ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.95

СИНГУЛЯРНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ[1]

С. В. Захаров

Рассматривается асимптотическое поведение решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром при старшей производной в окрестностях особых точек решения предельной задачи. Интерес к данной задаче объясняется ее приложениями в исследованиях эволюции широкого класса физических систем и вероятностных процессов, таких как акустические волны в жидкости и газе, гидродинамическая турбулентность и нелинейная диффузия.

Ключевые слова: параболическое уравнение, сингулярные асимптотики, особые точки, ударные волны, градиентная катастрофа, функция сборки Уитни, ренормализация.

S. V. Zakharov. Singular asymptotics in the Cauchy problem for a parabolic equation with a small parameter.

Results of investigation of the asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for a quasi-linear parabolic equation with a small parameter at a higher derivative in neighborhoods of singular points of solutions of the limit problem are presented. Interest to the problem under consideration is explained by its applications in investigations of the evolution of a wide class of physical systems and probabilistic processes such as acoustic waves in fluid and gas, hydrodynamical turbulence and nonlinear diffusion.

Keywords: parabolic equation, singular asymptotics, singular points, shock waves, gradient catastrophe, Whitney fold function, renormalization.

Памяти учителя, академика Арлена Михайловича Ильина

Введение

Простейшей моделью движения сплошной среды, учитывающей эффекты нелинейного распространения и взаимодействие частиц вещества, является уравнение нелинейной диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение было впервые представлено Дж. Бюргерсом как модель гидродинамической турбулентности. Кроме того, оно используется при изучении эволюции широкого класса физических систем и вероятностных процессов, акустических волн в жидкости и газе [1; 2].

В дальнейшем стали исследовать асимптотическое поведение решений задачи Коши для более общего квазилинейного параболического уравнения с малым параметром ε при старшей производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t \geqslant t_0, \tag{0.1}$$

$$u(x,t_0) = q(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

Предполагается, что $0 < \varepsilon \ll 1$, функция φ бесконечно дифференцируема, а ее вторая производная строго положительна. Начальная функция q ограничена и кусочно гладкая.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322) и программы УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”).

Такие модели строятся при изучении движения автомобильного потока, в задаче о паводковых волнах и в некоторых других [3]. Интерес к данной задаче объясняется как наличием физической интерпретации, так и тем, что ее решения позволяют получить вязкостные обобщенные решения предельного уравнения.

С различных точек зрения эту задачу изучали Н.С. Бахвалов, В.Н. Богаевский, И.М. Гельфанд, А.М. Ильин, Т.Н. Нестерова, О.А. Ладыженская, Е.А. Лапшин, О.А. Олейник, А.Я. Повзнер, В.И. Пряжинский, В.А. Солонников, В.Г. Сушко, Н.Н. Уральцева, Е.Хопф и другие математики.

Строго доказано [4], что существует единственное ограниченное бесконечно дифференцируемое по x и t решение $u(x,t,\varepsilon)$.

Опишем кратко результаты исследований асимптотического поведения решений задачи Коши в окрестностях особых точек, которые возникают на разрывах решения предельного (вырожденного) уравнения, где $\varepsilon = 0$.

Интерес к изучению поведения решений вблизи особых точек объясняется, в частности, тем, что подобные сингулярные события сами занимают очень малое время, но определяют все последующее поведение системы на конечных и больших временах.

При исследовании решений таких задач методом согласования возникает необходимость строить не один, а несколько асимптотических рядов в разных подобластях независимых переменных. С целью подчеркнуть данное обстоятельство эти асимптотики названы *сингулярными*, а сами задачи — сингулярно возмущенными. Кроме того, в некоторых задачах, относимых к классу бисингулярных, коэффициенты асимптотических рядов стремятся к бесконечности при приближении к особой точке.

1. Слияние двух ударных волн

В работах А.М. Ильина и Т.Н. Нестеровой [5; 6] задача рассмотрена в случае, когда предельное решение на конечном отрезке времени имеет две гладких линии разрыва $x = s_1(t)$ и $x = s_2(t)$, сливающиеся в момент $t = t^*$ в одну $x = s_3(t)$.

Отметим, что для уравнения Бюргерса этот случай изложен в книге Дж. Уизема [1].

В окрестности точки слияния линий разрывов необходимо вводить внутренние переменные

$$\zeta = \frac{x - x^*}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t - t^*}{\varepsilon},$$

в которых уравнение (0.1) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \zeta} = 0.$$

Асимптотика решения начальной задачи в малой окрестности данной особой точки строится в виде ряда

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(\zeta, \tau),$$

коэффициенты которого находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial \varphi(w_0)}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_0}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial [\varphi'(w_0) w_n]}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_n}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} g_n(w_0, \ldots, w_{n-1}), \quad n \geqslant 1.$$

Эти уравнения должны быть дополнены условиями, которые получаются из следующих соображений. Составная асимптотика, приближающая решение при $t < t^*$ переписывается во внутренних переменных

$$U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n S_n(\zeta,\tau)+O\left\{\varepsilon^{n+1}\left[1+|\tau|^{2(n+1)}\left(|\zeta-s_1'(t^*)\tau|^n+|\zeta-s_2'(t^*)\tau|^n\right)\right]\right\},$$

где функции $S_n(\zeta,\tau)$ представляют собой полиномы степени $2n$ по τ. Таким образом, требуется выполнение условий

$$\lim_{\tau\to-\infty}(w_n(\zeta,\tau)-S_n(\zeta,\tau))=0.$$

Доказано, что решения w_n существуют и удовлетворяют оценкам

$$\left|\frac{\partial^{l+m}}{\partial\zeta^l\partial\tau^m}(w_n(\zeta,\tau)-S_n(\zeta,\tau))\right|<M\exp\{\mu\tau-\gamma|\zeta|\},\quad \tau<0,$$

$$\left|\frac{\partial^{l+m}}{\partial\zeta^l\partial\tau^m}(w_n(\zeta,\tau)-R_{3,n}(\zeta-s_3'(t^*)\tau,\tau))\right|<M\exp\{-\gamma(\tau+|\zeta|)\},\quad \tau>0,$$

где M, μ, γ — положительные постоянные, зависящие от n, l и m; $R_{3,n}(\zeta,\tau)$ — многочлены относительно τ, полученные при переразложении асимптотики

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_{3,k}((x-s_3(t))/\varepsilon,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k R_{3,k}(\zeta-s_3'(t^*)\tau,\tau))$$

в окрестности ударной волны $x=s_3(t)$ после слияния.

2. Градиентная катастрофа

В работе А.М. Ильина [7] был исследован случай, когда в полосе

$$\{(x,t)\colon t_0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}\}$$

предельное ($\varepsilon=0$) решение задачи является функцией, гладкой всюду, кроме одной гладкой линии разрыва

$$\{(x,t)\colon x=s(t),\ t\geqslant t^*>t_0\}.$$

Подробное изложение его результатов можно найти в монографии [3], где асимптотика решения при $\varepsilon\to 0$ построена и обоснована с произвольной степенью точности.

При подходящем выборе независимых переменных особая точка $(s(t^*),t^*)$ совпадает с началом координат и в ее окрестности вводятся растянутые переменные[2]

$$\xi=\varepsilon^{-3/4}x,\quad \tau=\varepsilon^{-1/2}t,$$

а разложение решения ищется в виде ряда

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k/4}\sum_{j=0}^{k-1}w_{k,j}(\xi,\tau)\ln^j\varepsilon^{1/4},$$

при подстановке которого в уравнение (0.1) для коэффициентов $w_{k,j}$ получается рекуррентная система

$$\frac{\partial w_{1,0}}{\partial\tau}+2b^2w_{1,0}\frac{\partial w_{1,0}}{\partial\xi}-\frac{\partial^2 w_{1,0}}{\partial\xi^2}=0,$$

[2]Принятые здесь обозначения не совпадают с оригинальными. Это связано с выбором коэффициента при второй производной из соображений единообразия.

$$\frac{\partial w_{k,j}}{\partial \tau} + 2b^2 \frac{(\partial w_{1,0} w_{k,j})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{k,j}}{\partial \xi^2} = E_{k,j}, \quad k \geqslant 2,$$

где $2b^2 = \varphi''(0)$.

Эти уравнения должны быть дополнены условиями

$$w_{k,j}(\xi,\tau) = W_{k,j}(\xi,\tau), \quad \tau \to -\infty,$$

где $W_{k,j}(\xi,\tau)$ — это сумма всех коэффициентов при $\varepsilon^{k/4} \ln^j \varepsilon^{1/4}$, присутствующих в переразложении асимптотики вдали от особенностей (внешнее разложение) во внутренних переменных.

Изучение решений этой системы является центральной и наиболее трудоемкой частью задачи. Доказано, что существуют решения $w_{k,j}(\xi,\tau)$ при $k \geqslant 2$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, бесконечно дифференцируемые при всех ξ и τ.

Отметим особо свойства главного члена разложения, который находится с помощью преобразования Коула — Хопфа

$$w_{1,0}(\xi,\tau) = -\frac{2}{\varphi''(0)\Lambda(\xi,\tau)} \frac{\partial \Lambda(\xi,\tau)}{\partial \xi},$$

где

$$\Lambda(\xi,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{1}{8}(z^4 - 2z^2\tau + 4z\xi)\Big) dz$$

называется функцией Пирси и является решением уравнения теплопроводности.

Функция $w_{1,0}$ удовлетворяет условию

$$w_{1,0}(\xi,\tau) = [\varphi''(0)]^{-1} H(\xi,\tau) + \sum_{l=1}^{\infty} h_{1-4l}(\xi,\tau), \quad 3[H(\xi,\tau)]^2 - \tau \to \infty,$$

где $H(\xi,\tau)$ — функция сборки Уитни, $H^3 - \tau H + \xi = 0$, $h_l(\xi,\tau)$ — однородные функции степени l относительно $H(\xi,\tau)$, $\sqrt{-\tau}$ и $\sqrt{3[H(\xi,\tau)]^2 - \tau}$, являющиеся полиномами от $H(\xi,\tau)$, τ и $(3[H(\xi,\tau)]^2 - \tau)^{-1}$.

Кроме того, справедливы следующие формулы:

$$w_{1,0}(\xi,\tau) = |\tau|^{1/2}\Big(Z_0(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} \tau^{-2j} Z_j(\theta)\Big), \quad \tau \to -\infty,$$

где $\theta = \xi|\tau|^{-3/2}$, $Z_j \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — решения рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений;

$$w_{1,0}(\xi,\tau) = \sqrt{\tau}\Big(-\frac{\operatorname{th} z}{\varphi''(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-2k} q_k(z)\Big), \quad \tau \to +\infty, \quad |\xi|\tau^{1/2} < \tau^\alpha,$$

где $z = \xi\sqrt{\tau}/2$, $|q_k(z)| \leqslant M_k(1+|z|^k)$, $q_k \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — решения рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Переход слабого разрыва в сильный

В работе В.Г. Сушко [8] задача (0.1)–(0.2) исследована в случае, когда начальная функция $u(x,0,\varepsilon)$ является гладкой всюду, кроме одной точки, в которой она непрерывна, а разрыв имеет первая производная. Тогда в некоторой полосе $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ предельное решение $u(x,t,0)$ будет непрерывным, но при этом оно будет иметь разрыв производной u_x, т.е. *слабый разрыв*. В работах [9; 10] было исследовано поведение решения $u(x,t,\varepsilon)$ с начальной функцией

$$-(x + ax^2)\,\Theta(-x)\,(1 + q_0(x))$$

вблизи точки перехода слабого разрыва в сильный.

Предполагается, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi''(u) > 0$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 1$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$, $q_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $q_0(x) = 0$ в некоторой окрестности нуля. Через $\Theta(x)$ обозначается функция Хевисайда.

В окрестности начала координат $(x = 0,\ t = 0)$ вводятся растянутые переменные

$$\xi = \varepsilon^{-2/3}x, \quad \tau = \varepsilon^{-1/3}t.$$

Асимптотика решения задачи построена в виде ряда

$$W = \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} \ln^s \varepsilon\, w_{p,s}(\xi, \tau).$$

Коэффициенты $w_{p,s}(\xi,\tau)$ — это решения рекуррентной системы уравнений

$$\frac{\partial w_{2,0}}{\partial \tau} + w_{2,0}\frac{\partial w_{2,0}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{2,0}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_{3,0}}{\partial \tau} + \frac{\partial\left(w_{2,0}w_{3,0}\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{3,0}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_{p,s}}{\partial \tau} + \frac{\partial\left(w_{2,0}w_{p,s}\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{p,s}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial E_{p,s}}{\partial \xi},$$

где

$$E_{p,s} = -\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{p-1}\sum_{l=0}^{s} w_{m,l}w_{p+2-m,s-l} - \sum_{q=3}^{[p/2]-s+1}\frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!}\sum_{\substack{p_1+\dots+p_q=p+2\\ s_1+\dots+s_q=s}}\prod_{j=1}^{q} w_{p_j,s_j}$$

(считается, что при $s = [p/2] - 1$ сумма по q равна нулю), с условиями

$$w_{p,s} = \sum_{l=s}^{[p/2]-1}\frac{l!}{s!(l-s)!3^s}\ln^{l-s}|\tau|\sum_{k=\max\{1,2l\}}^{\infty}|\tau|^{(p-3k)/2}R_{k,l,p-2l-2}(\theta)$$

при $\tau \to -\infty$ в области

$$X^0 = \{(\xi,\tau)\colon |\xi| < |\tau|^{1-\gamma},\ \tau < 0\} \quad (0 < \gamma < 1/2),$$

функции $R_{k,l,p-2l-2}(\theta)$ находятся из условия согласования ряда W с разложением в пограничном слое в окрестности линии слабого разрыва. Здесь используется обозначение для автомодельной переменной

$$\theta = \frac{\xi}{2\sqrt{-\tau}}.$$

Главный член асимптотики имеет вид $\varepsilon^{1/3}w_{2,0}(\xi,\tau)$. Функция $w_{2,0}$ определяется выражениями

$$w_{2,0}(\xi,\tau) = -\frac{2}{\Phi(\xi,\tau)}\frac{\partial\Phi(\xi,\tau)}{\partial\xi},$$

$$\Phi(\xi,\tau) = \int_0^\infty \exp\Big(-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\Big)ds, \quad b = a - \varphi'''(0)/2 > 0.$$

4. Особенность, порожденная большим начальным градиентом

Еще один тип особой точки решения возникает в случае задачи с двумя малыми параметрами [11], когда начальное условие имеет вид

$$u(x,0,\varepsilon,\rho)=\nu(x\rho^{-1}),\quad x\in\mathbb{R},\quad \rho>0,$$

где функция ν бесконечно дифференцируема и ограничена, а ρ — второй малый параметр.

Здесь рассматривается главное асимптотическое приближение, полученное классическим методом согласования, асимптотика полученная методом ренормализации, а также представлен новый, ранее не опубликованный, результат.

В работе [12] доказано, что в рассматриваемом случае при выполнении условий

$$\nu(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu_n^{\pm}}{\sigma^n},\quad \sigma\to\pm\infty,\quad (\nu_0^->\nu_0^+)$$

для решения задачи (0.1)–(0.2) при $\varepsilon\to 0$ и $\mu=\rho/\varepsilon\to 0$ в полосе

$$\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t\leqslant T\}$$

справедлива асимптотическая формула

$$u(x,t,\varepsilon,\rho)=h_0\Big(\frac{x}{\rho},\frac{\varepsilon t}{\rho^2}\Big)-R_{0,0,0}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\Big)+\Gamma\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}\Big)+O\big(\mu^{1/2}\ln\mu\big),$$

где

$$h_0(\sigma,\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu(s)\exp\Big[-\frac{(\sigma-s)^2}{4\omega}\Big]ds,$$

$$R_{0,0,0}(z)=\nu_0^-\operatorname{erfc}(z)+\nu_0^+\operatorname{erfc}(-z),$$

$$\operatorname{erfc}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z}^{+\infty}\exp(-y^2)\,dy,\quad z=\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}},$$

функция Γ — решение уравнения во внутренних переменных ($\eta=x/\varepsilon$, $\theta=t/\varepsilon$)

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi(\Gamma)}{\partial\eta}-\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\eta^2}=0$$

с начальным условием

$$\Gamma(\eta,0)=\begin{cases}\nu_0^-, & \eta<0,\\ \nu_0^+, & \eta>0.\end{cases}$$

Кроме того, методом ренормализации получена асимптотическая формула

$$u(x,t,\varepsilon,\rho)=\frac{1}{\nu_0^+-\nu_0^-}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\Big(\frac{x-\rho s}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}\Big)\nu'(s)\,ds+O\big(\mu^{1/4}\big).$$

Эти результаты дают асимптотику только в главном приближении. Для построения полного ряда вблизи точки $x=0$, $t=0$, асимптотически удовлетворяющего начальному условию, естественно “растянуть” переменную x на величину ρ^{-1}. Чтобы уравнение (0.1) сохранило эволюционный характер, производная по t должна быть того же порядка, что и правая часть, то есть порядка $\varepsilon\rho^{-2}$. Исходя из этих соображений, сделаем замену переменных

$$x=\rho\sigma,\quad t=\frac{\rho^2}{\varepsilon}\omega$$

и внутреннее разложение ищем в виде ряда по степеням μ с коэффициентами, зависящими от σ и ω.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geqslant 0$$

с начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon, \rho) = \nu(x\rho^{-1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0,$$

в области

$$\Omega_1 = \big\{(x, t)\colon t > 0,\ x^2 + \varepsilon t < \rho^{\delta_1}\varepsilon^{2-\delta_1},\ \delta_1 > 0\big\}$$

имеет асимптотическое решение

$$u \sim H(\sigma, \omega, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n h_n(\sigma, \omega), \quad \mu = \frac{\rho}{\varepsilon} \to 0.$$

Доказательство. При подстановке ряда $H(\sigma, \omega, \mu)$ в уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h}{\partial \sigma^2} = -\mu \frac{\partial \varphi(h)}{\partial \sigma},$$

для $h(\sigma, \omega) \equiv u(\rho\sigma, \rho^2\omega/\varepsilon)$, получаем рекуррентную цепочку начальных задач

$$\frac{\partial h_0}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial \sigma^2} = 0, \quad h_0(\sigma, 0) = \nu(\sigma),$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial \varphi(h_0)}{\partial \sigma}, \quad h_1(\sigma, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_n}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial E_n}{\partial \sigma}, \quad h_n(\sigma, 0) = 0,$$

где

$$E_n = \sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(h_0)}{q!} \sum_{n_1+\ldots+n_q=n-1} \prod_{p=1}^{q} h_{n_p}, \quad n \geqslant 2.$$

Откуда все коэффициенты $h_n(\sigma, \omega)$ определяются единственным образом:

$$h_0(\sigma, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(s) \exp\Big[-\frac{(\sigma - s)^2}{4\omega}\Big] ds,$$

$$h_n(\sigma, \omega) = -\int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega - v)}} \exp\Big[-\frac{(\sigma - s)^2}{4(\omega - v)}\Big] \frac{\partial E_n}{\partial s} ds dv.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
2. **Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.** Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
3. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
4. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
5. **Ильин А.М., Нестерова Т.Н.** Асимптотика решения задачи Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 1. С. 11–13.
6. **Нестерова Т.Н.** Об асимптотике решения уравнения Бюргерса в окрестности слияния двух линий разрыва // Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1980. С. 66–86.
7. **Ильин А.М.** Задача Коши для одного квазилинейного параболического уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 530–534.
8. **Сушко В.Г.** Об асимптотических разложениях решений одного параболического уравнения с малым параметром // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 10. С. 1794–1798.
9. **Захаров С.В., Ильин А.М.** От слабого разрыва к градиентной катастрофе // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 3–18.
10. **Захаров С.В.** Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 6. С. 47–62.
11. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с двумя малыми параметрами // Докл. Акад. Наук. 2008. Т. 422, № 6. С. 733–734.
12. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 699–706.

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила 16.01.2014