

УДК 517.977

К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ ДИНАМИКИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ¹

Е. А. Крупенников

В данной работе описывается метод восстановления динамики и управлений для одного класса нелинейных управляемых систем по известным неточным замерам траектории движения. Предлагаемый метод опирается на принцип максимума Понтрягина и метод регуляризации Тихонова. Приводится его обоснование.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

E. A. Krupennikov. Validation of a solution method for the problem of reconstructing the dynamics of a macroeconomic system.

For a class of nonlinear control systems, we describe a method for the reconstruction of the dynamics and controls from known inaccurate measurements of state trajectories. The method is based on Pontryagin's maximum principle and Tikhonov's regularization method. A validation of the method is provided.

Keywords: dynamic reconstruction, optimal control, Pontryagin's maximum principle.

Введение

Задачи реконструкции динамики и управлений по истории неточных замеров траектории движения управляемых систем исследовались многими авторами. Наиболее близким к методу, обсуждаемому в данной работе, является подход, предложенный и развитый Ю. С. Осиповым и его учениками [1] и опирающийся на метод регуляризации Тихонова [2] и метод экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [3].

В работе [4] предложен другой метод решения этой задачи, базирующийся на необходимых условиях оптимальности во вспомогательной задаче оптимального управления с интегральным функционалом регуляризованной невязки [5] и методе характеристик [6] для соответствующего уравнения Беллмана. В статье [4] предлагается в качестве решения задачи реконструкции использовать решение вспомогательной задачи оптимального управления со свободным правым концом и фазовым ограничением, состоящим в принадлежности правых концов фазовых траекторий множеству фазовых состояний, совместимых с точностью измерений.

В настоящей работе обсуждается одна из возможных модификаций этого метода. В отличие от [4] в данной статье вспомогательная задача оптимального управления имеет целевое множество, состоящее из финальной точки замеров, в которую нужно перевести фазовые траектории из произвольной начальной точки, минимизируя интегральный функционал регуляризованной невязки. При этом исследуется один нелинейный подкласс управляемых систем из [4]. Приводится теоретическое обоснование сходимости предложенного алгоритма решения задачи реконструкции.

Представлены также результаты численного решения задачи реконструкции динамики и управлений для модели макроэкономической системы.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00168).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу реконструкции динамики и управлений системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= g_i(x(t))u_i(t), \\ x(t) &\in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где управления u_i удовлетворяют ограничениям

$$-\infty < \underline{U}_i \leq u_i(t) \leq \bar{U}_i < \infty, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Реконструкция производится при известной дискретной истории замеров $\{y_\delta(t_i) = y_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N, t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$ базовой траектории $x^*(t)$. Замеры определяют $x^*(t_i)$ с относительной точностью δ .

Предполагается, что для рассматриваемых входных данных задачи реконструкции выполняются следующие условия.

A1. Функции $g_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывно дифференцируемы в \mathbb{R}^n .

A2. Существуют такое число $a > 0$ и такие константы $\underline{\omega}_i, \bar{\omega}_i$, $i = 1, \dots, n$, что при $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$0 < \underline{\omega}_i^2 < g_i(x)^2 < \bar{\omega}_i^2, \quad (t, x) \in \Psi = \{t \in [0, T], |x - x^*(t)| \leq a\}.$$

Под задачей динамической реконструкции понимается построение управления $u(t) = u_\delta(t)$, удовлетворяющего ограничениям (1.2), такого, что оно и порождаемая им траектория $x(t) = x_\delta(t)$ системы (1.1) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \|x_\delta(t) - x^*(t)\|_C &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta(t) - u^*(t)\|_{L_2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где символ $\|\cdot\|$ здесь и далее обозначает евклидову норму, а $u^*(t)$ — нормальное управление — измеримая функция, удовлетворяющая ограничениям (1.2) и порождающая $x^*(t)$ и при этом имеющая минимальную норму в L_2 . Заметим, что при сделанных предположениях нормальное управление единственно в L_2 (см. [4]).

Введем функцию $y(t) = y_\delta(t)$, интерполирующую известные замеры. Вопрос выбора конкретного метода интерполяции в данной работе не рассматривается, но предполагается, что функции $y_\delta(t)$ должны быть непрерывно дифференцируемы, а их производные равномерно ограничены относительно точности измерений δ , причем существует такое δ_0 , $0 < \delta_0 \leq a$ (где a — константа из предположения **A2**), что

$$\begin{aligned} \left| \frac{dy_{\delta,i}(t)}{dt} \right| &\leq \bar{Y}, \quad \delta \in (0, \delta_0], \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n, \\ \bar{Y} &= 2 \max_{i=1, \dots, n} \{\bar{\omega}_i \max\{|\underline{U}_i|, |\bar{U}_i|\}\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Это ограничение взято из тех соображений, что согласно (1.1), (1.2) и предположениям **A1**, **A2** в области Ψ , построенной в предположении **A2**, скорости $\dot{x}_i^*(t)$ ограничены, и будет естественным рассматривать лишь те интерполяции, скорости $\dot{y}_i(t)$ которых ограничены.

Будем также считать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|y_\delta(t) - x^*(t)\|_C = 0. \quad (1.5)$$

2. Алгоритм решения задачи реконструкции

Предлагается следующий алгоритм решения поставленной задачи реконструкции. Введем интегральный функционал невязки вида

$$I(x(t), u(t)) = \int_0^T \left(-\frac{\|x(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u(t)\|^2}{2} \right) dt, \quad (2.1)$$

где α — малый регуляризирующий параметр.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления о переводе траектории $x(\cdot)$ системы (1.1) из точки $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 < T$, в заданный конечный момент времени T на целевую точку $y(T)$ с условием минимизации функционала (2.1). Введем также дополнительное условие, ограничивающее скорость $\dot{x}(t)$ в конечной точке, — пусть

$$\|\dot{x}(T) - \dot{y}(T)\| \leq \delta. \quad (2.2)$$

Выберем такие решения вспомогательной задачи оптимального управления, удовлетворяющие условию (2.2), для которых соответствующие им управления $u_i(t)$ не выходят на ограничения (1.2). Из выбранных таким образом решений выберем далее те, которые выходят в начальный момент времени $t_0 = 0$ из области

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [y_i(0) - \delta, y_i(0) + \delta], i = 1, \dots, n\}, \quad (2.3)$$

и будем искать среди них то, которое будет доставлять наименьшее значение функционалу (2.1). Полученную траекторию и порождающее ее управление будем считать решением задачи реконструкции. Заметим, что такое решение, вообще говоря, не единственно.

Рассмотрим теперь подробнее процесс построения решения вспомогательной задачи оптимального управления. Для решения вспомогательной задачи оптимального управления воспользуемся принципом максимума Понтрягина в гамильтоновой форме.

Определим гамильтониан для задачи (1.1), (1.2), (2.1) следующим образом:

$$H^\alpha(x, s, t) = \min_{\bar{U}_i \leq u_i \leq U_i} \left[\sum_{i=1, \dots, n} [g_i(x(t)) s_i u_i] - \frac{\|x(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u\|^2}{2} \right],$$

где $s \in \mathbb{R}^n$ — сопряженная переменная. Нетрудно проверить, что

$$H^\alpha(x, s, t) = \sum_{i=1, \dots, n} [g_i(x(t)) s_i u_{\alpha i}] - \frac{\|x(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u_\alpha\|^2}{2},$$

где

$$u_{\alpha i} = \begin{cases} U_i, & \text{если } -\frac{s_i g_i(x(t))}{\alpha^2} < U_i, \\ -\frac{s_i g_i(x(t))}{\alpha^2}, & \text{если } -\frac{s_i g_i(x(t))}{\alpha^2} \in [U_i, \bar{U}_i], \\ \bar{U}_i, & \text{если } -\frac{s_i g_i(x(t))}{\alpha^2} > \bar{U}_i. \end{cases} \quad (2.4)$$

Характеристическая система уравнений для задачи (1.1), (1.2), (2.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= \frac{\partial H^\alpha(x(t), s(t), t)}{\partial s_i(t)} = g_i(x(t)) u_i^\alpha, \\ \frac{ds_i(t)}{dt} &= -\frac{\partial H^\alpha(x(t), s(t), t)}{\partial x_i(t)} = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} s_j(t) u_j^\alpha + x_i(t) - y_i(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$i = 1, \dots, n$.

Согласно предложенному алгоритму построим в обратном времени пучок траекторий системы (2.5) со следующими краевыми условиями:

$$x_i(T) = y_i(T), \quad s_i(T) = \xi_{k,i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Эти траектории совпадают с экстремальями и коэкстремальями принципа максимума Понтрягина [6]. В качестве векторов ξ_k берутся точки из компакта

$$S_\delta = \{s \in \mathbb{R}^n : s_i^- \leq s_i \leq s_i^+, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} s_i^- &= -\frac{\dot{y}_i(T)\alpha^2}{g_i(y(T))^2} - \frac{\delta\alpha^2}{g_i(y(T))^2}, \\ s_i^+ &= -\frac{\dot{y}_i(T)\alpha^2}{g_i(y(T))^2} + \frac{\delta\alpha^2}{g_i(y(T))^2}, \\ & i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Границы s_i^- и s_i^+ выбраны таким образом, чтобы в конечный момент времени выполнялись условия (2.2).

В качестве замечания к алгоритму введем следующее предположение касательно управлений и траекторий системы (1.1).

А3. Графики фазовых характеристик $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, решений характеристической системы (2.5) с краевыми условиями (2.6)–(2.8) содержатся при $t \in [0, T]$ в некотором компакте Φ , и пусть существуют такие числа b , $0 < b \leq \delta_0$ (где δ_0 — из (1.4)) и $\delta_1 > 0$, что

$$\Phi \supset \Phi(\delta, \alpha) \quad \forall \delta, \alpha, \quad 0 < \delta \leq \delta_1, \quad 0 < \alpha \leq b,$$

$$\Phi(\delta, \alpha) = \left\{ (t, x) : t \in [0, T], \quad x = x_{\alpha, \delta}(t), \quad x_{\alpha, \delta}(T) = y(T), \quad \dot{x}_{\alpha, \delta}(T) \in B_\delta \dot{y}(T) \right\},$$

где $x_{\alpha, \delta}(t)$ — решения системы (2.5) при конечных условиях (2.6)–(2.8) и фиксированных параметрах α и δ , $B_\delta z$ — шар в \mathbb{R}^n радиуса δ с центром в точке $z \in \mathbb{R}^n$.

Как отмечалось выше, для построения решения задачи реконструкции из пучка построенных характеристик (2.5)–(2.8) выберем те, для которых соответствующие управления $u_i(t)$ не выходят на ограничения (1.2). Из оставшихся характеристик выберем, наконец, такие, для которых фазовые компоненты $x(\cdot)$ в начальный момент времени попадают в область (2.3), и среди них выберем такую, которая вкупе с соответствующим ей управлением будет доставлять минимум функционалу (2.1). Если несколько характеристик и соответствующих им управлений минимизируют функционал невязки, выберем из них одну произвольным образом.

Покажем, что выбранные таким образом траектории и управления будут решать поставленную задачу реконструкции при определенных условиях согласования параметров $\delta > 0$ и $\alpha > 0$.

3. Доказательство сходимости алгоритма

Для упрощения описания используемых конструкций сразу рассмотрим ситуацию, когда замеры $y(t)$ и ограничения на управления (1.2) таковы, что при достаточно малых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ для характеристик $x(\cdot)$ системы (2.5) при конечных условиях (2.6)–(2.8), в начальный момент времени попадающих в область (2.3), порождающие их управления $u_\alpha(\cdot)$ (2.4) не будут выходить на эти ограничения. Характеристическая система (2.5) в этом случае будет иметь упрощенный вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= -\frac{g_i^2(x(t))s_i(t)}{\alpha^2}, \\ \frac{ds_i(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} \frac{s_j^2(t)g_j(x(t))}{\alpha^2} + x_i(t) - y_i(t), \\ & i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.1)$$

с краевыми условиями (2.6)–(2.8).

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма. *Если при выполнении предположений **A1–A3** существует такая константа $\infty > R > 0$, что для любых δ и α , $\delta < \alpha \leq b$ (где b — константа из предположения **A3**), для решений системы (3.1) с краевыми условиями (2.6) на отрезке $[t_0, T]$, $t_0 \geq 0$, выполняются неравенства*

$$|s_i(t)| \leq \alpha^2 R, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

то существуют такая независимая от параметров δ и α константа \bar{S} и такие ограниченные функции $\bar{x}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{s}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{s}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, что на этом отрезке имеют место следующие оценки для решений системы (3.1):

$$\begin{aligned} \alpha^2 \underline{x}_i(t) + y_i(t) &\leq x_i(t) \leq \alpha^2 \bar{x}_i(t) + y_i(t), \\ \alpha^3 \underline{s}_i(t) - \alpha^2 \bar{S} &\leq s_i(t) \leq \alpha^3 \bar{s}_i(t) + \alpha^2 \bar{S}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Из предположений **A1–A3** вытекает, что будет существовать непрерывное решение системы (3.1). Тогда можно разбить рассматриваемый временной промежуток $[t_0, T]$ на такие отрезки $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, что на каждом интервале (τ_{i-1}, τ_i) каждая функция $s_i(t)$ будет знакоопределенна или равна нулю. Если какой-то из таких отрезков длиннее чем α , то такой отрезок разбивается на несколько отрезков, каждый из которых имеет длину не больше α .

Заметим, что для дифференцируемой функции может иметься не более чем счетное число точек сгущения нулей функции — таких точек t_s , что для любого $\epsilon > 0$ найдется хотя бы один отрезок $[\tau_{s-1}, \tau_s] \in (t_s - \epsilon, t_s + \epsilon)$ [7]. Рассмотрим последовательно точки сгущения, начиная с конца. Для первой такой точки в качестве рассматриваемого отрезка примем отрезок, являющийся объединением $\cup\{[\tau_{j-1}, \tau_j] \in [t_s - \alpha^3, t_s + \alpha^3]\}$. Для определенности будем называть построенные таким образом отрезки отрезками сгущения. Далее рассмотрим следующую точку сгущения, лежащую вне построенного отрезка сгущения, построив для нее соответствующий отрезок сгущения. Если он пересекается с предыдущим отрезком сгущения, то исключим из нового отрезка область взаимопересечения (за исключением краевой точки).

Таким образом, окончательное число рассматриваемых отрезков будет конечно при фиксированных параметрах α и δ :

$$\begin{aligned} [0, T] &= \cup\{[\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i = 1, \dots, M, \quad M \in \mathbb{N}, \quad \tau_i - \tau_{i-1} \leq \alpha, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_M = T, \\ &\text{если } [\tau_{i-1}, \tau_i] \text{ не отрезок сгущения, то} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{либо } s_j(t) < 0, \text{ либо } s_j(t) > 0, \text{ либо } s_j(t) \equiv 0, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \quad j = 1, \dots, n\};$$

$$\text{если } [\tau_{i-1}, \tau_i] \text{ — отрезок сгущения, то } \tau_i - \tau_{i-1} \leq 2\alpha^3 = 2\epsilon.$$

Рассмотрим последний такой отрезок $[\tau_{M-1}, \tau_M]$. Рассмотрим случай, когда знаки функций $s_j(t)$ распределяются следующим образом:

$$s_j(t) < 0, \quad t \in (\tau_{M-1}, \tau_M), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Для начала заметим, что в силу предположений **A1–A3** существует такая константа $0 \leq R_g < \infty$, что

$$\left| \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} \right| \leq R_g, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

В таком случае нелинейные составляющие в правой части системы (3.1) при условии (3.2) можно оценить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} \frac{s_j^2(t) g_j(x(t))}{\alpha^2} \leq \alpha^2 \bar{R}, \quad \text{где } \bar{R} = \sum_{j=1}^n R_g R^2 \bar{\omega}_i. \quad (3.7)$$

Введем в рассмотрение оценочную систему

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i(t)}{dt} &= -\frac{\bar{\omega}_{i,M} \bar{s}_i(t)}{\alpha^2}, \\ \frac{d\bar{s}_i(t)}{dt} &= \alpha^2 \bar{R} + \bar{x}_i(t) - y_i(t), \\ & i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.8)$$

с краевыми условиями

$$\bar{x}_i(T) = x_i(T), \quad \bar{s}_i(T) = s_i(T), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

где

$$\bar{\omega}_{i,M} = \max_{t \in [\tau_{M-1}, \tau_M]} |g_i(x(t))|. \quad (3.10)$$

Покажем, что выполняются неравенства

$$x_i(t) - \bar{x}_i(t) > 0, \quad s_i(t) - \bar{s}_i(t) > 0, \quad t \in [\tau_{M-1}, \tau_M), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Для начала заметим, что в конечный момент времени в силу краевых условий (3.9), определения (3.10) и оценки (3.7) будут выполняться неравенства $\dot{\bar{x}}_i(T) > \dot{x}_i(T)$, $\dot{\bar{s}}_i(T) > \dot{s}_i(T)$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i(T) &= -\frac{\bar{\omega}_{i,M} \bar{s}_i(T)}{\alpha^2} \geq -\frac{g_i(x(T)) \bar{s}_i(T)}{\alpha^2} = -\frac{g_i(x(T)) s_i(T)}{\alpha^2} = \dot{x}_i(T), \\ \dot{\bar{s}}_i(T) &= \alpha^2 \bar{R} + \bar{x}_i(T) - y_i(T) \geq \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_i(t)} \frac{s_j^2(t) g_j(x(t))}{\alpha^2} + x_i(T) - y_i(T) = \dot{s}_i(T). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Неравенства в выкладках (3.12) выполняются в силу того, что по нашему предположению о распределении знаков функций $s_i(t)$ (3.5) на рассматриваемом отрезке $s_i(T) \leq 0$.

Отразим тот факт, что в силу (3.12), (3.9) и непрерывности функций $x_i(t)$, $\bar{x}_i(t)$, $s_i(t)$, $\bar{s}_i(t)$ существует $\tau' \in [\tau_{M-1}, \tau_M)$ такой, что

$$x_i(t) - \bar{x}_i(t) > 0, \quad t \in (\tau', T), \quad s_i(t) - \bar{s}_i(t) > 0, \quad t \in (\tau', T), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Далее проведем доказательство от противного. Предположим, что в некоторой точке отрезка $[\tau_{M-1}, \tau_M]$ нарушается вторая группа неравенств из (3.11). Тогда из (3.13) и непрерывности решений будет следовать, что найдутся такая точка $\tau \in [\tau_{M-1}, \tau']$ и такой индекс k , что

$$s_k(\tau) - \bar{s}_k(\tau) = 0, \quad (3.14)$$

$$s_k(t) - \bar{s}_k(t) > 0, \quad t \in (\tau, T). \quad (3.15)$$

Распишем выражение (3.14) с помощью интегралов и используя выражения производных из (3.1) и (3.8):

$$\begin{aligned} 0 &= s_k(\tau) - \bar{s}_k(\tau) = \left(s_k(T) - \int_{\tau}^T \dot{s}_k(t) dt \right) - \left(\bar{s}_k(T) - \int_{\tau}^T \dot{\bar{s}}_k(t) dt \right) \\ &= \int_{\tau}^T \bar{x}_k(t) - x_k(t) dt + \int_{\tau}^T - \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_k(t)} \frac{s_j^2(t) g_j(x(t))}{\alpha^2} - \alpha^2 \bar{R} dt. \end{aligned}$$

Согласно (3.7) второе слагаемое в последнем выражении $\left(\int_{\tau}^T - \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial x_k(t)} \frac{s_j^2(t) g_j(x(t))}{\alpha^2} - \alpha^2 \bar{R} dt \right)$ будет отрицательным, а значит, первое слагаемое будет положительным. Распишем его подробнее:

$$0 < \int_{\tau}^T \bar{x}_k(t) - x_k(t) dt = \int_{\tau}^{\tau'} \bar{x}_k(t) - x_k(t) dt + \int_{\tau'}^T \bar{x}_k(t) - x_k(t) dt. \quad (3.16)$$

Из (3.13) следует, что второе слагаемое в выражении (3.16) отрицательно. Из этого, в свою очередь, вытекает, что первое слагаемое должно быть положительным для выполнения неравенства (3.16). Для того чтобы интеграл был положительным, необходимо наличие такого множества точек ненулевой меры, что на них подынтегральное выражение положительно. Это означает, что $\exists \tau'' \in [\tau, \tau']$ такое, что $\bar{x}_k(\tau'') - x_k(\tau'') > 0$. Распишем это выражение по такому же принципу, как мы расписали (3.14):

$$\begin{aligned} 0 < \bar{x}_k(\tau'') - x_k(\tau'') &= (\bar{x}_k(T) - \int_{\tau''}^T \dot{\bar{x}}_k(t) dt) - (x_k(T) - \int_{\tau''}^T \dot{x}_k(t) dt) \\ &= \int_{\tau''}^T \frac{\bar{\omega}_{k,M} \bar{s}_k(t)}{\alpha^2} - \frac{g_k^2(x(t)) s_k(t)}{\alpha^2} dt \\ &= \int_{\tau''}^{\tau'} \frac{\bar{\omega}_{k,M} \bar{s}_k(t)}{\alpha^2} - \frac{g_k^2(x(t)) s_k(t)}{\alpha^2} dt + \int_{\tau'}^T \frac{\bar{\omega}_{k,M} \bar{s}_k(t)}{\alpha^2} - \frac{g_k^2(x(t)) s_k(t)}{\alpha^2} dt. \end{aligned}$$

Из определения (3.10) и (3.13) следует, что второе слагаемое в последнем выражении (интеграл $\int_{\tau'}^T \frac{\bar{\omega}_{k,M} \bar{s}_k(t)}{\alpha^2} - \frac{g_k^2(x(t)) s_k(t)}{\alpha^2} dt$) отрицательно. Подобно тому, как это было проделано для выражения (3.16), можно показать, что в данном случае найдется такое $\tau''' \in [\tau'', \tau']$, что

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\omega}_{k,M} \bar{s}_k(\tau''')}{\alpha^2} - \frac{g_k^2(x(\tau''')) s_k(\tau''')}{\alpha^2} &> 0, \\ \bar{s}_k(\tau''') > \frac{g_k^2(x(\tau'''))}{\bar{\omega}_{k,M}} s_k(\tau''') &> s_k(\tau'''). \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из отрицательности функции $s_k(t)$ на рассматриваемом промежутке времени и определения (3.10). Для пояснения схемы доказательства выпишем относительное расположение следующих точек:

$$\tau_{M-1} \leq \tau \leq \tau'' \leq \tau''' \leq \tau' < \tau_M.$$

Итак, мы получили для некоторого $\tau''' \in [\tau, \tau']$, что $s_k(\tau''') - \bar{s}_k(\tau''') < 0$, а это противоречит неравенству (3.15). Это означает, что вторая группа неравенств (3.11) не нарушается на рассматриваемом промежутке времени $[\tau_{M-1}, T]$. Из этого факта и из определения (3.10) следует, что $\dot{\bar{x}}_i(t) > \dot{x}_i(t)$, $t \in [\tau_{M-1}, \tau_M]$. Но тогда в силу непрерывности функций $x_i(t)$ и $\bar{x}_i(t)$ и краевых условий (3.9) следует выполнение первой группы неравенств (3.11).

Таким образом, мы доказали неравенства (3.11).

Решения оценочной системы (3.8) для краевых условий, эквивалентных условиям (2.6), можно записать аналитически. Опустив за тривиальностью процесс их нахождения, можно сказать, что существуют такие функции $A_{i,1}(\cdot): [0, T] \rightarrow R$, $A_{i,2}(\cdot): [0, T] \rightarrow R$, что

$$\begin{aligned} |A_{i,1}(t)| &\leq \frac{\bar{Y}}{1 - \alpha^2}, \quad t \in [0, T], \\ |A_{i,2}(t)| &\leq \frac{\bar{Y}}{1 - \alpha^2}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где \bar{Y} — константа из условия (1.4), и такие, что вышеупомянутые решения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(t) &= -\bar{\omega}_{i,M} \frac{\xi_i + \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2} \dot{y}(T) - \frac{\alpha^4}{\bar{\omega}_{i,M}^2} A_{i,2}(T)}{\alpha} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\right) \\ &+ (\alpha^2 \bar{R} - \alpha^2 A_{i,1}(T)) \cos\left(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\right) - \alpha^2 \bar{R} + y_i(t) + \alpha^2 A_{i,1}(t), \\ \bar{s}_i(t) &= \left(\xi_i + \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2} \dot{y}(T) - \frac{\alpha^4}{\bar{\omega}_{i,M}^2} A_{i,2}(T)\right) \cos\left(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\right) \\ &+ \frac{\alpha^3 \bar{R} - \alpha^3 A_{i,1}(T)}{\bar{\omega}_{i,M}} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\right) - \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2} \dot{y}_i(t) + \frac{\alpha^4}{\bar{\omega}_{i,M}^2} A_{i,2}(t). \end{aligned}$$

Из (3.6) следует

$$\begin{aligned} |\bar{\omega}_{i,M} - g_i(x(t))| &\leq \alpha R_g, \quad t \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \quad i = 1, \dots, n, \\ \left| \xi_i + \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2} \dot{y}(T) \right| &= \left| -\frac{\alpha^2}{g_i^2(x(T))} \dot{y}(T) + \frac{\theta \delta \alpha^2}{g_i(x(T))^2} + \frac{\alpha^2}{\bar{\omega}_{i,M}^2} \dot{y}(T) \right| \\ &= \left| \alpha^2 \dot{y}(T) \frac{(\bar{\omega}_{i,M} - g_i(x(T)))(\bar{\omega}_{i,M} + g_i(x(T)))}{g_i^2(T) \bar{\omega}_{i,M}^2} + \frac{\theta \delta \alpha^2}{g_i(x(T))^2} \right| \\ &\leq \left| \alpha^2 \dot{y}(T) \frac{\alpha R_g (|\bar{\omega}_{i,M}| + \bar{\omega}_i)}{\bar{\omega}_i^2 \bar{\omega}_{i,M}^2} + \frac{\theta \delta \alpha^2}{\bar{\omega}_i^2} \right|, \end{aligned}$$

где $\theta \in [0, 1]$. При условии согласования параметров $\delta < \alpha$

$$\left| \alpha^2 \dot{y}(T) \frac{\alpha R_g (|\bar{\omega}_{i,M}| + \bar{\omega}_i)}{\bar{\omega}_i^2 \bar{\omega}_{i,M}^2} + \frac{\theta \delta \alpha^2}{\bar{\omega}_i^2} \right| \leq \alpha^3 R_{\xi, i, M},$$

где константа $R_{\xi, i, M} = \left| \dot{y}(T) \frac{R_g (|\bar{\omega}_{i,M}| + \bar{\omega}_i)}{\bar{\omega}_i^2 \bar{\omega}_{i,M}^2} + \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} \right|$. Тогда в качестве функций $\bar{x}_i(t)$ и $\bar{s}_i(t)$ из (3.3) на отрезке времени $[\tau_{M-1}, \tau_M]$ можно принять функции

$$\begin{aligned} \bar{x}_{M,i}(t) &= \bar{\omega}_{i,M} \left(R_{\xi, i, M} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_{i,M}^2} |A_{i,2}(T)| \right) \sin\left(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\right) \\ &+ (\bar{R} + |A_{i,1}(T)|) \cos\left(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\right) + \alpha^2 \bar{R} + |A_{i,1}(t)|, \\ \bar{s}_{M,i}(t) &= \left(R_{\xi, i, M} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_{i,M}^2} |A_{i,2}(T)| \right) \cos\left(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\right) \\ &+ \frac{\bar{R} + |A_{i,1}(T)|}{\bar{\omega}_{i,M}} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_{i,M}(t-T)}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_{i,M}^2} A_{i,2}(t), \end{aligned}$$

а в качестве константы \bar{S} :

$$\bar{S} = \frac{\bar{Y}}{\bar{\omega}_{i,M}^2} \geq \max_{t \in [\tau_{M-1}, \tau_M]} \frac{\dot{y}_i(t)}{\bar{\omega}_{i,M}^2}. \quad (3.17)$$

Функции $\bar{x}_{M,i}(t)$ и $\bar{s}_{M,i}(t)$ можно ограничить следующими независимыми константами:

$$|\bar{x}_{M,i}(t)| \leq \check{X}, \quad |\bar{s}_{M,i}(t)| \leq \check{S}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\begin{aligned}\check{X} &= \max_{i=1,\dots,n} \left[\bar{\omega}_i \left(R_{\xi,i} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_i^2} \frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2} \right) + \left(\bar{R} + \frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2} \right) + \alpha^2 \bar{R} + \frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2} \right], \\ \check{S} &= \max_{i=1,\dots,n} \left[\left(R_{\xi,i} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_i^2} \frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2} \right) + \frac{\bar{R} + \frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2}}{\bar{\omega}_i} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}_i^2} \frac{\bar{Y}}{1-\alpha^2} \right], \\ \text{где } R_{\xi,i} &= \left| \dot{y}(T) \frac{R_g(|\bar{\omega}_{i,M}| + \bar{\omega}_i)}{\bar{\omega}_i^3} + \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} \right|.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Для получения оценки снизу рассматривается оценочная система

$$\begin{aligned}\frac{dx_i(t)}{dt} &= -\frac{\omega_{i,M}^2 s_i(t)}{\alpha^2}, \\ \frac{ds_i(t)}{dt} &= -\alpha^2 \bar{R} + x_i(t) - y_i(t), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$x_i(T) = x_i(T), \quad s_i(T) = s_i(T), \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\omega_{i,M} = \min_{t \in [\tau_{M-1}, T]} |g_i(x(t))|.$$

Аналогично доказательству оценки (3.11) можно доказать, что

$$x_i(t) < x_i(t), \quad s_i(t) < s_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Аналогичным же способом строятся ограниченные функции $|x_{M,i}(t)| \leq \check{X}$ и $|s_{M,i}(t)| \leq \check{S}$. Если рассмотреть другие варианты распределения знаков функций $s_i(t)$ на отрезке $[\tau_{M-1}, \tau_M]$, то доказательство будет практически таким же, за исключением знаков перед константами в системе (3.8) и ее решениях. Однако при построении функций $\bar{x}_{M,i}(t)$ и $\bar{s}_{M,i}(t)$ берутся модули констант поэтому функции получатся те же самые.

Если рассматриваемый отрезок $[\tau_{M-1}, \tau_M]$ является отрезком сгущения, то из этого, в частности, будет следовать факт, что существуют такая точка сгущения $t_s \in (\tau_{M-1}, \tau_M)$ и такой индекс j , что для любого ϵ найдется $t_{s2} \in B_\epsilon t_s$, $t_{s2} \neq t_s$: $s_j(t_{s2}) = 0$. Наличие такой точки сгущения возможно только в том случае, если одна из непрерывных функций $s_i(t)$ меняет знак с частотой, стремящейся к бесконечности в некоторой окрестности точки t_s , в соответствии с построением отрезков $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ (3.4).

Рассмотрим одну такую точку t_{s2} для $\epsilon = 2\alpha^3$. Заметим, что по построению $\tau_M - \tau_{M-1} \leq 2\alpha^3$. В данном случае при $t \in [\tau_{M-1}, \tau_M]$ из предположений **A3** и (1.4) вытекает, что существует такая константа $\bar{C}_{M,j} < \infty$, что выполняется оценка

$$\begin{aligned}|s_j(t)| &\leq s_j(t_{s2}) + 2\alpha^3 \max_{t \in [0, T]} |\dot{s}(t)| \leq \alpha^3 \bar{C}_{M,j}, \\ \bar{C}_{M,j} &= 2(\alpha^2 \bar{R} + \max_{t \in [0, T]} x_j(t) + \bar{Y}).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Это означает, что в качестве функции $\bar{s}_{M,j}(t)$ на этом отрезке можно взять постоянную функцию $\bar{s}_{M,j}(t) \equiv \bar{C}_{M,j}$. Аналогичным образом для такого отрезка строится функция $\bar{X}_{M,j}(t) \equiv \bar{K}_{M,j}$, где $\bar{K}_{M,j} = \bar{\omega}_i^2 C_{M,j}$.

Таким образом, мы доказали, что требуемые условия выполняются на отрезке $[\tau_{M-1}, \tau_M]$. Однако из этого факта (3.3) следует, что краевые условия на предыдущем отрезке $[\tau_{M-2}, \tau_{M-1}]$ будут удовлетворять следующим соотношениям (в том числе и в том случае, если отрезок $[\tau_{M-1}, \tau_M]$ являлся отрезком сгущения (3.19)):

$$\begin{aligned}|x_i(\tau_{M-1}) - y_i(\tau_{M-1})| &\leq \alpha^2 \bar{x}_M(\tau_{M-1}), \\ \left| s_i(\tau_{M-1}) - \frac{\alpha^2 \dot{y}_i(T)}{g_i^2(\tau_{M-1})} \right| &\leq \alpha^3 \bar{s}_M(\tau_{M-1}), \\ i &= 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Итак, условия (2.7), (2.8) на конце рассматриваемого отрезка времени выполняются. Если же повторить доказательство с новыми краевыми условиями для $x_i(\tau_{M-1})$, то можно убедиться, что отступление от краевых условий $x_i(\tau_{M-1}) = y_i(\tau_{M-1})$ на величину порядка малости α^2 не повлияет на результат доказательства. Так, по индукции можно показать, что на всех отрезках $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ можно построить соответствующие оценочные функции $\bar{x}_{M,j}(t)$, $\bar{s}_{M,j}(t)$, $\underline{x}_{M,j}(t)$, $\underline{s}_{M,j}(t)$. Таким образом, в качестве результирующих оценочных функций можно взять составные функции вида

$$\bar{x}_i(t) = \begin{cases} \bar{x}_{j,i}(t), & \text{если } [\tau_{j-1}, \tau_j] \text{ не отрезок сгущения,} \\ \bar{K}_{j,i}, & \text{если } [\tau_{j-1}, \tau_j] \text{ — отрезок сгущения,} \end{cases} \quad t \in [\tau_{j-1}, \tau_j].$$

Лемма доказана. \square

Теорема. При выполнении условий **A1–A3**, а также условия согласования параметров $\delta < \alpha < b$ характеристики $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, системы (3.1) с краевыми условиями (2.6)–(2.8) удовлетворяют условиям

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|x_i(t) - y_i(t)\|_C = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.20)$$

Доказательство. Сначала покажем, что при $t \in [0, T]$ существует такая константа $\alpha_0 \leq b$ (b из предположения **A3**), что при всех $\alpha \leq \alpha_0$ выполняется условие

$$s_i(t) < \alpha^2 2\bar{S}, \quad \bar{S} \text{ из (3.17)}. \quad (3.21)$$

Проведем доказательство от противного. Рассуждения для всех характеристик $x_i(t)$, $s_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, одинаковы.

Из краевых условий (2.6)–(2.8) и определения \bar{S} (3.17) следует, что $s_i(T) < \alpha^2 2\bar{S}$ при $\alpha < \bar{S}g_i(T)^2$. Тогда в силу непрерывности функции $s_i(t)$ в качестве предположения от противного можно взять существование таких последовательностей $\alpha_j \rightarrow 0$ и $\tau_j \in [0, T]$, что

$$|s_i(\tau_j)| = 2\alpha_j^2 \bar{S}, \quad s_i(t) \leq 2\alpha_j^2 \bar{S}, \quad t \in [\tau_j, T]. \quad (3.22)$$

Для определенности будем считать, что $s_i(\tau_j) = 2\alpha_j^2 \bar{S} > 0$. Случай отрицательного $s_i(\tau_j)$ доказывается аналогичным образом. В таком случае в силу леммы будет существовать такая функция $s'_i(t): [\tau_j, T] \rightarrow [0, R_i]$, $0 \leq R_i < \infty$, что при $t \in [\tau_j, T]$

$$\begin{aligned} s_i(t) &\leq \alpha_j^3 s'_i(t) + \alpha_j^2 \bar{S}, \quad i = 1, \dots, n, \\ s_i(t) &\leq \alpha_j^3 R_i + \alpha_j^2 \bar{S}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из (3.22), (3.23) следует, что $2\alpha_j^2 \bar{S} \leq \alpha_j^3 R_i + \alpha_j^2 \bar{S}$, $\bar{S} \leq \alpha R_i$. Однако всегда можно подобрать достаточно малое α_j для того, чтобы это неравенство было неверно, и получить противоречие, что и требовалось доказать. Оценка снизу $s_i(t) > \alpha^2 2\bar{S}$, $t \in [0, T]$, доказывается аналогичным образом.

Таким образом, при $t \in [0, T]$ и достаточно малом $\alpha_0 \leq \min_{i=1, \dots, n} \bar{S}/R_i$ выполняется условие (3.21). Тогда из леммы следует, что при $t \in [0, T]$ и достаточно малом b выполняются условия (3.3) при $R = 2\bar{S}$. Тогда из этих условий и оценки (3.18) справедлива оценка

$$-\alpha^2 \check{X} + y_i(t) \leq x_i(t) \leq \alpha^2 \check{X} + y_i(t). \quad (3.24)$$

В таком случае по теореме о промежуточной функции из оценки (3.24) и предположения (1.5) можно сделать вывод о сходимости (3.20). Теорема доказана. \square

Осталось заметить, что из доказанной теоремы и предположения (1.5) следует выполнение первого условия требуемой сходимости (1.3). Выполнение же второго условия доказано в работе [4].

З а м е ч а н и е 1. Из утверждений леммы (3.3) можно сделать вывод о том, какими должны быть ограничения на управления (1.2) для того, чтобы управления, порождающие выбранные траектории характеристической системы (2.5), не выходили на ограничения при достаточно малых значениях α . Это можно сделать, используя оценки (1.4) и (3.18). Из (2.4) следует $u_i(t) = -\frac{g_i(x(t))s_i(t)}{\alpha^2}$. Тогда

$$\underline{U}_i = -\frac{\bar{Y}}{\underline{\omega}_i} - \alpha \bar{\omega}_i \check{S}, \quad \bar{U}_i = \frac{\bar{Y}}{\underline{\omega}_i} + \alpha \omega_i \check{S}.$$

4. Пример. Задача реконструкции для макроэкономической модели

Рассмотрим следующую управляемую систему, предложенную Э.Г. Альбрехтом [8] для описания процессов макроэкономики:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{\partial G(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_1} u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{\partial G(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2} u_2(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $t \in [0, T]$, x_1 — производство, x_2 — затраты на производство, $G(x_1, x_2)$ — макроэкономический потенциал (прибыль), который задается формулой $G(x_1, x_2) = x_1 x_2 (a_0 + A_{i,1} x_1 + A_{i,2} x_2)$, константы $a_0, A_{i,1}, A_{i,2}$ — постоянные параметры, $u_1(t), u_2(t)$ — управления, на которые наложены ограничения

$$u(t) \in \bar{U} = \{u = (u_1, u_2) : \underline{U}_1 \leq u_1 \leq \bar{U}_1, \underline{U}_2 \leq u_2 \leq \bar{U}_2\}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.2)$$

Ставятся задачи реконструкции динамики и управлений этой модели по известной с точностью δ истории дискретных замеров $y_1(t_i) = x_1(t_i), y_2(t_i) = x_2(t_i), G(t_i), i = 0, \dots, N, t_0 = 0, t_N = T$, интерполируемой некоторыми гладкими функциями $y_1(t), y_2(t)$.

Задача реконструкции (4.1), (4.2) была численно решена для следующих входных данных.

В работе Э.Г. Альбрехта [8] приведена статистика работы промышленности Уральского региона в 1970–1985 гг., на основе которой построены функции $y_1(t), y_2(t)$, интерполирующие истории замеров $\{y_1(t_i) = x_1(t_i), i = 0, 1, \dots, 15\}, \{y_2(t_i) = x_2(t_i), i = 0, 1, \dots, 15\}$. Графики интерполяций $y_1(t), y_2(t)$ изображены на рис. 1, 2.

Ставятся задачи реконструкции динамики и управлений этой модели по известной истории замеров $\{y_1(t_i), y_2(t_i), G(t_i), i = 0, \dots, N\}$, интерполируемой некоторыми гладкими функциями $y_1(t), y_2(t)$. Полагаем $\bar{U}_1 = \bar{U}_2 = 200, \underline{U}_1 = -\bar{U}_1, \underline{U}_2 = -\bar{U}_2$.

Решения $x(\cdot), s(\cdot)$ соответствующей характеристической системы (3.1) были построены численно. На рис. 3–6 приведены графики построенного при разных значениях параметра α пучка траекторий $x_1(t)$ и порождающих управлений $u_1(t)$. Для более наглядного масштабирования

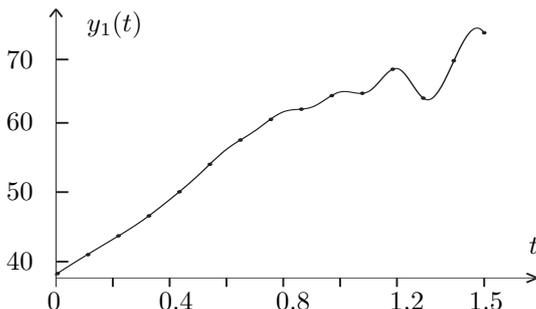


Рис. 1. График $y_1(t), t \in [0, 1.5]$.

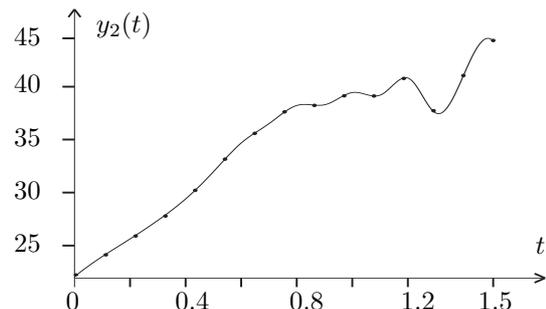


Рис. 2. График $y_2(t), t \in [0, 1.5]$.

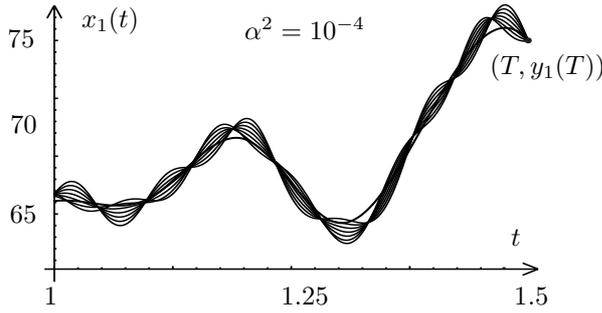


Рис. 3. График $x_1(t)$ при $\alpha^2 = 10^{-4}$, $t \in [1, 1.5]$.

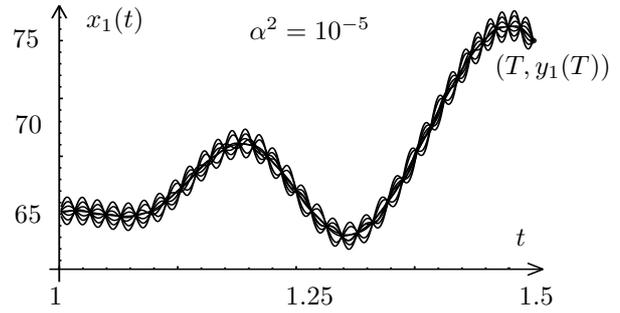


Рис. 4. График $x_1(t)$ при $\alpha^2 = 10^{-5}$, $t \in [1, 1.5]$.

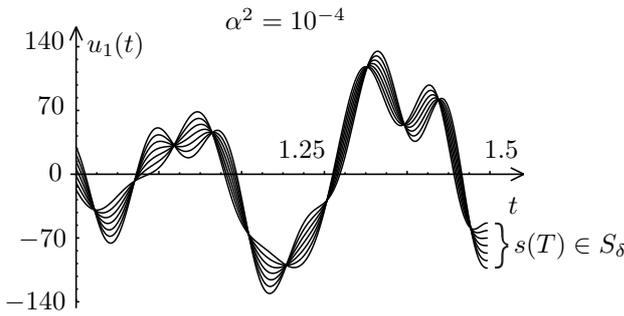


Рис. 5. График $u_1(t)$ при $\alpha^2 = 10^{-4}$, $t \in [1, 1.5]$.

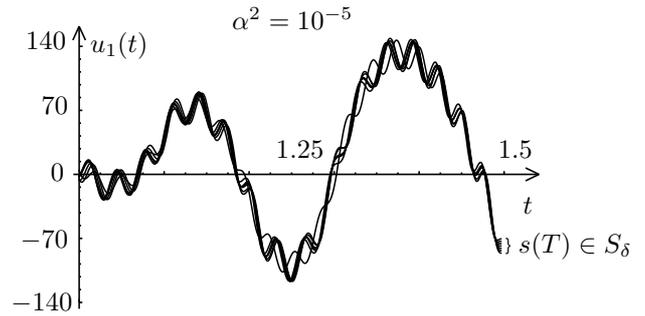


Рис. 6. График $u_1(t)$ при $\alpha^2 = 10^{-5}$, $t \in [1, 1.5]$.

графиков показан не весь отрезок времени $[0, T]$. В этих же целях при построении графиков условие согласования параметров $\delta < \alpha$ существенно ослаблено, так как в противном случае построенный пучок траекторий практически сливается на рисунке с интерполяцией замеров, в то время как соответствующие графики управлений также неотличимы друг от друга. Заметим, что графики траекторий $x_2(t)$ и управлений $u_2(t)$ имеют аналогичный вид.

З а м е ч а н и е 2. Теперь, для сравнения, попробуем получить решение этой задачи реконструкции путем сведения ее к задаче оптимального управления с минимизацией функционала

$$I(x(t), u(t)) = \int_0^T \left[\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2}{2} + \frac{(x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \frac{\alpha^2 u_1(t)^2}{2} + \frac{\alpha^2 u_2(t)^2}{2} \right] dt, \quad (4.3)$$

который отличается от функционала (2.1) знаком первых двух членов в подынтегральном выражении. Запишем характеристическую систему для этой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{s_1(t)}{\alpha^2} \omega_{i,M}^2(x_1(t), x_2(t)), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{s_2(t)}{\alpha^2} \omega_{i,M}^2(x_1(t), x_2(t)), \\ \frac{ds_1(t)}{dt} &= -x_1(t) + \frac{s_1^2(t)}{\alpha^2} F_1(x_1(t), x_2(t)) + \frac{s_2^2(t)}{\alpha^2} F_2(x_1(t), x_2(t)) + y_1(t), \\ \frac{ds_2(t)}{dt} &= -x_2(t) + \frac{s_1^2(t)}{\alpha^2} F_3(x_1(t), x_2(t)) + \frac{s_2^2(t)}{\alpha^2} F_4(x_1(t), x_2(t)) + y_2(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим ее решение при краевых условиях (2.6)–(2.8). Нетрудно проверить, что по теореме о неустойчивости по первому приближению решения этой системы будут неустойчивы. Действительно, среди собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm 1/\alpha$ характеристической матрицы есть числа с положительной действительной частью, а значит, по теореме об устойчивости по первому

приближению решения этой системы будут неустойчивы. Это сильно затрудняет построение численного решения задачи. Были предприняты попытки найти численно решения такой системы при условии использования в совокупности таких же вычислительных мощностей, как и при построении решений описанным выше алгоритмом, — и при любых краевых условиях и любых используемых методах построенное решение $x(t)$ расходилось достаточно быстро с интерполяцией замеров $y(t)$, плохо отслеживая функции $y_1(t)$, $y_2(t)$. Для построения решений задачи реконструкции в таком случае необходимо существенное уменьшение параметра α и уменьшение шага счета, что требует гораздо больше машинного времени.

5. Заключение

В данной работе предложено подробное обсуждение метода решения задач реконструкции динамики и управлений системы, предложенного в статье [4].

Была рассмотрена модификация этого метода, подразумевающая использование решения вспомогательной задачи оптимального управления на минимум функционала (2.1) при наличии целевого множества, в данном случае представляющего собой точку $(T, y(T))$.

Была доказана сходимость в пространстве непрерывных функций (1.3) траекторий $x(t)$, полученных с помощью предложенного метода, и базовой траектории $x^*(t)$ для определенного класса нелинейных задач (1.1), (1.2), **A1–A3**.

В качестве примера численного приложения предложенного алгоритма рассмотрена существенно нелинейная модель макроэкономики (4.1) и наглядно продемонстрирована сходимость (1.3) построенных аппроксимаций решения задачи реконструкции динамики и управлений для этой модели.

Также было замечено, что использование функционала вида (2.1) дает преимущество по сравнению с функционалом вида (4.3), которое заключается в устойчивости построенных решений относительно возмущений и погрешностей в исходных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
2. **Тихонов А.Н.** Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 4. С. 195–198.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. **Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б.** Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 218–233.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1961. 393 с.
6. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
7. **Эванс Л.К., Гариепи К.Ф.** Теория меры и тонкие свойства функции. Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. 207 с.
8. **Альбрехт Э.Г.** Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Исследовано в России [Электрон. журн]. 2002. Vol. 5. С. 54–86. URL: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/005.pdf>. 218–233. 2014.

Крупенников Евгений Александрович
ведущий математик

Поступила 17.03.2015

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
аспирант

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: krupennikov@imm.uran.ru