

Здесь параметр $e_0 > 0$ задает полную продуктивность факторов, параметры $e_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, являются коэффициентами распределения, параметр $h > 0$ определяет степень однородности производственной функции, параметр β, $\beta > -1$, является коэффициентом замещения. Эластичность производства определяется степенью однородности h, $\varepsilon = h$. Для постоянной отдачи по масштабам производства должно выполняться условие $h = 1$.

Проведем анализ задачи минимизации затрат для производственной функции CES. В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + \lambda\Big(\ln y - \ln e_0 + \frac{h}{\beta} \ln\left(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta}\right)\Big).$$

Необходимые условия оптимальности для задачи минимизации затрат задаются соотношениями

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = p_j - \lambda \frac{h}{\beta} \frac{-\beta e_j x_j^{-(\beta+1)}}{(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta})} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Эти условия генерируют пропорциональность для факторов производства

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \Big(\frac{e_i p_k}{e_k p_i}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Из этих условий выводятся функции спроса на производственные факторы для модели с производственной функцией CES:

$$x_j = \Big(\frac{y}{e_0}\Big)^{\frac{1}{h}} \Big(\frac{e_j}{p_j}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{\frac{1}{\beta}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При постоянной отдаче по масштабам производства, $h = 1$, получаются следующие соотношения для функции спроса:

$$x_j = \frac{y}{e_0} \Big(\frac{e_j}{p_j}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{\frac{1}{\beta}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

1.3. Достаточные условия оптимальности пропорциональных решений

Для того чтобы установить достаточные условия оптимальности для полученных пропорциональных решений, следует вычислить матрицу вторых производных (матрицу Гессе) функции Лагранжа $L(x, \lambda)$ по переменным для производственных факторов x и проверить свойство положительной определенности.

Для модели с производственной функцией Кобба — Дугласа (1.1) имеем следующую матрицу вторых производных:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = \frac{\lambda \alpha_j}{x_j^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k \neq j.$$

Очевидно, что для такой диагональной матрицы выполняется критерий Сильвестра и, следовательно, она положительно определена.

В модели с производственной функцией CES (1.3) матрица вторых производных имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} &= \frac{\lambda h e_j ((\beta+1) x_j^{-(\beta+2)} (\sum_{k \neq j} e_k x_k^{-\beta}) + e_j x_j^{-2(\beta+1)})}{(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta})^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} &= -\frac{\lambda h \beta e_j x_j^{-(\beta+1)} e_k x_k^{-(\beta+1)}}{(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta})^2} < 0, \\ & \quad j = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k \neq j. \end{aligned}$$

Для такой матрицы также можно проверить выполнение критерия Сильвестра и убедиться в ее положительной определенности. Например, в случае двух производственных факторов при $n = 2$ определитель матрицы вторых производных функции Лагранжа имеет положительный знак:

$$\Delta = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} - \Big(\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\Big)^2 = \frac{\lambda^2 h^2 (\beta+1) e_1 e_2 x_1^{-(\beta+2)} x_2^{-(\beta+2)}}{(e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta})^2} > 0,$$

и, следовательно, матрица вторых производных положительно определена.

Таким образом, для обеих классических производственных функций выполнены достаточные условия минимума для пропорциональных решений.

2. Пропорциональность в задаче максимизации объемов выпуска

Условия пропорциональности имеют место не только для задачи минимизации затрат, но и для двойственной задачи максимизации объемов выпуска.

2.1. Максимальные решения для производственной функции Кобба — Дугласа

В модели с производственной функцией Кобба — Дугласа ставится задача максимизации объемов выпуска

$$y = ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \quad \longrightarrow \quad \max$$

при ограничениях на затраты

$$p_1x_1 + \dots + p_nx_n = C. \tag{2.1}$$

Здесь параметр C, $C > 0$, обозначает общие затраты.

Функция Лагранжа в задаче максимизации выпуска имеет следующий вид:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} + \lambda(C - p_1x_1 - \dots - p_nx_n).$$

Необходимые условия оптимальности в этом случае порождают систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = a\alpha_j x_j^{-1}x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} - \lambda p_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Множитель Лагранжа представляется соотношением $\lambda = \dfrac{\alpha_1}{p_1x_1}y = \dots = \dfrac{\alpha_n}{p_nx_n}y$.

Последние условия, в свою очередь, порождают свойства пропорциональности в задаче максимизации объемов выпуска

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \frac{\alpha_i p_k}{\alpha_k p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n,$$

которые аналогичны свойствам пропорциональности в задаче минимизации затрат (1.2).

В этом случае получаются следующие оптимальные решения для функций спроса:

$$x_j = C\frac{\alpha_j}{p_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Выводятся также значения оптимального выпуска через затраты:

$$y = aC\Big(\frac{\alpha_1}{p_1}\Big)^{\alpha_1}\dots\Big(\frac{\alpha_n}{p_n}\Big)^{\alpha_n} = ax_j\frac{p_j}{\alpha_j}\Big(\frac{\alpha_1}{p_1}\Big)^{\alpha_1}\dots\Big(\frac{\alpha_n}{p_n}\Big)^{\alpha_n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

2.2. Максимальные решения для производственной функции CES

Рассмотрим задачу максимизации объемов выпуска для производственной функции CES:

$$y = e_0\big(e_1x_1^{-\beta} + \dots + e_nx_n^{-\beta}\big)^{-\frac{h}{\beta}} \quad \longrightarrow \quad \max$$

при ограничениях на затраты (2.1).

В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = e_0\big(e_1x_1^{-\beta} + \dots + e_nx_n^{-\beta}\big)^{-\frac{h}{\beta}} + \lambda(C - p_1x_1 - \dots - p_nx_n).$$

Необходимые условия оптимальности в задаче максимизации выпуска с производственной функцией CES задаются соотношениями

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = e_0\Big(-\frac{h}{\beta}\Big)\big(e_1 x_1^{-\beta} + \ldots + e_n x_n^{-\beta}\big)^{-\frac{h}{\beta}-1} e_j(-\beta) x_j^{-(\beta+1)} - \lambda p_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Из этих соотношений вытекают условия пропорциональности для производственной функции CES в задаче максимизации выпуска

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \Big(\frac{e_i p_k}{e_k p_i}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n,$$

которые полностью идентичны условиям пропорциональности в задаче минимизации затрат (1.4).

Для функций спроса на производственные факторы получаются следующие соотношения:

$$x_j = C\Big(\frac{e_j}{p_j}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{-1}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для представления оптимального объема выпуска через заданные затраты получаем формулу

$$\begin{aligned} y &= e_0 C^h \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{-h\frac{(\beta+1)}{\beta}} \\ &= e_0 x_j^h \Big(\frac{p_j}{e_j}\Big)^{\frac{h}{(\beta+1)}} \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{\frac{h}{\beta}}, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Для случая постоянной отдачи по масштабам производства, $h = 1$, имеем следующие соотношения для оптимальных объемов выпуска:

$$\begin{aligned} y &= e_0 C \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{-\frac{(\beta+1)}{\beta}} \\ &= e_0 x_j \Big(\frac{p_j}{e_j}\Big)^{\frac{1}{(\beta+1)}} \Big(e_1^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_1^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} + \ldots + e_n^{\frac{1}{(\beta+1)}} p_n^{\frac{\beta}{(\beta+1)}}\Big)^{\frac{1}{\beta}}, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

3. Пропорциональность для производственной функции “затраты-выпуск”

В этом разделе рассматривается случай, когда экономика описывается производственной функцией “затраты-выпуск”:

$$y(t) = \min\Big\{\frac{x_1(t)}{c_1}, \ldots, \frac{x_n(t)}{c_n}\Big\}. \tag{3.1}$$

Здесь параметры c_j, $c_j > 0$, задают коэффициенты продуктивности для производственных факторов x_j, $j = 1, \ldots, n$.

Для сбалансированного состояния экономики должны быть выполнены условия пропорциональности, которые реализуют минимум в определении производственной функции “затраты-выпуск”:

$$y = \frac{x_1}{c_1}, \ldots, \frac{x_n}{c_n}.$$

Последнее условие влечет пропорциональность производственных факторов:

$$c_{ik} = \frac{x_i}{x_k} = \frac{c_i}{c_k}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и задает сбалансированные уровни производственных факторов $x_j = y c_j, \quad j = 1, \ldots, n.$

Принимая во внимание ограничения на затраты (2.1), можно вывести следующее условие для оптимального уровня выпуска:

$$y = C\frac{1}{(p_1c_1 + \ldots + p_nc_n)}.$$

Таким образом, условия условия пропорциональности являются неотъемлемым свойством производственной функции “затраты-выпуск”.

4. Универсальная производственная функция

С этого раздела начнем переход ко второму уровню оптимизации и будем рассматривать динамический процесс, т. е. будем считать, что все параметры производственных функций, ценовые параметры для факторов производства и основные переменные, а именно объемы выпуска, затраты производственных факторов, уровни потребления и инвестиций могут зависеть от временного периода t, $t \in [t_0, T]$, $t_0 \le T \le +\infty$.

Суммируя выводы предыдущих разделов по условиям пропорциональности в задаче минимизации затрат и в задаче максимизации объемов выпуска, можно установить линейную зависимость оптимального продукта $y(t)$ от затрат $C(t)$ и назвать ее *универсальной* производственной функцией модели:

$$y(t) = A(t)C(t), \tag{4.1}$$

а также линейную зависимость стоимости факторов производства $p_j(t)x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, от затрат $C(t)$:

$$p_j(t)x_j(t) = \gamma_j(t)C(t) \tag{4.2}$$

с весовыми коэффициентами $\gamma_j = \gamma_j(t)$, удовлетворяющими симплициальным соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j(t) = 1, \quad \gamma_j(t) \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Здесь новый коэффициент масштаба $A = A(t)$ и весовые коэффициенты $\gamma_j = \gamma_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, определяются типом производственной функции.

А именно для производственной функции Кобба — Дугласа (1.1) коэффициент масштаба A определяется соотношением для общей продуктивности факторов $a = a(t)$, значениями цен $p_j = p_j(t)$ и коэффициентов эластичности $\alpha_j = \alpha_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$:

$$A = A(t) = a(t)\Big(\frac{\alpha_1(t)}{p_1(t)}\Big)^{\alpha_1(t)} \cdots \Big(\frac{\alpha_n(t)}{p_n(t)}\Big)^{\alpha_n(t)}.$$

Весовые коэффициенты γ_j, $j = 1, \ldots, n$, для производственной функции Кобба — Дугласа задаются формулами

$$\gamma_j(t) = \alpha_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для производственной функции CES (1.3) коэффициент масштаба $A = A(t)$ выражается следующим соотношением, включающим общую продуктивность факторов $e_0 = e_0(t)$, цены $p_j = p_j(t)$, коэффициент замещения $\beta = \beta(t)$ и коэффициенты распределения $e_j = e_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$:

$$A = A(t) = e_0(t)\left(e_1(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_1(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}} + \ldots + e_n(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_n(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}}\right)^{-\frac{(\beta(t)+1)}{\beta(t)}}.$$

Весовые коэффициенты γ_j, $j = 1, \ldots, n$, для производственной функции CES задаются соотношениями

$$\gamma_j(t) = e_j(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_j(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}}\left(e_1(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_1(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}} + \ldots + e_n(t)^{\frac{1}{(\beta(t)+1)}}p_n(t)^{\frac{\beta(t)}{(\beta(t)+1)}}\right)^{-1}.$$

В случае производственной функции “затраты-выпуск” (3.1) коэффициент масштаба $A = A(t)$ выражается через коэффициенты продуктивности $c_j = c_j(t)$ и цены $p_j = p_j(t)$ согласно формулам

$$A = A(t) = \frac{1}{(p_1(t)c_1(t) + \ldots + p_n(t)c_n(t))}.$$

Весовые коэффициенты γ_j, $j = 1, \ldots, n$, для производственной функции “затраты-выпуск” представляются соотношениями

$$\gamma_j(t) = \frac{p_j(t)c_j(t)}{(p_1(t)c_1(t) + \ldots + p_n(t)c_n(t))}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

5. Балансовые уравнения

Введем следующие обозначения для уровней инвестиций. Символом $I = I(t)$ обозначим общие инвестиции. Полагаем, что символы $I_j = I_j(t)$ означают уровни инвестиций в факторы производства $x_j = x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, имеем балансовое соотношение в инвестициях:

$$I(t) = I_1(t) + \ldots + I_n(t).$$

Вводя относительные уровни инвестиций по отношению к общему объема выпуска $y(t)$, получаем для них следующую связь:

$$s(t) = \frac{I(t)}{y(t)}, \quad s_j(t) = \frac{I_j(t)}{y(t)}, \quad s(t) = s_1(t) + \ldots + s_n(t),$$

$$0 \leq s(t) < 1, \quad 0 \leq s_j(t) \leq s(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Символом $Ç = Ç(t)$ обозначим абсолютный уровень потребления.

Принимая во внимание балансовое уравнение для инвестиций и потребления, получаем следующее соотношение: $y(t) = Ç(t) + I(t) = Ç(t) + I_1(t) + \ldots + I_n(t)$. Аналогично, переходя к относительной переменной для уровня потребления $c(t) = Ç(t)/y(t)$, выводим основные балансовые уравнения в виде

$$1 = c(t) + s(t) = c(t) + s_1(t) + \ldots + s_n(t). \tag{5.1}$$

6. Динамика модели и функция полезности

В этом разделе мы дадим описание динамики основных переменных модели.

6.1. Динамика факторов производства

При наличии информации о ценах $p_j = p_j(t)$ и уровнях инвестиций $I_j = I_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, можно пересчитать физические уровни затрат в производственные факторы:

$$\Delta x_j(t) = \frac{I_j(t)}{p_j(t)} = \frac{s_j(t)y(t)}{p_j(t)}. \tag{6.1}$$

Полагаем, что производственные факторы $x_j = x_j(t)$ подвержены эффекту амортизации с заданными коэффициентами $\delta_j = \delta_j(t)$.

Далее, учитывая инвестиции $\Delta x_j(t)$ в производственный фактор j в текущем периоде t как управляющие параметры, можно записать дифференциальные уравнения для динамики системы производственных факторов:

$$\dot{x}_j(t) = \Delta x_j(t) - \delta_j(t)x_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Принимая во внимание выражения (6.1) для затрат производственных факторов через объем выпуска $y(t)$, представим динамику (6.2) в следующем виде:

$$\dot{x}_j(t) = \frac{s_j(t)y(t)}{p_j(t)} - \delta_j(t)x_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

На основе соотношений для оптимального значения объемов выпуска (4.1) можно получить уравнения динамики производственных факторов, записанные через затраты $C(t)$:

$$\dot{x}_j(t) = \frac{s_j(t)A(t)C(t)}{p_j(t)} - \delta_j(t)x_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Можно получить также динамику производственных факторов в стандартной форме для задач оптимального управления, используя соотношение (4.2):

$$\dot{x}_j(t) = x_j(t)\Big(\frac{s_j(t)}{\gamma_j(t)}A(t) - \delta_j(t)\Big), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.4}$$

6.2. Динамика затрат

Уравнения динамики затрат $C(t)$ выводятся из динамики факторов производства (6.3):

$$\begin{aligned}\dot{C}(t) &= \dot{p}_1(t)x_1(t) + \ldots + \dot{p}_n(t)x_n(t) + p_1(t)\dot{x}_1(t) + \ldots + p_n(t)\dot{x}_n(t)\\ &= \Big(\frac{1}{p_1(t)}\dot{p}_1(t) - \delta_1(t)\Big)p_1(t)x_1(t) + \ldots + \Big(\frac{1}{p_n(t)}\dot{p}_n(t) - \delta_n(t)\Big)p_n(t)x_n(t) + s(t)y(t)\\ &= \Big(\frac{1}{p_1(t)}\dot{p}_1(t) - \delta_1(t)\Big)p_1(t)x_1(t) + \ldots + \Big(\frac{1}{p_n(t)}\dot{p}_n(t) - \delta_n(t)\Big)p_n(t)x_n(t) + s(t)A(t)C(t). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Учитывая линейную зависимость стоимости факторов производства $p_j(t)x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, от общих затрат $C(t)$ (4.2), получаем основное дифференциальное уравнение для динамики затрат:

$$\dot{C}(t) = C(t)\Big(s(t)A(t) + \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(t)\Big(\frac{1}{p_j(t)}\dot{p}_j(t) - \delta_j(t)\Big)\Big).$$

Введем обозначения для темпов изменения (роста, падения) цен:

$$r_j(t) = \frac{1}{p_j(t)}\dot{p}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

На основе весов $\gamma_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, заданных соотношениями (4.3), введем средний темп роста цен

$$r(t) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(t)r_j(t),$$

а также определим среднее значение амортизации

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(t)\delta_j(t).$$

Используя эти обозначения, получаем окончательные соотношения для динамики затрат:

$$\dot{C}(t) = C(t)\big(s(t)A(t) + (r(t) - \delta(t))\big). \tag{6.6}$$

Отметим, что единственное условие для существования решений динамики затрат (6.6), которое надо накладывать на динамику цен $p_j(t)$, коэффициентов амортизации $\delta_j(t)$ и весовых коэффициентов $\gamma_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, — это требование измеримой зависимости от времени t.

Покажем, что для заданных уровней общих инвестиций $s(t)$ динамика факторов производства (6.5) и динамика общих затрат (6.6) однозначным образом определяют структуру инвестиций в производственные факторы $s_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$. Если более точно, то будет справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если уровень общих инвестиций $s(t)$ задан, то структура инвестиций в производственные факторы $s_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, необходимая для поддержания пропорций в динамике модели, пересчитывается согласно соотношениям*

$$s_j(t) = \gamma_j(t)s(t) + \frac{\gamma_j(t)}{A(t)}\big((r(t) - r_j(t)) - (\delta(t) - \delta_j(t))\big) + \frac{1}{A(t)}\dot{\gamma}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Доказательство. Рассмотрим динамику факторов (6.3), из которой следует, что

$$p_j(t)\dot{x}_j(t) = s_j(t)A(t)C(t) - \delta_j(t)\gamma_j(t)C(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.8}$$

Из формулы (4.2) для стоимости факторов производства можно вывести выражения для их темпов роста:

$$p_j(t)\dot{x}_j(t) = \gamma_j(t)\dot{C}(t) + C(t)\dot{\gamma}_j(t) - C(t)\gamma_j(t)r_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.9}$$

Принимая во внимание динамику затрат (6.6), выводим из формулы (6.9) следующее соотношение:

$$p_j(t)\dot{x}_j(t) = \gamma_j(t)C(t)\left((r(t) - \delta(t)) + s(t)A(t)\right) - C(t)\gamma_j(t)r_j(t) + C(t)\dot{\gamma}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.10}$$

Исключая подобные члены в формулах (6.8) и (6.10), получаем требуемые соотношения для структуры инвестиций (6.7) в факторы производства. □

Замечание 1. Отметим, что если полученные уровни инвестиций $s_j(t)$ (6.7) неотрицательны $s_j(t) \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, то эти инвестиции могут быть осуществлены на основе текущего объема выпуска $y(t)$, и в этом смысле их следует назвать *осуществимыми* инвестициями.

Однако возможны и отрицательные знаки в уровнях инвестиций $s_j(t) < 0$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь следует сказать, что в принципе в модели могут быть позволены отрицательные уровни, имея в виду возможность инвестирования в фактор производства x_j не только за счет полученного в текущем периоде продукта $y(t)$, но и за счет использования запасов других производственных факторов x_k, $k = 1, \ldots, n$, $k \neq j$.

Замечание 2. Важно подчеркнуть, что согласно динамике (6.4) траектории факторов производства сохраняют неотрицательные значения $x_j(t) \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, на всем временном интервале $t \in [t_0, T]$ вне зависимости от знаков инвестиций $s_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$.

6.3. Ограничения на инвестиции и потребление

Полагаем, что существует ограничение на нижний уровень c^0 потребления (прожиточный минимум), заданный в процентах от произведенного продукта:

$$0 < c_0 \leq c(t) \leq 1.$$

Из балансового уравнения (5.1) следует, что имеется верхний возможный уровень инвестиций s^0:

$$0 \leq s(t) \leq s^0 < 1, \quad s^0 = 1 - c^0.$$

6.4. Функция полезности

Введем функцию полезности на втором уровне оптимизации для определения качества модельных траекторий. Будем использовать для этой цели интегральный логарифмический индекс дисконтированного потребления, который согласно балансовому уравнению (5.1) и структуре универсальной производственной функции (4.1) может быть представлен соотношениями

$$J = \int_{t_0}^{T} e^{-\rho t} \ln c(t) dt = \int_{t_0}^{T} e^{-\rho t} \big(\ln y(t) + \ln(1 - s(t))\big) dt$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\rho t}\big(\ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s(t))\big)dt.$$

Здесь параметр ρ, $\rho > 0$, задает дисконтную ставку.

7. Задача оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления для инвестиционного процесса на втором уровне оптимизации. В постановке этой задачи в управляемой системе максимизируется функция полезности

$$J(C(\cdot), s(\cdot), T) = \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\rho t}\big(\ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s(t))\big)dt \tag{7.1}$$

на траекториях, порожденных динамикой

$$\dot{C}(t) = C(t)\left(A(t)s(t) - \sigma(t)\right). \tag{7.2}$$

Здесь параметр “обобщенной” амортизации затрат $\sigma = \sigma(t)$ определяется формулой

$$\sigma(t) = \delta(t) - r(t).$$

Управляющий параметр инвестиций удовлетворяет ограничениям

$$0 \le s(t) \le s^0 < 1. \tag{7.3}$$

Фазовая переменная $C(t)$ системы (7.2) удовлетворяет начальным условиям

$$C(t_0) = C_0. \tag{7.4}$$

Отметим, что задача (7.1)–(7.4) является классической задачей оптимального управления как с конечным горизонтом $T < +\infty$, так и с бесконечным горизонтом $T = +\infty$ (см. [7; 8]).

8. Оптимальные решения

В этом разделе мы рассмотрим приложение принципа максимума Понтрягина, снабженного условиями трансверсальности, для решения поставленной задачи оптимального управления.

8.1. Гамильтонианы задач оптимального управления

Начнем решение задачи оптимального управления с составления гамильтониана управляемой системы (7.1)–(7.4):

$$\tilde{H}(t, C(t), s(t), \tilde{\psi}(t)) = e^{-\rho t}\big(\ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s(t))\big) + \tilde{\psi}(t)C(t)\left(s(t)A(t) - \sigma(t)\right).$$

Здесь параметр $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(t)$ используется для сопряженной переменной.

Используя замену для сопряженной переменной

$$\psi(t) = e^{\rho t}\tilde{\psi}(t), \tag{8.1}$$

получаем стационарный (недисконтированный) гамильтониан

$$H(t, C(t), s(t), \psi(t)) = \ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s(t)) + \psi(t)C(t)\left(s(t)A(t) - \sigma(t)\right), \tag{8.2}$$

который связан с исходным гамильтонианом следующим соотношением:

$$\tilde{H}(t, C(t), s(t), \tilde{\psi}(t)) = e^{-\rho t}H(t, C(t), s(t), \psi(t)).$$

Лемма 1. *Гамильтониан* $H(t, C, s, \psi)$ (8.2) *является строго вогнутой функцией по переменным* C *и* s *для всех значений переменных* t *и* ψ.

Доказательство утверждения прямо вытекает из свойства отрицательной определенности матрицы вторых производных гамильтониана (8.2), которое проверяется с помощью критерия Сильвестра по переменным C и s для всех значений переменных t и ψ.

8.2. Принцип максимума Понтрягина

Следует отметить, что для задачи управления (7.1)–(7.4) выполнены условия теоремы существования (см. [8; 11]). Более того, можно сформулировать необходимые условия оптимальности для задач управления с конечным горизонтом [7] и с бесконечным горизонтом [8; 14] в форме принципа максимума Понтрягина.

Теорема 1. *Пусть* (s^*, C^*) *есть оптимальный процесс задачи управления. Тогда существует сопряженная переменная* $\tilde{\psi}$, *соответствующая процессу* (s^*, C^*) *и удовлетворяющая сопряженному уравнению*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial C}(t, C^*(t), s^*(t), \tilde{\psi}(t))$$

такая, что

1) *процесс* (s^*, C^*) *вместе с сопряженной переменной* $\tilde{\psi}$ *удовлетворяют условию принципа максимума Понтрягина*:

$$\tilde{H}(t, C^*, s^*, \tilde{\psi}) = \max\left\{\tilde{H}(t, C^*, s, \tilde{\psi}),\ s \in [0, s^0]\right\};$$

2) *сопряженная переменная* $\tilde{\psi}$ *принимает строго положительные значения*:

$$\tilde{\psi}(t) > 0 \quad \forall t, \quad t_0 \le t < T, \quad T \le +\infty;$$

3) *сопряженная переменная* $\tilde{\psi}$ *удовлетворяет условию трансверсальности для задачи с конечным горизонтом:*

$$\tilde{\psi}(T) = 0,$$

и для задачи с бесконечным горизонтом:

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{\psi}(t) C^*(t) = 0.$$

Замечание 3. Отметим, что для гамильтониана $H(t, C, s, \psi)$ (8.2) динамика сопряженной переменной $\psi(t)$ (8.1) описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{\psi}(t) = \rho\psi(t) - \frac{\partial H}{\partial C}(t, C^*(t), s^*(t), \psi(t)). \tag{8.3}$$

Условие максимума в этом случае имеет вид

$$H(t, C^*, s^*, \tilde{\psi}) = \max\left\{H(t, C^*, s, \tilde{\psi}),\ s \in [0, s^0]\right\}. \tag{8.4}$$

Сопряженная переменная ψ строго положительна:

$$\psi(t) > 0 \quad \forall t, \quad t_0 \le t < T, \quad T \le +\infty.$$

Условие трансверсальности в случае задачи с конечным горизонтом задается соотношением

$$\psi(T) = 0, \tag{8.5}$$

а для задачи с бесконечным горизонтом представляется в виде

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \psi(t) C^*(t) = 0. \tag{8.6}$$

8.3. Максимизированный гамильтониан

Вычислим значения максимизированного гамильтониана задачи оптимального управления (7.1)–(7.4):

$$\bar{H}(t, C(t), \psi(t)) = \max_{0 \le s \le s^0} \hat{H}(t, C(t), s, \psi(t))$$
$$= \ln A(t) + \ln C(t) - \psi(t)C(t)\sigma(t) + \max_{0 \le s \le s^0} \{\ln(1-s) + \psi(t)C(t)A(t)s\}. \tag{8.7}$$

8.4. Структура оптимального управления

Используя необходимые условия оптимальности, можно получить структуру оптимального управления, которая реализует максимум гамильтониана (8.7):

$$s = \begin{cases} 0, & 1 - \dfrac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} < 0; \\ 1 - \dfrac{1}{\psi(t)A(t)C(t)}, & 0 \le 1 - \dfrac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} \le s^0; \\ s^0, & 1 - \dfrac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} > s^0. \end{cases} \tag{8.8}$$

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что благодаря свойству строгой вогнутости гамильтониана $\hat{H}(t, C, s, \psi)$ (8.2) по переменной s, установленному в лемме 1, решение (8.8) необходимых условий оптимальности действительно является единственной точкой максимума.

8.5. Структура максимизированного гамильтониана

Полученные выражения для оптимального управления (8.8) определяют структуру максимизированного гамильтониана, который задается тремя ветвями. Первая ветвь соответствует экстремальному нулевому режиму управления, $s_1 = 0$:

$$\bar{H}_1(t, C(t), \psi(t)) = \ln A(t) + \ln C(t) - \psi(t)C(t)\sigma(t),$$
$$1 - \frac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} < 0.$$

Вторая ветвь соответствует регулярному режиму управления, $s_2 = 1 - 1/(\psi(t)A(t)C(t))$:

$$\bar{H}_2(t, C(t), \psi(t)) = -\ln\psi(t) + \psi(t)C(t)(A(t) - \sigma(t)) - 1,$$
$$0 \le 1 - \frac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} \le s^0.$$

Третья ветвь определяется экстремальным режимом максимально возможного уровня управления, $s_3 = s^0$:

$$\bar{H}_3(t, C(t), \psi(t)) = \ln A(t) + \ln C(t) + \ln(1 - s^0) + \psi(t)C(t)(A(t)s^0 - \sigma(t)),$$
$$1 - \frac{1}{\psi(t)A(t)C(t)} > s^0.$$

Оказывается, для максимизированного гамильтониана $\bar{H}(t, C, \psi)$ (8.7) выполнено свойство вогнутости по переменной C, которое устанавливается в следующем утверждении.

Лемма 2. *Максимизированный гамильтониан* $\bar{H}(t, C, \psi)$ (8.7) *является вогнутой функцией по переменной* C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Результат леммы 2 можно получить из того факта, что все три ветки $\bar{H}_i(t, C, \psi)$, $i = 1, 2, 3$, являются вогнутыми функциями по переменной C, которые гладким образом (с непрерывными производными) склеиваются вместе, порождая максимизированный гамильтониан $\bar{H}(t, C, \psi)$ для всех фиксированных значений переменных t и ψ.

8.6. Гамильтоновы системы

Согласно структуре максимизированного гамильтониана $\bar{H}(t, C, \psi)$ (8.7) можно построить серию из трех гамильтоновых систем, $i = 1, 2, 3$, определяемых условиями (8.3), (8.4) принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{cases} \dot{C}(t) = C(t)\left(A(t)s_i(t) - \sigma(t)\right), \\ \dot{\psi}(t) = \rho\psi(t) - \dfrac{\partial H_i}{\partial C}(t, C(t), \psi(t)). \end{cases} \tag{8.9}$$

Здесь производные максимизированного гамильтониана $\bar{H}(t, C, \psi)$ (8.7) вычисляются в соответствии с его ветвями, $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial \bar{H}_i}{\partial C}(t, C(t), \psi(t)) = \begin{cases} \dfrac{1}{C(t)} - \sigma(t)\psi(t), & i = 1, \\ (A(t) - \sigma(t))\psi(t), & i = 2, \\ \dfrac{1}{C(t)} + (A(t)s^0 - \sigma(t))\psi(t), & i = 3. \end{cases} \tag{8.10}$$

8.7. Анализ гамильтоновых систем

Введем новую переменную $x = x(t)$ для обозначения *обобщенных* затрат производственных факторов в принципе максимума Понтрягина:

$$x = x(t) = C(t)\psi(t).$$

Можно вывести уравнение гамильтоновой динамики для обобщенных затрат $x(t)$.

Предложение 2. *Согласно гамильтоновой динамике* (8.9) *обобщенные затраты* $x(t)$ *удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:*

$$\dot{x}(t) = \rho x(t) - 1. \tag{8.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения прямо вытекает из того факта, что согласно соотношениям (8.10) для всех ветвей гамильтоновой динамики, $i = 1, 2, 3$, имеется следующая цепочка равенств:

$$\dot{x}(t) = \dot{C}(t)\psi(t) + C(t)\dot{\psi}(t) = (\rho - \sigma(t) + A(t)s_i(t))C(t)\psi(t) - C(t)\frac{\partial H_i}{\partial C}(t, C(t), \psi(t)) = \rho x(t) - 1.$$

□

Выводится также общее решение уравнения динамики (8.11) обобщенных затрат.

Предложение 3. *Общее решение для обобщенных затрат, подчиняющихся гамильтоновой динамике* (8.9)*, представляется соотношением*

$$x(t) = \frac{1}{\rho} + Be^{\rho t}.$$

Здесь символом B обозначена константа, значение которой может быть определено либо из условий трансверсальности (8.5) *для задачи с конечным горизонтом $B = -\dfrac{e^{-\rho T}}{\rho}$, либо из условий трансверсальности* (8.6) *для задачи с бесконечным горизонтом $B = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения вытекает из формулы Коши для дифференциального уравнения (8.11).

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что решение уравнения гамильтоновой динамики (8.9) для обобщенных затрат в случае задачи с конечным горизонтом описывается соотношением

$$x(t) = \frac{1}{\rho}\left(1 - e^{\rho(t-T)}\right), \tag{8.12}$$

а в случае задачи с бесконечным горизонтом определяется формулой

$$x(t) = \frac{1}{\rho}. \tag{8.13}$$

8.8. Оптимальное управление

Получим здесь аналитические соотношения для оптимального программного управления. Для того чтобы сделать это, необходимо подставить решения (8.12), (8.13) уравнения гамильтоновой динамики (8.9) в структуру оптимального управления (8.8).

Для случая задачи с конечным горизонтом оптимальное программное управление задается в виде

$$s^*(t) = \begin{cases} 0, & 1 - \dfrac{\rho}{A(t)(1 - e^{\rho(t-T)})} < 0; \\ 1 - \dfrac{\rho}{A(t)(1 - e^{\rho(t-T)})}, & 0 \le 1 - \dfrac{\rho}{A(t)(1 - e^{\rho(t-T)})} \le s^0; \\ s^0, & 1 - \dfrac{\rho}{A(t)(1 - e^{\rho(t-T)})} > s^0. \end{cases} \tag{8.14}$$

Для случая задачи с бесконечным горизонтом оптимальное программное управление описывается соотношениями

$$s^*(t) = \begin{cases} 0, & 1 - \dfrac{\rho}{A(t)} < 0; \\ 1 - \dfrac{\rho}{A(t)}, & 0 \le 1 - \dfrac{\rho}{A(t)} \le s^0; \\ s^0, & 1 - \dfrac{\rho}{A(t)} > s^0. \end{cases} \tag{8.15}$$

Отметим, что, получив оптимальные инвестиции $s^*(t)$, можно выполнить обратный ход от второго уровня оптимизации к первому уровню и определить структуру оптимальных уровней инвестиций $s_j^*(t)$ в факторы производства согласно условиям пропорциональности. Более точно можно сформулировать следующий результат.

Предложение 4. *Если оптимальные инвестиции* $s^* = s^*(t)$ *определены либо соотношением* (8.14) *для задачи с конечным горизонтом, либо соотношением* (8.15) *для задачи с бесконечным горизонтом, то оптимальные инвестиции* $s_j^*(t)$ *в производственные факторы, которые поддерживают пропорциональное развитие системы, пересчитываются по формулам* (6.7) *в следующем виде*:

$$s_j^*(t) = \gamma_j(t)s^*(t) + \frac{\gamma_j(t)}{A(t)}\left((r(t) - r_j(t)) - (\delta(t) - \delta_j(t))\right) + \frac{1}{A(t)}\dot{\gamma}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Сделаем важное наблюдение о структуре оптимального управления (8.14) для задачи с конечным горизонтом.

З а м е ч а н и е 6. Если коэффициент масштаба $A = A(t)$ (4.1) в универсальной производственной функции удовлетворяет свойству ограниченности в задаче с конечным горизонтом T :

$$0 < A(t) \le A^0, \quad t_0 \le t \le T,$$

то существует непустой интервал времени

$$T - \frac{1}{\rho} \ln \Big(\frac{A^0}{A^0 - \rho} \Big) \leq t \leq T,$$

на котором оптимальные инвестиции $s^*(t)$ принимают нулевые значения

$$s^*(t) \equiv 0.$$

Это означает, что в задачах с конечным горизонтом оптимальные инвестиции неизбежно вырождаются в нулевые уровни, а произведенный продукт должен быть полностью потреблен, $y(t) = \c{C}(t)$, на некотором интервале времени, близком к моменту окончания T процесса управления.

8.9. Достаточные условия оптимальности в принципе максимума

Сформулируем результат, который обеспечивает достаточные условия оптимальности для траекторий, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина.

Предложение 5. *Благодаря свойству вогнутости максимизированного гамильтониана* $\bar{H}(t, C, \psi)$ (8.7) *по переменной C, полученному в лемме, принцип максимума Понтрягина выделяет траектории, являющиеся оптимальными для задачи управления* (7.1)–(7.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. этого утверждения проводится аналогично рассуждениям, предложенным в работе [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arrow K.J.** Production and capital. Collected papers. Cambridge; Massachusetts; London: The Belknap Press of Harvard University Press, 1985. Vol. 5. 496 p.
2. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. New York: McGraw-Hill, 1995. 672 p.
3. **Grossman G.M., Helpman E.** Innovation and growth in the global economy. Cambridge; Massachusetts: MIT Press, 1991. 359 p.
4. **Shell K.** Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Mathematical Systems Theory and Economics. Berlin: Springer Verlag, 1969. Vol. 1. P. 241–292.
5. **Solow R.M.** Growth theory: An Exposition. New York: Oxford Univ. Press, 1970. 109 p.
6. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2002. 553 с.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
8. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
9. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B: Applications & Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1-2. P. 43–63.
10. **Nikol'skii M.S.** Investigation of the continuity and Lipschitz properties for the Bellman function in some optimization problems on the semi-infinite interval $[0, +\infty)$ // Diff. Eq. 2002. Vol. 38, no. 11. P. 1599–1604.
11. **Balder E.J.** An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 95. P. 195–213.
12. **Tarasyev A.M., Watanabe C.** Optimal dynamics of innovation in models of economic growth // J. Math. Anal. Appl. 2001. Vol. 108. P. 175–203.
13. **Kryazhimskiy A.V., Watanabe C.** Optimization of technological growth. Kanagawa: GENDAITOSHO, 2004. 392 p.
14. **Красовский А.А., Тарасьев А.М.** Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 127–145.

15. **Krasovskii A.A., Tarasyev A.M.** An algorithm for construction of optimal timing solutions in problems with a stochastic payoff function // Appl. Math. Comput. 2008. Vol. 204, iss. 2. P. 632–643.
16. **Krasovskii A.A., Kryazhimskiy A.V., Tarasyev A.M.** Optimal control design in models of economic growth // Evolutionary methods for design, optimization and control / eds. P. Neittaanmaki, J. Periaux, T. Tuovinen. Barcelona: CIMNE, 2008. P. 70–75.
17. **Crespo Cuaresma J., Palokangas T., Tarasyev A.** Dynamic systems, economic growth and the environment. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2010. 289 p. (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance.)
18. **Crespo Cuaresma J., Palokangas T., Tarasyev A.** Green growth and sustainable development. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2013. 226 p. (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance.)
19. **Тарасьев А.М., Усова А.А.** Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных траекторий // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 257–274.
20. Построение оптимальных траекторий интегрированием гамильтоновой динамики в моделях экономического роста при ресурсных ограничениях / А.М. Тарасьев, А.А. Усова, О.В. Русских, В. Ванг // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 258–276.
21. **Tarasyev A.M., Usova A.A., Shmotina Yu.V.** Projection of the Russian economic development in the framework of the optimal control model by investments in fixed assets // Economy of Region. 2014. No. 3. P. 265–273.
22. Dynamic structure, exogeneity, phase portraits, growth paths, and scale and substitution elasticities / B.S. Jensen, P.K. Alsholm, M.E. Larsen, J.M. Jensen // Review of International Economics. 2005. Vol. 13, no. 1. P. 59–89.
23. **Hofbauer J., Sigmund K.** The theory of evolution and dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 341 p.
24. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О дифференциально-эволюционных играх // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
25. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

Кряжимский Аркадий Викторович
Поступила 16.02.15
академик РАН
главный научный сотрудник
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)

Тарасьев Александр Михайлович
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)
e-mail: tam@imm.uran.ru, tarasiev@iiasa.ac.at