ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВНЕ МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ОТРЕЗКА[1]

А. А. Ершов

Построено и обосновано асимптотическое разложение решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка. Малый параметр характеризует ширину окрестности. Физической интерпретацией решения является двумерный потенциал скоростей идеальной жидкости при ламинарном обтекании поперек тонкого тела.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Лапласа, асимптотическое разложение, метод согласования, ламинарный поток, идеальная жидкость.

A. A. Ershov. Asymptotics of a solution of the second boundary value problem for the Laplace equation outside a small neighborhood of a segment.

We construct and validate an asymptotic expansion of a solution of the exterior Neumann problem for the Laplace equation outside a small neighborhood of a segment. The width of the neighborhood is characterized by a small parameter. A physical interpretation of the solution is the two-dimensional velocity potential of an ideal fluid in the case of a laminar flow across a thin body.

Keywords: boundary value problem, Laplace equation, asymptotic expansion, matching method, laminar stream, ideal fluid.

Введение

Рассматривается внешняя краевая задача для уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка, которая физически интерпретируется как модель обтекания тонкого тела ламинарным потоком жидкости. Заметим, что ранее в [1, гл. III, § 2] была рассмотрена похожая двумерная задача обтекания тонкого тела ламинарным потоком жидкости. В данной работе процесс обтекания происходит перпендикулярно к направлению, которое рассматривалось в [1, гл. III, § 2]. Построение этой асимптотики дает возможность вычислить асимптотику решения, интерпретирующего процесс обтекания в любом направлении.

Отметим, что первая краевая задача для общего эллиптического уравнения с переменными коэффициентами вне малой окрестности отрезка впервые была рассмотрена в [2]. Позже была изучена и более сложная задача исследования собственных функций и собственных значений такой задачи в ограниченной области для оператора Лапласа [3]. В работах [4] и [5] была построена асимптотика решения первой краевой задачи вне малой окрестности осесимметричного и неосесимметричного тонкого диска соответственно. Наконец, можно отметить исследование [6] внешней первой и второй краевой задачи для уравнения Лапласа вне малой осесимметричной окрестности отрезка в трехмерном пространстве, однако полученное там асимптотическое приближение не закрывает полностью вопроса построения равномерного асимптотического разложения решения. Также изучены аналогичные краевые задачи вне тонкого бесконечного [7] и полуограниченного [8] цилиндра.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00259-а) и Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса”.

1. Постановка задачи

Пусть σ — интервал $\{(x_1, x_2)\colon 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, $\overline{\sigma}$ — его замыкание, а σ_ε — окрестность интервала σ (рис. 1).

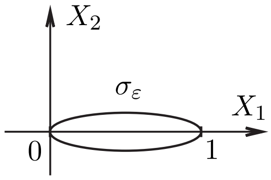

Рис. 1.

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий ширину окрестности σ_ε, так что $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} \sigma_\varepsilon = \sigma$. Точный вид σ_ε определим следующим образом. Пусть $\sigma_\varepsilon = \{x\colon 0 < x_1 < 1, \varepsilon g_-(x_1) < x_2 < g_+(x_1)\}$, где $g_\pm(x_1) \in C^\infty(0,1)$. Вблизи концов отрезка $\overline{\sigma}$ также будем предполагать границу $\partial\sigma_\varepsilon$ гладкой. Это означает, что, например, около точки (0,0) уравнение границы $\partial\sigma_1$ имеет вид $x_1 = \psi(x_2)$, где $\psi(x_2) \in C^\infty$. Ясно, что $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, $\psi''(0) \geqslant 0$, и дополнительно предположим, что $\psi''(0) > 0$, т. е. что кривизна кривой $\partial\sigma_1$ в точке $(0,0)$ отлична от нуля. Без ограничения общности будем считать, что $\psi''(0) = 2$. Нетрудно показать, что указанные предположения эквивалентны следующим условиям на $g_\pm(x_1)$:

$$g_\pm(x_1) = \Bigl(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j\Bigr)_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \to 0, \quad g_1 = 1. \tag{1.1}$$

Аналогичную асимптотику функций $g_\pm(x_1)$ будем предполагать около другого конца σ, т. е. при $x_1 \to 1-0$. Также потребуем, чтобы данные ряды допускали многократное почленное дифференцирование.

Всюду в этой статье будут употребляться обозначения $x = (x_1, x_2)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Посредством $u(x,\varepsilon) = u(x_1, x_2, \varepsilon)$ будем обозначать функцию, которая удовлетворяет условиям $u(x,\varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \sigma_\varepsilon)$,

$$\Delta u = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \sigma_\varepsilon, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x,\varepsilon) = 0 \text{ при } x \in \partial\sigma_\varepsilon, \tag{1.3}$$

$$u(x,\varepsilon) = x_2 + o(1) \text{ при } r \to \infty. \tag{1.4}$$

Цель работы заключается в построении и обосновании асимптотического разложения по малому параметру ε функции $u(x,\varepsilon)$.

Гидродинамическая интерпретация задачи (1.2)–(1.4) следующая. Рассматривается обтекание тела σ_ε плоским безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ — это потенциал скоростей, так что скорость жидкости $V = \operatorname{grad} u$. Тогда функция $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (1.2) и условию непротекания (1.3) на границе тела. Для однозначного определения течения надо задать еще скорость набегающего потока на бесконечности. Течение с постоянной единичной скоростью, параллельной оси x_2, соответствует решению $u(x) = x_2$, так что физически правильным условием на бесконечности является условие $u \to x_2 + O(1)$ при $r \to \infty$. Но без ограничения общности можно считать выполненным условие (1.4). Отметим, что это условие совпадает с тем, которое было рассмотрено в [1, гл. III, § 2], но поскольку мы рассматриваем потенциал скоростей вместо функции тока, то направление обтекания на самом деле перпендикулярно ранее рассмотренному.

2. Внешнее разложение

Внешнее разложение решения задачи (1.2)–(1.4) будем искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \tag{2.1}$$

$$\text{где } \Delta u_k = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\sigma}. \tag{2.2}$$

Условие (1.4) переходит в условия

$$u_0(x) = x_2 + o(1) \text{ при } r \to \infty, \tag{2.3}$$

$$u_k(x) = o(1) \text{ при } r \to \infty,\ k > 0. \tag{2.4}$$

Граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ получаются следующим образом (рис. 2).

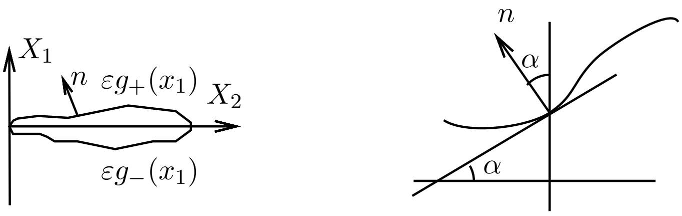

Рис. 2.

По определению производной по направлению

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x)\Big|_{x \in \sigma_\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial n} u(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)) = (\nabla u(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)), n).$$

Пусть α — угол между осью Ox_2 и нормалью n. Тогда

$$n = \pm(-\sin\alpha, \cos\alpha) = \pm\Big(-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}}\Big)$$

$$= \pm\Big(-\frac{\varepsilon g'_\pm(x_1)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 g'^2_\pm(x_1)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 g'^2_\pm(x_1)}}\Big).$$

По условию (1.3) нормальная производная на границе равна нулю, т. е.

$$-\varepsilon g'_\pm(x_1) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)) = 0.$$

Подставляя сюда вместо u ряд (2.1) и разлагая функции по степеням ε, будем иметь

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) + \varepsilon\Big(-g_\pm(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1,\pm 0) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) + g_\pm(x_1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1,\pm 0)\Big) + \ldots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = g'_\pm(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1,\pm 0) - g_\pm(x_1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1,\pm 0) \\
&\qquad\qquad = \Big(g_\pm(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1,\pm 0)\Big)'_{x_1}, \\
&\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = g'_\pm(x_1)\sum_{j=0}^{k}\frac{g^j_\pm(x_1)}{j!}\frac{\partial^{j+1}u_{k-j}}{\partial x_2^j \partial x_1}(x_1,\pm 0) - \sum_{j=1}^{k+1}\frac{g^j_\pm(x_1)}{j!}\frac{\partial^{j+1}u_{k+1-j}}{\partial x_2^{j+1}}(x_1,\pm 0) \\
&\qquad\qquad = \Big(\sum_{j=0}^{k}\frac{g^{j+1}_\pm(x_1)}{(j+1)!}\cdot\frac{\partial^{j+1}u_{k-j}}{\partial x_2^j \partial x_1}(x_1,\pm 0)\Big)'_{x_1}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Как и в [1, гл. III, § 2], задача является бисингулярной: функции $u_k(x)$ имеют возрастающие особенности на краях отрезка $\overline{\sigma}$. Кроме того, возникает дополнительная трудность с разрешимостью краевых задач (2.2)–(2.5) для $u_k(x)$.

Начнем с изучения функции $u_0(x)$. Представим ее в виде суммы $u_0(x) = x_2 + \tilde{u}_0(x)$, где непрерывная гармоническая функция $\tilde{u}_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}_0(x) = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{\sigma}, \\ \tilde{u}_0(x) = o(1) \text{ при } r \to \infty, \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = -1 \text{ при } x_1 \in (0,1). \end{cases}$$

Данную задачу можно решить методом конформных отображений с помощью функции Жуковского [9]. Решением является функция $\tilde{u}_0(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\sqrt{\big(2x_1 - 1 + 2ix_2\big)^2 - 1} - x_2$. Здесь выбирается та ветвь корня, мнимая часть которого ведет себя как x_2 на бесконечности. Отсюда следует асимптотика

$$u_0(x) = r^{1/2}\cos\frac{\Theta}{2} - \frac{1}{2}r^{3/2}\cos\frac{3\Theta}{2} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2j-3)!!}{2^j j!}r^{j+1/2}\cos\Big(j+\frac{1}{2}\Big)\Theta, \quad r \to 0,$$

где Θ — полярный угол $0 \le \Theta \le 2\pi$. Аналогичное разложение существует около точки $(1,0)$. Заметим, что эти степенные ряды сходятся.

Перейдем к изучению функции $u_1(x)$. Граничное условие (2.5) имеет для нее вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = \frac{d}{dx_1}\Big(g'_{\pm}(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \pm 0)\Big), \quad 0 < x_1 < 1. \tag{2.6}$$

Таким образом, $u_1(x)$ — это гармоническая в $\mathbb{R}^2\backslash\overline{\sigma}$, стремящаяся к нулю на бесконечности функция, которая удовлетворяет условию (2.6). Для того чтобы проверить разрешимость такой задачи, докажем, что предел

$$\lim_{x_1 \to +0}\Big(g_-(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, -0) - g_+(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, +0)\Big) = 0.$$

Лемма 1. *Верны следующие тождества*:

$$\Big(\sum_j d_j r^{j/2}\cos\frac{j\Theta}{2} + c_j r^{j/2}\sin\frac{j\Theta}{2}\Big)'_{x_2} = \sum_j -\frac{j}{2}d_j r^{j/2-1}\sin\Big(\Big(\frac{j}{2}-1\Big)\Theta\Big) + \frac{j}{2}c_j r^{j/2-1}\cos\Big(\Big(\frac{j}{2}-1\Big)\Theta\Big),$$

$$\Big(\sum_j d_j r^{j/2}\cos\frac{j\Theta}{2} + c_j r^{j/2}\sin\frac{j\Theta}{2}\Big)'_{x_1} = \sum_j \frac{j}{2}d_j r^{j/2-1}\cos\Big(\Big(\frac{j}{2}-1\Big)\Theta\Big) + \frac{j}{2}c_j r^{j/2-1}\sin\Big(\Big(\frac{j}{2}-1\Big)\Theta\Big).$$

Доказательство. Для удобного дифференцирования можно использовать представление вида $r^{j/2}\sin(j\Theta/2) = \mathrm{Im}(x_1 + ix_2)^{j/2}$, где выбирается первообразный корень. □

Согласно лемме 1 $\partial u_0/\partial x_1 = 1/2\ r^{-1/2}\cos(\Theta/2) + O(r^{1/2})$, а по условию (1.1) $g_{\pm}(x_1) = \pm\sqrt{x_1} + O(x_1^{3/2})$. Следовательно, $\partial u_0/\partial x_1(x_1, \pm 0) = \pm 1/(2\sqrt{x_1}) + O(x_1^{1/2})$, а предел равен нулю. Аналогично,

$$\lim_{x_1 \to 1-0}\Big(g_+(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, -0) - g_-(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, +0)\Big) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что интеграл от нормальной производной по всей границе равен нулю. И хотя граничные условия имеют особенности, но в случае второй краевой задачи достаточно, чтобы они были интегрируемы, тогда решение такой задачи существует, единственно и непрерывно всюду, если считать различными разные берега разреза вдоль интервала σ. Однако граничные условия на следующие асимптотические коэффициенты имеют еще бо́льшие особенности, а интеграл от нормальной производной по всей границе может быть не равен нулю даже в смысле главного значения. Прежде чем рассмотреть асимптотическое поведение при $r \to 0$ следующих коэффициентов, а также доказательство возможности их существования и степень определенности, напомним обозначения, которые были введены для аналогичной первой краевой задачи в [1, гл. III, § 2].

Плоскость $\mathbb{R}^2$ с разрезом σ будем обозначать Ω, один из концов интервала σ — точку $(0,0)$ — обозначим O, а другой конец — точку $(1,0)$ — O' (рис. 3).

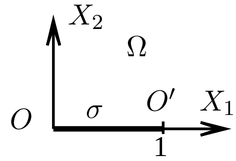

Рис. 3.

Введем те же обозначения для классов функций. Классы $C(\overline{\Omega})$ $(C^N(\overline{\Omega}))$ — это множества функций, определенных в $\overline{\Omega}$ и непрерывных (N раз непрерывно дифференцируемых) всюду, включая границу Ω. При этом точки на разных берегах разреза σ считаются различными точками (т. е. $(x_1,+0) \neq (x_1,-0)$ при $0 < x_1 < 1$). Если при этом функции определены лишь при $r \leqslant \delta$, то такие множества будут обозначаться $C(\overline{\Omega}_\delta)$ $(C^N(\overline{\Omega}_\delta))$. Посредством $C^\infty(\overline{\Omega}\backslash S)$ обозначаются классы функций, бесконечно дифференцируемых всюду в $\overline{\Omega}$, кроме концов отрезка $\overline{\sigma}$, а посредством $C^\infty(\overline{\Omega}_\delta\backslash O)$ — такие же функции, определенные при $r \leqslant \delta$. При этом берега разреза по-прежнему считаются различными.

Итак, $u_1(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\overline{\Omega}\backslash S)$, но вблизи концов σ функция $u_1(x)$ не является гладкой функцией. Используя разложения функций $g_\pm$ и u_0, можно получить, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = \pm\frac{g_2}{4}x_1^{-1/2} + \Bigl(\sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j} z^j\Bigr)_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \to +0, \tag{2.7}$$

где $h_{1,j}$ — некоторые коэффициенты, полученные в результате перемножения соответствующих рядов в (2.6), явный вид их не важен.

Теорема 1. *Пусть k — целое число, функции $h_\pm(x_1) \in C^\infty(0,1)$, для которых справедливы асимптотические разложения*

$$h_\pm(x_1) = \Bigl(\sum_{j=-k}^{\infty} c_j z^j\Bigr)_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \to +0, \tag{2.8}$$

и аналогичные асимптотические разложения при $x_1 \to 1-0$, и разложения допускают дифференцирование по x_1. В случае $k > 0$ пусть заданы постоянные d_{-1}, d_{-2}, …, d_{-k}, d'_{-1}, d'_{-2}, …, d'_{-k}.

Тогда существует функция $u(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash S)$, гармоничная в Ω, стремящаяся к нулю на бесконечности и удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = h'_\pm(x_1) \text{ при } 0 < x_1 < 1.$$

При $k \leqslant 0$ для функции $u(x)$ справедливо асимптотическое разложение

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j r^{j/2}\cos\frac{j\Theta}{2} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2}\sin\frac{j\Theta}{2}, \quad r \to 0,$$

при $k > 0$

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos\frac{j\Theta}{2} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2} \sin\frac{j\Theta}{2}, \quad r \to 0,$$

а при $x \to O'$ *— аналогичные асимптотические разложения с заменой* d_{-j} *на* d'_{-j}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим вначале случай, когда $k \leqslant 0$. Условием разрешимости этой задачи в классе ограниченных бесконечно дифференцируемых функций является равенство $\int_0^1 h'_+(x_1)dx_1 - \int_0^1 h'_-(x_1)dx_1 = 0$, т. е. разность пределов $\lim\limits_{x_1\to+0} \big(h_-(x_1) - h_+(x_1)\big) - \lim\limits_{x_1\to 1-0} \big(h_+(x_1) - h_-(x_1)\big)$ должна быть равна нулю. В силу (2.8) это равенство всегда выполняется в этом случае. Поскольку задача разрешима, то возьмем ее решение $u(x)$, которое стремится к нулю на бесконечности, и измерим значения функции $u(x)$ на окружности $r = \delta$. Совокупность этих значений образует непрерывную функцию $\varphi(\Theta)$, а сама функция $u(x)$ является также и единственным решением из класса функций $C^\infty(\Omega_\delta) \cap C(\overline{\Omega}_\delta)$ следующей третьей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ при } x \in \Omega_\delta, \\ u\Big|_{r=\delta} = \varphi(\Theta) \text{ при } \Theta \in [0, 2\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = \big(h_\pm(x_1)\big)'_{x_1} \text{ при } r < \delta. \end{cases}$$

Заметим, что у этой задачи легко выписать формальное решение

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2} \sin\frac{j\Theta}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos\frac{j\Theta}{2},$$

где $d_0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\Theta) d\Theta$, $d_j = 1/\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\Theta) \cos(j\Theta/2) d\Theta$.

Если ли бы ряды для функций $h_\pm$ сходились к самим функциям $h_\pm$, то отсюда бы следовал требуемый вид асимптотики функции $u(x)$. Но поскольку ряды для функций $h_\pm$ только асимптотические, то для доказательства того, что это формальное решение является настоящим асимптотическим разложением, будем следовать тому же алгоритму, который был продемонстрирован в доказательстве [1, с. 107, теорема 2.1]. Мы сделаем конформное отображение Ω_δ на полукруг, выпишем явное решение, найдем его асимптотику, а затем сделаем обратное отображение.

Отобразим область Ω_δ на полукруг радиуса $\sqrt{\delta}$. Как известно, при отображении $\Theta = 2\overline{\Theta}$, $r = \overline{r}^2$ гармонические функции переходят в гармонические. Обозначим $\overline{u}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \equiv u(x_1, x_2)$, где $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ — декартовы координаты после указанного отображения $\Big(\overline{x}_1 = x_2/\sqrt{2(r - x_1)}$, $\overline{x}_2 = \sqrt{r - x_2}/\sqrt{2}\Big)$. Таким образом, $\overline{u}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ — гармоническая функция в верхнем полукруге $\overline{x}_2 \geqslant 0$, $\overline{r} \leqslant \sqrt{\delta}$. Непрерывная функция $\varphi(\Theta)$ перейдет в непрерывную функцию $\varphi(2\overline{\Theta}) \equiv \overline{\varphi}(\overline{\Theta})$. Исследуем функцию $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0)$. Вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_1}\frac{\partial \overline{x}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_2}\frac{\partial \overline{x}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_1}\frac{\overline{x}_2}{2\overline{r}^2} + \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_2}\frac{\overline{x}_1}{2\overline{r}^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\pm 0} = \Big(\frac{\partial u}{\partial \overline{x}_1}\frac{\overline{x}_2}{2\overline{r}^2}\Big)\Big|_{\overline{x}_2=+0} + \Big(\frac{\partial u}{\partial \overline{x}_2}\frac{\overline{x}_1}{2\overline{r}^2}\Big)\Big|_{\overline{x}_2=+0} = \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_2}\Big|_{\overline{x}_2=0} \cdot \frac{\overline{x}_1}{2\overline{x}_1^2} = \frac{1}{2\overline{x}_1}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}_2}\Big|_{\overline{x}_2=0}.$$

Отсюда можно выразить

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}_2}(\overline{x}_1, 0) = 2\overline{x}_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \underset{x_1\to+0}{\overset{\text{ас.}}{=}} 2\overline{x}_1 \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2} c_j z^{j-2}\Big)_{z=\pm\sqrt{x_1}} = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j \overline{x}_1^{j-1}.$$

Заметим, что если $x_2 = 0$, то $\overline{x}_2 = 0$, $x_1 = r = \overline{r}^2 = \overline{x}_1^2$. Также заметим, что поскольку $h_\pm(x_1) \in C^\infty(0,1)$, то функция $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0) \in C^\infty(-\sqrt{\delta}, 0) \cap C^\infty(0, \sqrt{\delta}) \cap C(-\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta})$. Докажем бесконечную дифференцируемость функции $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0)$ в точке $\overline{x}_1 = 0$. Поскольку асимптотический ряд для функций $\partial u/\partial x_2(x_1, \pm 0)$ по условию допускает почленное дифференцирование, то можно дифференцировать и асимптотический ряд для функции $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0)$. Отсюда следует существование необходимых пределов в определении всех производных. Таким образом, функция $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0) \in C^\infty(-\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta})$.

С помощью явной формулы

$$\overline{u}(\overline{x}) = \int\limits_{\substack{|y|=R,\\ y_2>0}} \overline{u}(y)\Big(\frac{R^2 - |\overline{x}|^2}{R|y-\overline{x}|^2} + \frac{R^2 - |\overline{x}|^2}{R|y-\overline{\overline{x}}|^2}\Big)dS_y + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}_2}(y_1, 0)\ln\frac{1}{(y_1-\overline{x}_1)^2 + \overline{x}_2^2}dy_1$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}_2}(y_1, 0)\ln\frac{R^2}{|\overline{x}|^2 y_1^2 - 2R^2\overline{x}_1 + R^4}dy_1,$$

где $\overline{\overline{x}} = (\overline{x}_1, -\overline{x}_2)$, можно показать, что функция $\overline{u}(\overline{x})$ является бесконечно дифференцируемой в точке $\overline{x} = (0,0)$, и, следовательно, ее можно разложить в этой точке в ряд Тейлора. В силу гармоничности функции $\overline{u}(\overline{x})$ члены ряда Тейлора имеют вид $\overline{r}^j \sin j\overline{\Theta}$ или $\overline{r}^j \cos j\overline{\Theta}$, а из асимптотики функции $u_1(\overline{x}_1) = \overline{u}(\overline{x}_1, 0)$ при $\overline{x}_1 \to 0$ следует, что ряд Тейлора для функции $\overline{u}(\overline{x})$ имеет вид

$$\overline{u}(\overline{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \overline{r}^j \sin j\overline{\Theta} + \sum_{j=0}^{\infty} d_j \overline{r}^j \cos j\overline{\Theta}, \quad \overline{r} \to 0,$$

где d_j — некоторые постоянные. После обратного преобразования полукруга радиуса $R = \sqrt{\delta}$ на область Ω_δ мы получим требуемый вид асимптотики функции $u(x)$ при $r \to 0$.

2. Предположим, что $h_\pm(x_1) = \Big(\sum\limits_{j=-1}^{\infty} c_j z^j\Big)_{z=\pm\sqrt{x_1}}$, $x_1 \to +0$ и $h_\pm(x_1) = \Big(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j \tilde{z}^j\Big)_{\tilde{z}=\pm\sqrt{1-x_1}}$, $x_1 \to 1-0$.

Представим $h_\pm(x_1) = c_{-1}\,(\pm 1/\sqrt{x_1})\,\chi(x_1) + (h_\pm(x_1) - c_{-1}\,(\pm 1/\sqrt{x_1})\,\chi(x_1)) = s_\pm(x_1) + p_\pm(x_1)$, где $s_\pm(x_1) = c_{-1}(\pm 1/\sqrt{x_1})\chi(x_1)$, $p_\pm(x_1) = h_\pm(x_1) - c_{-1}(\pm 1/\sqrt{x_1})\chi(x_1)$, $\chi(x_1)$ — срезающая функция, которая тождественно равна единице при $x_1 \leqslant \delta - \hat{\delta}$ и тождественно равна нулю при $x_1 \geqslant \delta + \hat{\delta}$, $0 < \delta < 1$, $0 < \hat{\delta} \ll \delta$. Функцию $u(x)$ будем искать в виде суммы $u_1(x) + u_2(x)$, где функция u_1 является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_1(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = s'_\pm(x_1) \text{ при } 0 < x_1 < 1, \\ u_1(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty, \end{cases}$$

а функция u_2 является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_2(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = p'_\pm(x_1) \text{ при } 0 < x_1 < 1, \\ u_2(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty. \end{cases}$$

В случае с u_2 имеет место предыдущий случай. Рассмотрим функцию u_1. В классе ограниченных бесконечно дифференцируемых функций эта задача неразрешима, так как $\displaystyle\int_{\partial\sigma} \frac{\partial u_1}{\partial n} dS$ не только не равен нулю, но и вообще расходится. Однако эта задача разрешима в классе функций с особенностями в точке O. Будем искать u_1 также в виде суммы

$$u_1(x) = c_{-1}\chi_2(r) r^{-1/2}\sin(\Theta/2) + c_{-1}\tilde{u}_1(x),$$

где $\tilde{u}_1(x)$ — гладкая функция, а $\chi_2(r)$ — гладкая функция, меняющая свое значение с 1 до 0 в $\hat{\delta}$-окрестности окружности $r=\delta_2$. Таким образом, $\tilde{u}_1(x)$ — это решение задачи

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_1(x) = -\Delta r^{-1/2} \sin\dfrac{\Theta}{2}\cdot \chi_2(r) \text{ при } x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = \Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}\chi(x_1)\Big)'_{x_1} - \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big(r^{-1/2}\sin\dfrac{\Theta}{2}\cdot\chi_2(r)\Big)\Big|_{x_2=\pm 0} \text{ при } 0<x_1<1. \end{cases}$$

Докажем, что можно выбрать такое δ_2, чтобы существовало решение $\tilde{u}$, которое стремится к нулю на бесконечности. В этом случае $u_1(x)$ и вся функция $u(x) = c_{-1}u_1(x) + u_2(x)$ будет стремиться к нулю на бесконечности. Для этого вначале выпишем формулировку условия разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона, которая вытекает из первой формулы Грина (см., например, [10, гл. 6, § 6.1]).

Утверждение. *Пусть Ω — двумерная ограниченная область с достаточно гладкой границей, функция $u(x)$ — решение в классе $C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\Omega)\cap C(\overline{\mathbb{R}^2\backslash\Omega})$ следующей внешней второй краевой задачи*

$$\begin{cases} \Delta u = -f \text{ в } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi(x) \text{ при } x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Тогда существует стремящееся к нулю на бесконечности решение этой задачи, если

$$\int\limits_{\partial\Omega}\psi(x)dS + \iint\limits_{\mathrm{R}^2\backslash\Omega} f(x)dx = 0.$$

Воспользуемся утверждением. Для этого вычислим два интеграла

$$\int\limits_{\partial\sigma}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial n}dS \approx 2\int\limits_{\delta_2}^{\delta}\Big(-\frac{1}{2}x_1^{-3/2}\Big)dx_1 = 2x_1^{-1/2}\Big|_{\delta_2}^{\delta} = 2(\delta^{-1/2}-\delta_2^{-1/2}),$$

$$\iint\limits_{\mathrm{R}^2\backslash\sigma}\Delta\Big(r^{-1/2}\chi_2(r)\sin\frac{\Theta}{2}\Big)dx \approx -2\delta_2^{-3/2}.$$

Постоянную δ_2 можно примерно найти из уравнения

$$2(\delta^{-1/2}-\delta_2^{-1/2}) \approx 2\delta_2^{-3/2}.$$

Очевидно, что решение такого уравнения всегда существует, точное решение неважно.

Аналогично можно доказать, что существует функция $u_3(x) = r^{-1/2}\chi_3(r)\cos\Theta/2 + \tilde{u}_3(x)$, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_3 = 0 \text{ при } x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial n}\Big|_{\partial\sigma} = 0 \text{ при } 0<x_1<1, \\ u_3 = o(1) \text{ при } r\to\infty, \end{cases}$$

где $\chi_3(r)$ — срезающая функция, аналогичная $\chi_2(r)$, меняющая свое значение с 1 до 0 в окрестности $r=\delta_3$, а $\tilde{u}_3(x)$ — это гладкая функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}_3 = -\Delta\Big(r^{-1/2}\chi_3(r)\cos\dfrac{\Theta}{2}\Big) \text{ при } x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_3}{\partial n}\Big|_{\partial\sigma} = -\dfrac{\partial}{\partial n}\Big(r^{-1/2}\chi_3(r)\cos\dfrac{\Theta}{2}\Big) \text{ при } 0<x_1<1, \\ \tilde{u}_3 = o(1) \text{ при } r\to\infty. \end{cases}$$

Действительно, заметим, что при $x_2 = \pm 0$ функции $-\dfrac{\partial}{\partial n}\big(r^{-1/2}\chi_3(r)\cos(\Theta/2)\big)$ (при переходе к пределу с разных сторон) являются гладкими функциями от одной переменной x_1, финитными на отрезке $0 < x_1 < 1$. Также заметим, что поскольку функция $\tilde{f}(x) = r^{-1/2}\chi_3(r)\cos(\Theta/2)$ является нечетной относительно переменной x_2 (при этом надо учитывать, что угол Θ меняется от 0 до 2π), то $\displaystyle\int_{\partial\sigma} \partial\tilde{f}/\partial n(x)dS = 0$.

Вычислим второй интеграл, чтобы воспользоваться утверждением (см. выше).

$$\iint\limits_{\Omega} -\Delta\Big(r^{-1/2}\chi_3(r)\cos\frac{\Theta}{2}\Big)dx = \int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{\Theta}{2}d\Theta\cdot\int\limits_{\delta_3-\hat{\delta}}^{\delta_3+\hat{\delta}} F(r)dr = 0.$$

Итак, мы доказали, что такая функция $u_3(x)$ существует. В качестве $u(x)$ теперь можно взять следующую сумму $u(x) = c_{-1}u_1(x) + u_2(x, c_{-1}) + d_{-1}u_3(x)$, где d_{-1} — произвольная постоянная. Заметим, что $u(x) = c_{-1}r^{-1/2}\sin(\Theta/2) + d_{-1}r^{-1/2}\cos(\Theta/2) + \sum_{j=0}^{\infty} r^{j/2}\big(c_j\sin(j\Theta/2) + d_j\cos(j\Theta/2)\big)$ при $r \to 0$, где все c_j являются коэффициентами из разложений функций $h_\pm(x_1)$, поскольку в разложениях функций u_2 и u_3 при $r \to 0$ все коэффициенты перед синусами нулевые, так как они являются решениями краевых задач с заданной нулевой нормальной производной на $\partial\sigma$ в окрестности точки O.

Аналогичные действия можно проделать в случае других особенностей краевых условий. $\square$

Итак, согласно теореме 1 и условию (2.7)

$$u_1(x) = d_{0,1} + \frac{g_2}{2}r^{1/2}\sin\frac{\Theta}{2} + c_{1,1}r^{1/2}\cos\frac{\Theta}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} r^{j/2}\Big(d_{j,1}\cos\frac{j\Theta}{2} + c_{j,1}\sin\frac{j\Theta}{2}\Big), \quad r \to 0. \tag{2.9}$$

Граничное условие для функции $u_2(x)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = \Big(g_\pm\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{g_\pm^2}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1\partial x_2}\Big)'_{x_1} = \Big(g_\pm\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big)'_{x_1}. \tag{2.10}$$

Согласно теореме 1 из этого вида граничного условия также следует разрешимость задачи на $u_2(x)$ в классе функций $C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\overline{\Omega}\backslash S)$.

Если учесть асимптотические разложения (1.1) и (2.9), то можно найти

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = \Big(\pm\frac{c_{1,2}}{2}g_2x_1^{1/2} + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_{j,2}z^j\Big)_{z=\pm\sqrt{x_1}}\Big), \quad x_1 \to 0.$$

В соответствии с теоремой 1 можно построить гармоническую и ограниченную в Ω функцию $u_2(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash C)$, которая удовлетворяет условию (2.10) и имеет следующее разложение при $r \to 0$:

$$u_2(x) = d_{0,2} + \frac{c_{1,2}}{2}g_2r^{1/2}\sin\frac{\Theta}{2} + d_{1,2}r^{1/2}\cos\frac{\Theta}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} r^{j/2}\Big(d_{j,2}\cos\frac{j\Theta}{2} + c_{j,2}\sin\frac{j\Theta}{2}\Big).$$

Однако впоследствии окажется, что в этом разложении не хватает слагаемого $d_{-1,2}r^{-1/2}\times\cos(\Theta/2)$, а сама функция $u_2(x)$ может иметь особенности в точках O и O'.

Граничная функция для коэффициента $u_3(x)$ уже имеет неинтегрируемые особенности на концах отрезка $\overline{\sigma}$. Действительно, согласно условию (2.5)

$$u_3(x_1, \pm 0) = \Big(g_\pm(x_1)\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) + \frac{g_\pm^2(x_1)}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\partial x_1}(x_1, \pm 0)$$

$$+ \frac{g_\pm^3(r_2)}{3!}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_2^2\partial x_1}(x_1, \pm 0)\Big)'_{x_1} = \Big(\sum_{j=-1}^{\infty} c_{j,3}z^j\Big)'_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \to +0.$$

Следовательно, функция $u_3(x)$ не ограничена около точки O; при приближении к точке O она растет, по крайней мере, как $r^{-1/2}$ (если $g_2 \neq 0$). Однако после согласования асимптотических разложений окажется, что она может расти и как r^{-1}. В классе таких функций в соответствии с теоремой 1 существует решение $u_3(x)$, определенное с точностью до произвольных постоянных c_{-1}, c_{-2}.

Теорема 2. *Существуют функции $u_k(x)$, которые удовлетворяют соотношениям* (2.2), (2.4), (2.5) *и имеют асимтотические разложения*

$$u_k(x) = \sum_{j=-k+1}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos\frac{j\Theta}{2} + c_j r^{j/2} \sin\frac{j\Theta}{2}, \quad r \to 0. \tag{2.11}$$

При определении каждой функции $u_k(x)$ для $k \geqslant 2$ имеются произвольные постоянные $d_{-1,k}$, $d_{-2,k}$, ..., $d_{-k+1,k}$, $d'_{-1,k}$, $d'_{-2,k}$, ..., $d'_{-k+1,k}$.

Доказательство проведем по индукции, опираясь на теорему 1. При $k \leqslant 3$ это утверждение уже проверено. Если утверждение верно для всех $p < k$, то при построении функции $u_k(x)$ остается лишь убедиться в том, что асимптотическое разложение граничной функции (2.5) начинается с члена $r^{(-k+1)/2}$. Действительно, главный член асимптотики в сомножителе $[g_\pm(x_1)]^j$ равен $x_1^{j/2}$, а в сомножителе $\dfrac{\partial^j u_{k+1-j}}{\partial x_2^{j-1}\partial x_1}(x_1, \pm 0)$ главный член по предположению индукции и в силу асимптотического разложения (2.11) равен $cx_1^{(1-k-j)/2}$. Отсюда и из теоремы 1 следует существование искомой функции $u_k(x)$. $\square$

3. Внутреннее разложение

Вблизи концов отрезка σ будем использовать внутренние асимптотические разложения. Будем рассматривать подробно только окрестность точки O. Вблизи этой точки уравнение границы $\partial\sigma_\varepsilon$ имеет вид $x_2 = \varepsilon g_\pm(x_1) = \varepsilon(\pm\sqrt{x_1} + O(x_1))$. Также, как и в [1, гл. III, § 2], в качестве внутренних переменных возьмем $\xi = \varepsilon^{-2}x_1$ и $\eta = \varepsilon^{-2}x_2$. Посредством D будем обозначать область $\{(\xi,\eta)\colon \xi < \eta^2, \eta \in \mathbb{R}^2\}$, через n_D — внутреннюю нормаль к области D, через n — нормаль к кривой $\partial\sigma_\varepsilon$. В переменных ξ, η уравнение границы $\partial\sigma_\varepsilon$ выглядит следующим образом:

$$\eta = \pm\sqrt{\xi} + \varepsilon\Phi_\pm(\xi,\varepsilon), \tag{3.1}$$

где

$$\Phi_\pm(\xi,\varepsilon) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+2}\varepsilon^j z^{j+2}\Big)_{z=\pm\sqrt{\xi}}, \quad \varepsilon\sqrt{\xi} \to 0.$$

Граничное условие (1.3) для функции $v(\xi,\eta,\varepsilon) \equiv u(x_1,x_2,\varepsilon)$ переходит в равенство

$$\frac{\partial}{\partial n} v(\xi, \pm\sqrt{\xi} + \varepsilon\Phi_\pm(\xi,\varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{3.2}$$

Внутреннее разложение будем искать в виде

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi,\eta). \tag{3.3}$$

(Здесь $v_0(\xi,\eta) \equiv 0$, так как $u_0(0,0) = 0$.) Из уравнения (1.2) следует, что

$$\Delta_{\xi,\eta} v_i = 0. \tag{3.4}$$

Подставляя ряд (3.3) в граничное условие (3.2), формально приходим к граничным условиям для $v_i(\xi,\eta)$:

$$\sqrt{1+\frac{1}{4\xi}}\frac{\partial v_1}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\frac{\partial v_1}{\partial \xi}(\xi,\pm\sqrt{\xi})+\frac{\partial v_1}{\partial \eta}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=0, \tag{3.5}$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{4\xi}}\frac{\partial v_i}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=\Big(\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{i-l}\Big(\frac{1}{z}c_{q,l,i}\frac{\partial^{q+1}v_l(\xi,z)}{\partial\xi\eta^q}+\tilde{c}_{q,l,i}\frac{\partial^{q+1}v_l(\xi,z)}{\partial\eta^{q+1}}\Big)z^{q+i-l}\Big)_{z=\pm\sqrt{\xi}},\quad i\geqslant 2. \tag{3.6}$$

Здесь $c_{q,l,i}$ и $\tilde{c}_{q,l,i}$ — некоторые постоянные, которые выражаются через g_j. Эти условия можно представить и в другом виде.

В дальнейших преобразованиях для уменьшения громоздкости временно будем игнорировать зависимость функций $\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)$ от ε. Тогда формально можно получить разложение

$$v(\xi,\eta)\Big|_{\partial\sigma_\varepsilon}=v(\xi,\pm\sqrt{\xi}+\varepsilon\Phi_\pm(\xi,\varepsilon))=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^k v}{\partial\eta^k}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^k(\xi,\varepsilon). \tag{3.7}$$

По условию $\partial v/\partial n\big|_{\partial\sigma_\varepsilon}=0$. Формально разложим это условие по ε. Обозначим $G_\pm(\xi,\varepsilon)=\pm\sqrt{\xi}+\varepsilon\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)$.

Вычислим

$$\frac{\partial v}{\partial n}=(\nabla v,n)=\frac{1}{\sqrt{1+G_\pm'^2}}\Big(\Big(\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}-\varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)\Big)\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\Big).$$

Следовательно,

$$\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}=\varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial\xi} \tag{3.8}$$

или $\partial v/\partial n_D=\varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)/\sqrt{1+1/(4\xi)}\cdot\partial v/\partial\xi$.

В условии (3.8) разложим $\partial v/\partial\xi$ и $\partial v/\partial\eta$ также, как и в (3.7):

$$\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial\xi\partial\eta^k}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^k(\xi,\varepsilon)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial\eta^{k+1}}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^k(\xi,\varepsilon)$$

$$=\varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial\xi\partial\eta^k}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^k(\xi,\varepsilon).$$

Подставим в последнем равенстве вместо функции $v(\xi,\eta)$ ряд V. Получим

$$\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j+1}v_{k-j}}{\partial\xi\partial\eta^j}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^j(\xi,\varepsilon)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j+1}v_{k-j}}{\partial\eta^{j+1}}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^j(\xi,\varepsilon)$$

$$=\varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j+1}v_{k-j}}{\partial\xi\partial\eta^j}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^j(\xi,\varepsilon).$$

Теперь приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε.

ε^0: $\mp\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}\dfrac{\partial v_0}{\partial\xi}(\xi,\pm\sqrt{\xi})+\dfrac{\partial v_0}{\partial\eta}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=0$ или $\pm\dfrac{\partial v_0}{\partial n_D}\Big|_{\partial D}=0$,

ε^1 : $\mp\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}\Big(\dfrac{\partial v_1}{\partial\xi}+\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial\xi\partial\eta}\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)\Big)+\dfrac{\partial v_1}{\partial\eta}+\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial\eta^2}\Phi_\pm=\Phi_\pm'\dfrac{\partial v_0}{\partial\xi}$

или $\dfrac{\partial v_1}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4\xi}}}\dfrac{d}{d\xi}\Big(\dfrac{\partial v_0}{\partial\xi}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)\Big)$,

. . .

$$\varepsilon^k : \frac{\partial v_k}{\partial n_D}(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4\xi}}}\frac{d}{d\xi}\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j v_{k-j}}{\partial\xi\partial\eta^{j-1}}(\xi, \pm\sqrt{\xi})\Phi_{\pm}^{j}(\xi, \varepsilon)\Big),$$

. . .

Затем необходимо разложить $\Phi_{\pm}(\xi, \varepsilon)$ в ряд по ε и переместить полученные слагаемые в нужные условия. Тем не менее для любого k будем иметь условие вида

$$\frac{\partial v_k}{\partial n_D}(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4\xi}}}\frac{d}{d\xi}\Psi_{k,\pm}(\xi),$$

где $\Psi_{k,\pm}(\xi)$ — некоторые функции от ξ, выражающиеся через функции v_0, ..., v_{k-1} и $\Phi_{\pm}$.

Отметим еще одно важное свойство v_k и пар функций $\Psi_{k,\pm}(\xi)$: все они разлагаются в ряды вида $v_k(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = \sum\limits_{j} c_{kj}(\pm\sqrt{\xi})^j$ при $\xi \to \infty$. Такого же вида разложения имеют и производные $\partial v_k/\partial\xi$, $\partial v_k/\partial\eta$ и $\partial v_k/\partial n_D$. Это легко доказать по индукции, используя граничные условия для v_k и свойство этих разложений сохранять свой вид при перемножении и дифференцировании.

Приближенно заменяя границу (3.1) на параболу $\eta = \pm\sqrt{\xi}$, будем искать функции $v_i(\xi, \eta)$ при $\xi < \eta^2$. Аналогично [1, гл. III, §2] при нахождении $v_i(\xi, \eta)$ будем опираться на уже на построенные функции $u_k(x)$ и на условие согласования рядов U и V.

Лемма 2. *Пусть функция $F(\xi, \eta) \in C^\infty(\overline{D})$ и*

$$F(\xi, \eta) = O((\xi^2 + \eta^2)^{-N}) \text{ при } \xi^2 + \eta^2 \to \infty, \quad N > 0, \tag{3.9}$$

$H(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $H(\eta) = O(\eta^{-2N})$, а $v(\xi, \eta) \in C^\infty(\overline{D})$ — стремящееся к нулю (или $v(\xi, \eta) \sim C\ln\rho + o(1), \rho \to \infty$) решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\eta^2, \eta) = H(\eta) \text{ при } \eta \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

$$\Delta_{\xi,\eta} v = F(\xi, \eta) \text{ при } (\xi, \eta) \in D. \tag{3.11}$$

Тогда равномерно в области $\overline{D}$

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\Big(\iint\limits_{D} F(\xi, \eta)d\xi d\eta + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\eta)\sqrt{1+4\eta^2}d\eta\Big) \cdot \ln\rho \\ + \sum_{j=1}^{2N_1}\rho^{-j/2}\Big(c_j \sin\frac{j\Theta}{2} + d_j\cos\frac{j\Theta}{2}\Big) + O(\rho^{-N_1}), \quad \rho \to \infty, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где ρ, Θ — полярные координаты: $\xi = \rho\cos\Theta$, $\eta = \rho\sin\Theta$, $N_1 \to \infty$ при $N \to \infty$, и равенство (3.12) *можно почленно дифференцировать достаточно большое число раз.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отобразим область D на полуплоскость $\eta > 0$ с помощью замены независимых переменных $\xi = s^2 - t^2 - t$, $\eta = s + 2ts$.

Обозначим $v(s^2 - t^2 - t, s + 2ts)$ через $w(s, t)$. Уравнение (3.11) переходит при такой замене в уравнение $\Delta_{s,t} w = [4s^2 + (2t+1)^2] \cdot F(s^2 - t^2 - t, s + 2ts)$, а краевое условие (3.10) — в условие $w_t(s, 0) = H(s)\sqrt{1+4s^2}$.

Обозначая правую часть этого уравнения через $f(s, t)$, $v(s^2 - t^2 - t, s + 2ts)$ — через $w(s, t)$, а функцию $H(s)\sqrt{1+4s^2}$ — через $h(s)$, заключаем, что задача (3.10), (3.11) эквивалентна задаче

$$\Delta_{s,t} w = f(s, t) \text{ при } t \geqslant 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}w(s, 0) = h(s). \tag{3.13}$$

При этом в силу (3.9) $f(s,t) = O((s^2+t^2)^{-N_2})$, $N_2 \to \infty$, при $N \to \infty$.

Решение задачи (3.13) выписывается в явном виде

$$w(s,t) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(s,|t|)\ln\frac{1}{|(s,t)-y|}dy - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\ln\frac{1}{(s-\sigma)^2+t^2}d\sigma$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\tau)\ln\Big(\big((s-\sigma)^2+(t-\tau)^2\big)\big((s-\sigma)^2+(t+\tau)^2\big)\Big)d\sigma d\tau$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\ln((s-\sigma)^2+t^2)d\sigma.$$

Отсюда аналогично [1, с. 111, лемма 2.2] приходим к равенству

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\rho\Big(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\tau)d\sigma d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)d\sigma\Big) + \sum_{j=1}^{2N_1}\rho^{-j/2}\Phi_j(\Theta) + O(\rho^{-N_1}), \quad \rho\to\infty.$$

Так же, как и в [1, с. 111, лемма 2.2], это равенство можно почленно дифференцировать, а функции $\Phi_j(\Theta)$ имеют вид, который фигурирует в равенстве (3.12). Заметим, что поскольку задача Неймана имеет единственное решение в классе растущих на бесконечности, как логарифм, функций при любых непрерывных граничных условиях, то

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\tau)d\sigma d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)d\sigma = \iint\limits_D F(\xi,\eta)d\xi d\eta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\eta)\sqrt{1+4\eta^2}d\eta. \qquad \square$$

Лемма 3. *Пусть ряд* $\tilde v = \sum\limits_{j=-k}^{\infty}\rho^{-j/2}\Big(c_j\sin\frac{j\Theta}{2} + d_j\cos\sin\frac{j\Theta}{2}\Big)$, *где* k *— некоторое натуральное число, является ф. а. р. краевой задачи*

$$\Delta v = 0 \text{ в области } D, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) = \frac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{4\xi+1}}\frac{d}{d\xi}\Psi_\pm(\xi), \quad \xi\geqslant 0, \tag{3.15}$$

при $\rho\to\infty$, *где* $\Psi_\pm(\xi)\in C^\infty(\{\xi\geqslant 0\})$ *и разлагаются в ряды вида* $\Psi_\pm(\xi) \overset{as.}{=} \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j(\pm\sqrt{\xi})^j$, $\rho\to\infty$. *Предположим также, что равенства* (3.14) *и* (3.15) *допускают дифференцирование любого порядка в том смысле, что правые части этих равенств разлагаются в асимптотические ряды, полученные соответствующим почленным дифференцированием ряда* $\tilde v$. *Тогда существует функция* $v(\xi,\eta)\in C^\infty(\overline{D})$, *которая удовлетворяет соотношениям* (3.14), (3.15) *и такая, что*

$$v(\xi,\eta) = \tilde v + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{-j/2}\Big(C_j\sin\frac{j\Theta}{2} + D_j\cos\frac{j\Theta}{2}\Big), \quad \rho\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что на самом деле условие (3.15) гладкое; это видно, если записать его с помощью координаты η:

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\eta,\eta^2) = \frac{2\eta}{\sqrt{1+4\eta^2}}\frac{d}{d\eta^2}\Psi(\eta^2), \quad \eta\in\mathbb{R}.$$

Из гладкости условия (3.15) следует необходимая гладкость функции $v(\xi,\eta)$.

Будем искать v в виде суммы $v_1 + v_2$, где $v_1 = \sum_{j=-k}^{0} \rho^{-j/2} \left(c_j \sin(j\Theta/2) + d_j \cos(j\Theta/2)\right)$, а v_2 является решением задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_2 = 0 \text{ в области } D, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial n_D}(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = \dfrac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{4\xi+1}} \dfrac{d}{d\xi} \Psi_{\pm}(\xi) \mp \dfrac{\partial v_1}{\partial n_D}(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = \dfrac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{4\xi+1}} \dfrac{d}{d\xi} \widetilde{\Psi}_{\pm}(\xi), \quad \xi \geqslant 0. \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Ясно, что ряд $\tilde{v}_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j/2}(c_j \sin(j\Theta/2) + d_j \cos(j\Theta/2))$ будет являться ф.а.р. для задачи (3.16). Кроме того, если представить $\partial v_1/\partial n_D(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = 1/\sqrt{1 + 1/(4\xi)}\ \widetilde{\Psi}'_{1,\pm}(\xi)$, то разложение функций $\widetilde{\Psi}_{1,\pm}(\xi)$ при $\xi \to \infty$ будет иметь тот же вид, что и для функций $\Psi_{\pm}$ в формулировке леммы. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial v_2}{\partial n}\, ds = \int\limits_{+\infty}^{0} \widetilde{\Psi}'_{-}(\xi) d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty} \widetilde{\Psi}'_{+}(\xi) d\xi = \widetilde{\Psi}_{+}(+\infty) - \widetilde{\Psi}_{-}(+\infty) = 0.$$

Значит, v_2 можно искать среди ограниченных функций, а тогда в ее разложении заведомо не будет логарифмов.

Теперь применим тот же прием, что и в доказательстве [1, с. 113, лемма 2.3]. Пусть $\chi(\rho) \in C^{\infty}[0, \infty)$ — срезающая функция, равная нулю в окрестности нуля и единице при $\rho > 1$. Обозначим посредством $v_N(\xi, \eta)$ произведение $\chi(\rho) \cdot B_N \tilde{v}_2$, где $B_N \tilde{v}_2$ означает частичную сумму ряда $\tilde{v}_2$. Из условий задачи (3.16) следует, что $\Delta_{\xi,\eta} v_N = f_N(\xi, \eta)$, $\partial v_N/\partial n_D(\eta^2, \eta) = \Psi(\eta) + h_N(\eta)$, где $f_N(\xi, \eta) = O(\rho^{-N_1})$, $h_N(\eta) = O(|\eta|^{-N_1})$, $N_1 \to \infty$ при $N \to \infty$. Соответствующие оценки верны и для производных функций f_N и h_N.

Пусть $w_N(\xi, \eta)$ — решение краевой задачи $\Delta w_N = f_N$ при $(\xi, \eta) \in D$, $\partial w_N/\partial n_D(\eta^2, \eta) = h_N(\eta)$ при $\eta \in \mathbb{R}$, растущее не быстрее логарифма. Такое решение $w_N(\xi, \eta) \in C^{\infty}(\overline{D})$ существует и в силу леммы 2 имеет асимптотическое представление (3.12).

Разность $v_N(\xi, \eta) - w_N(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям задачи (3.16). В силу единственности ограниченного решения задачи Неймана (с точностью до аддитивной постоянной) функция $v(\xi, \eta) = v_1(\xi, \eta) + v_N(\xi, \eta) - w_N(\xi, \eta)$ не зависит от N при достаточно больших N и является искомой функцией. □

4. Согласование

При построении коэффициентов рядов (2.1) и (3.3) — функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ воспользуемся таблицей согласования этих рядов. В ней второй индекс i берется по номеру раскладываемой функции внутреннего разложения. Надо отметить, что кроме ряда (3.3) необходимо еще построить точно такой же ряд V' с коэффициентами $v'_i(\xi', \eta')$ у конца O'. И одновременно надо следить за выполнением согласования рядов U и V'.

Т а б л и ц а

$U \backslash V$	$\varepsilon v_1(\xi,\eta)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi,\eta)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi,\eta)$	$\varepsilon^4 v_4(\xi,\eta)$	...
$u_0(x)$	$\varepsilon\rho^{1/2}\Phi_{-1,1}(\Theta)$	$\varepsilon^2\rho\Phi_{-2,2}(\Theta)$	$\varepsilon^3\rho^{3/2}\Phi_{-3,3}(\Theta)$	$\varepsilon^4\rho^2\Phi_{-4,4}(\Theta)$	...
	$r^{1/2}\Phi_{-1,1}(\Theta)$	$r\Phi_{-2,2}(\Theta)$	$r^{3/2}\Phi_{-3,3}(\Theta)$	$r^2\Phi_{-4,4}(\Theta)$	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon\Phi_{0,1}$	$\varepsilon^2\rho\Phi_{-1,2}(\Theta)$	$\varepsilon^3\rho\Phi_{-2,3}(\Theta)$	$\varepsilon^4\rho^{3/2}\Phi_{-3,4}(\Theta)$	...
	$\varepsilon\Phi_{0,1}$	$\varepsilon r^{1/2}\Phi_{-1,2}(\Theta)$	$\varepsilon r\Phi_{-2,3}(\Theta)$	$\varepsilon r^{3/2}\Phi_{-3,4}(\Theta)$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon\rho^{-1/2}\Phi_{1,1}(\Theta)$	$\varepsilon^2\Phi_{0,2}$	$\varepsilon^3\rho^{1/2}\Phi_{-1,3}(\Theta)$	$\varepsilon^4\rho\Phi_{-2,4}(\Theta)$	...
	$\varepsilon^2 r^{-1/2}\Phi_{1,1}(\Theta)$	$\varepsilon^2\Phi_{0,2}$	$\varepsilon^2 r^{1/2}\Phi_{-1,3}(\Theta)$	$\varepsilon^3 r\Phi_{-2,4}(\Theta)$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon\varepsilon\rho^{-1}\Phi_{2,1}(\Theta)$	$\varepsilon^2\rho^{-1/2}\Phi_{1,2}(\Theta)$	$\varepsilon^3\Phi_{0,3}$	$\varepsilon^4\rho^{1/2}\Phi_{-1,4}(\Theta)$	...
	$\varepsilon^3 r^{-1}\Phi_{2,1}(\Theta)$	$\varepsilon^3 r^{-1/2}\Phi_{1,2}(\Theta)$	$\varepsilon^3\Phi_{0,3}$	$\varepsilon^3 r^{1/2}\Phi_{-1,4}(\Theta)$	
...	...	...	...	...	...

Построим в соответствии с теоремой 2 функции u_k. При этом функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ определены однозначно, а для $k \geqslant 2$ при определении каждой функции имеется $2(k-1)$ произвольных постоянных $c_{-1,k}, c_{-2,k}, \dots, c_{-k+1,k}, c'_{-1,k}, \dots, c_{-k+1,k}$. Фиксируем пока эти постоянные каким-нибудь образом и выпишем в нижних частях клеток каждой строки в таблице асимптотическое разложение функции $\varepsilon^k u_k(x)$ при $r \to 0$. После перехода к внутренним переменным ξ, η (так что $r = \varepsilon^2\rho$, а полярный угол Θ сохраняет свое значение) в столбцах таблицы появятся ряды $\varepsilon^i V_i$.

Лемма 4. *Ряды V_i являются ф.а.р. краевых задач* (3.4)–(3.6).

Доказательство можно провести аналогично [1, с. 115, лемма 2.4] прямой проверкой граничных условий. □

Далее, опираясь на лемму 3, можно по асимптотическим рядам V_i построить функции $v_i(\xi,\eta)$ — решения задач (3.5), (3.6). Если бы ряды V_i являлись асимптотическими рядами для функций $v_i(\xi,\eta)$ при $\rho \to \infty$, то по построению рядов V_i было бы выполнено условие согласования рядов (2.1) и (3.3). Но, как следует из леммы 3, асимптотический ряд для функции $v_i(\xi,\eta)$, вообще говоря, отличается от ряда V_i на ряд

$$H_i = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j/2}\Big(C_{j,i}\sin\frac{j\Theta}{2} + D_{j,i}\cos\frac{j\Theta}{2}\Big).$$

(Так как этот ряд удовлетворяет однородному граничному условию $\partial H_i/\partial n(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = 0$, то $C_{1,i} = 0$.) Поэтому построение функций $v_i(\xi,\eta)$ надо проводить последовательно.

Сначала построим функцию $v_1(\xi,\eta)$ по ряду V_1. В результате первый столбец в таблице изменится, начиная с члена $\varepsilon^2\rho^{-1/2}\Phi_{1,1}(\Theta)$: функция $\Phi_{1,1}(\Theta)$ изменится на $c_{1,1}\cos(\Theta/2)$. Таким образом, опираясь на теорему 2, окончательно построим функцию $u_2(x)$.

Так как изменение функции $u_2(x)$ влечет за собой изменения в граничных условиях для следующих функций, то все они изменятся. Но их главные члены асимптотики, стоящие в первом столбце таблицы, уже окончательно определены. Ряды V_i при $i \geqslant 2$ также изменятся, но в силу леммы 4 они по-прежнему останутся ф.а.р. задач (3.4)–(3.6). Далее, в соответствии с леммой 3 построим функцию $v_2(\xi,\eta)$ по ряду V_2, стоящему во втором столбце. Теперь этот столбец изменится, начиная с члена $\varepsilon^2\rho^{-1/2}\Phi_{1,2}(\Theta)$. Это дает возможность окончательно определить $u_3(x)$ и так далее.

Таким образом, построены функции $u_k(x)$ — решения задач (2.2)–(2.5) и функции $v_i(\xi,\eta)$ — решения задач (3.4)–(3.6), так что для рядов (2.1) и (3.3) выполнено условие согласования

$$A_{N_1,\xi,\eta}A_{N_2,x}U = A_{N_2,x}A_{N_1,\xi,\eta}V \quad \forall\, N_1,\, N_2,$$

где оператор $A_{\alpha,x}$ — оператор взятия частичной суммы асимптотического ряда, записанного в переменных x [1, с. 21].

Отметим, что функции $v_i(\xi,\eta)$ определены только в области D, т. е., возможно, в более узкой области, чем в области, заданной неравенствами $-\sqrt{\xi}+\varepsilon\Phi_-(\xi,\varepsilon) \leqslant \eta \leqslant \sqrt{\xi}+\varepsilon\Phi_+(\xi,\varepsilon)$. Для разрешения этой проблемы можно, как и в [1, с. 116], считать, что в некоторой фиксированной окрестности нуля $g_+(x_1) \leqslant \sqrt{x_1}$ и $g_-(x_1) \geqslant -\sqrt{x_1}$, так что функции $v_i(\xi,\eta)$ определены всюду в пересечении этой окрестности с Ω_ε. Аналогичные условия будем предполагать выполненными у точки O'.

Обозначим через $S(\delta)$ пересечение области Ω_ε с кругом радиуса δ и с центром в точке O, а через $S'(\delta)$ — пересечение области Ω с кругом того же радиуса и с центром в точке O'. (Множества $S(\delta)$, $S'(\delta)$ зависят и от ε, но эту зависимость не будем включать в их обозначения.)

Пусть $\chi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi(x) = 0$ вне $S(2\delta)$ и $\chi(x) = 1$ внутри $S(\delta)$, где δ — фиксированное малое положительное число, а $\tilde{\chi}(x)$ — аналогичная срезающая функция в окрестности точки O'. Введем обозначение $T_N(x,\varepsilon) = A_{N,x}U + (A_{N,\xi,\eta}V - A_{N,\xi,\eta}A_{N,x}U)\chi(x) + (A_{N,\xi',\eta'}V' - A_{N,\xi',\eta'}A_{N,x}U)\tilde{\chi}(x) - u(x,\varepsilon)$, где U — ряд (2.1), V — ряд (3.3), V' — аналогичный ряд, построенный около точки O', а ξ', η' — внутренние координаты около этой точки.

Теорема 3. *Для всех достаточно больших N всюду в $\overline{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка*

$$\Big|\frac{\partial T_N}{\partial n}(x,\varepsilon)\Big| \leqslant M\varepsilon^{N/4-3},$$

где постоянная M не зависит от x и ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично [1, с. 117, теорема 2.3] можно оценить $\partial T_N/\partial n\big|_{\partial\sigma_\varepsilon} = O(\varepsilon^{N/4-11/4})$, $\Delta T_N = O(\varepsilon^{N-1})$ в Ω_ε. Затем можно воспользоваться устойчивостью факторизованной задачи Неймана [11] и получить требуемую оценку. □

Следствие. *В области $\Omega_\varepsilon \backslash S(\varepsilon^\gamma)$ ряд* (2.1) *является равномерным асимптотическим разложением решения задачи* (1.2)–(1.4). *В области $\Omega_\varepsilon \cap S(\varepsilon^\gamma)$ ряд* (3.3) *является равномерным асимптотическим разложением той же задачи, где γ — любое число такое, что* $0 < \gamma < 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить, что в области $\Omega_\varepsilon \backslash S(\varepsilon^\gamma)$ равномерно мала разность $A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U$, а в области $\Omega_\varepsilon \backslash S(\varepsilon^\gamma)$ равномерно мала разность $A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U$. □

Автор благодарен Арлену Михайловичу Ильину за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
2. **Ильин А.М.** Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай // Мат. сб. 1976. Т. 99(141), № 4. С. 514–537.
3. **Гадыльшин Р.Р.** Асимптотика собственных значений задачи Дирихле в области с узкой щелью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 4. С. 25–48.
4. **Ершов А.А.** Задача об обтекании тонкого диска // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27(242). С. 61–78. (Математика. Механика. Информатика; вып. 14.)
5. **Ершов А.А.** Асимптотическое разложение решения уравнения Лапласа вне тонкого диска // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 92–107.
6. **Федорюк М.В.** Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Тр. семинара С.Л. Соболева. Новосибирск, 1980. № 1. С. 113–131.
7. **Федорюк М.В.** Асимптотика решения задачи Дирихле для оператора Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, № 1. С. 167–186.
8. **Ильин А.М.** Асимптотика решения краевой задачи для уравнения Пуассона вне цилиндра и полуцилиндра // Мат. сб. 1982. Т. 118(160), № 4(6). С. 184–202.
9. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
10. **Ильин А.М.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 2005. 192 с.
11. **Олейник О.А.** Об устойчивости задачи Неймана // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, вып. 1 (67). С. 223–225.

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
ассистент
Челябинский государственный университет
e-mail: ale10919@yandex.ru

Поступила 12.01.2014