ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ[1]

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Рассматривается задача оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы. Основное отличие от ранее исследованных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае система для быстрых переменных не является асимптотически устойчивой. Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the optimal time in a time-optimal control problem with a small parameter.

A time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system is considered. The main difference of this case from systems with fast and slow variables studied earlier is that the system for fast variables is not asymptotically stable. Asymptotic expansions of the optimal time and optimal control with respect to the small parameter at derivatives in the equations of the system are constructed.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problems, small parameter.

Посвящается памяти академика А. М. Ильина

Введение

Рассматривается задача о быстродействии [1–4] для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными [5–9] и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления. В отличие от ранее исследованных систем с быстрыми и медленными переменными в данном случае система для быстрых переменных не является асимптотически устойчивой. В настоящей работе используются методы, развитые в работах [10; 11]. Асимптотика времени быстродействия в данной задаче даже в случае общего положения носит сложный характер, аналогичный асимптотике из работ [10; 11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометри-

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322), программы УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”) и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

ческими ограничениями:

$$
\begin{cases}
\dot{\overline{x}} = A_{12}\overline{y} + A_{13}\overline{z}, & \overline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \overline{y} \in \mathbb{R}^m,\ \overline{z} \in \mathbb{R}^k, \\
\varepsilon^2\dot{\overline{y}} = A_{22}\overline{y} + B_1\overline{u}, & \overline{u} \in \mathbb{R}^r,\ r \geqslant 2, \\
\varepsilon^2\dot{\overline{z}} = B_2\overline{u}, & \|\overline{u}\| \leqslant 1, \\
\overline{x}(0) = x_0,\ \overline{y}(0) = y_0,\ \overline{z}(0) = z_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\
\overline{x}(T_\varepsilon) = 0,\ \overline{y}(T_\varepsilon) = 0,\ \overline{z}(T_\varepsilon) = 0,\ T_\varepsilon \longrightarrow \min .
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма, а $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ — скалярное произведение в рассматриваемых конечномерных пространствах.

Задача (1.1) есть задача быстродействия с быстрыми и медленными переменными. Основное отличие рассматриваемой задачи состоит в том, что некоторые собственные числа матрицы при быстрых переменных равны нулю и тем самым нарушено стандартное условие (см.[8]) асимптотической устойчивости этой матрицы.

Предположение 1. $\mathrm{Re}\ \sigma(A_{22}) < 0$.

Предположение 2. *Система* (A_{22}, B_1) *вполне управляема.*

Аналогично [12] перейдем в задаче (1.1) к новому времени $\tau := t/\varepsilon$ и переобозначим $\overline{x}(\varepsilon\tau)$, $\overline{y}(\varepsilon\tau)$, $\varepsilon\overline{z}(\varepsilon\tau)$, $\overline{u}(\varepsilon\tau)$ и $T_\varepsilon/\varepsilon$ через $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$, $u(\tau)$ и θ_ε соответственно. Тогда задача (1.1) примет следующий вид:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \varepsilon A_{12}y + A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^k, \\
\varepsilon\dot{y} = A_{22}y + B_1u, & u \in \mathbb{R}^r,\ r \geqslant 2, \\
\dot{z} = B_2u, & \|u\| \leqslant 1, \\
x(0) = x_0,\ \overline{y}(0) = y_0,\ z(0) = \varepsilon z_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\
x(\theta_\varepsilon) = 0,\ y(\theta_\varepsilon) = 0,\ z(\theta_\varepsilon) = 0,\ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min .
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

Естественно предположить, что, как и в [12], предельной для (1.2) будет задача

$$
\begin{cases}
\dot{x} = A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^k, \\
\dot{z} = B_2u, & u \in \mathbb{R}^r,\ r \geqslant 2,\ \|u\| \leqslant 1, \\
x(0) = x_0,\ z(0) = 0, \\
x(\theta_\varepsilon) = 0,\ z(\theta_\varepsilon) = 0,\ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min,
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

получающаяся из задачи (1.2), если положить $\varepsilon = 0$.

Предположение 3. $\mathrm{rank}\, B_2 = r$.

Предположение 4. *Управляемая система из задачи* (1.3) *вполне управляема.*

Отметим, что из предположения 3 следует, что $r \leqslant k$.

Предположение 4 в силу критерия вполне управляемости Калмана (см, например, [3]) в данном случае имеет вид

$$
n + k = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 0 & A_{13}B_2 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\,(A_{13}B_2) + \mathrm{rank}\, B_2. \tag{1.4}
$$

Поскольку $\mathrm{rank}\,(A_{13}B_2) \leqslant n$, а $\mathrm{rank}\, B_2 = r \leqslant k$, то из (1.4) получим

$$
\mathrm{rank}\,(A_{13}B_2) = \mathrm{rank}\, A_{13} = n \leqslant k, \quad r = k. \tag{1.5}
$$

Тем самым матрица B_2 обратима, а

$$\operatorname{Ker} A_{13}^* = \{0\}. \tag{1.6}$$

Поэтому, не ограничивая общности (переходя от z к $B_2^{-1}z$ и от A_{12} к $A_{12}B_2$), можно считать, что $B_2 = I_k$ — единичный оператор в пространстве $\mathbb{R}^k$. Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon A_{12}y + A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^k, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{22}y + Bu, & u \in \mathbb{R}^k,\ r \geqslant 2,\ B := B_1, \\ \dot{z} = I_k u, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0,\ \overline{y}(0) = y_0,\ z(0) = \varepsilon z_0, & \\ x(\theta_\varepsilon) = 0,\ y(\theta_\varepsilon) = 0,\ z(\theta_\varepsilon) = 0,\ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min & \end{cases} \tag{1.7}$$

с “предельной” задачей

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^k, \\ \dot{z} = I_k u, & u \in \mathbb{R}^k,\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0,\ z(0) = 0, & \\ x(\theta_\varepsilon) = 0,\ z(\theta_\varepsilon) = 0,\ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min. & \end{cases} \tag{1.8}$$

В матричной форме задачи (1.7) и (1.8) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{w}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon w + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon, & w \in \mathbb{R}^{n+m+k}, \\ \|u_\varepsilon\| \leqslant 1, & u_\varepsilon \in \mathbb{R}^k, \\ w(0) = (x_0^*, y_0^*, \varepsilon z_0^*)^*, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ w(\theta_\varepsilon) = 0,\ \ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = \mathcal{A}_0 v + \mathcal{B}_0 u_0, & v \in \mathbb{R}^{n+k}, \\ \|u_0\| \leqslant 1, & u_0 \in \mathbb{R}^k, \\ v(0) = (x_0^*, 0^*)^*, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ v(\theta_0) = 0,\ \ \theta_0 \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.10}$$

где

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon A_{12} & A_{13} \\ 0 & \varepsilon^{-1}A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}B \\ I_k \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & A_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_k \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

I_n — единичная матрица порядка n; * — знак операции транспонирования матриц (на векторы x, y и z смотрим, как на векторы-столбцы).

Непосредственным вычислением получаем, что

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau} = \begin{pmatrix} I_n & \varepsilon^2 A_{12}A_{22}^{-1}\Big(e^{A_{22}\tau/\varepsilon} - I_m\Big) & \tau A_{13} \\ 0 & e^{A_{22}\tau/\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & I_k \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

$$e^{\mathcal{A}_0 \tau} = \begin{pmatrix} I_n & \tau A_{13} \\ 0 & I_k \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Для сокращения записи формул мы будем использовать обозначения

$$A := A_{12}A_{22}^{-1}, \qquad Ex(\eta) := e^{A_{22}\eta}.$$

2. Разрешимость задачи

Утверждение 1. *Система* $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ *вполне управляема при любом* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Воспользуемся условием, эквивалентным вполне управляемости:

$$\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} l \equiv 0 \Longrightarrow l = 0.$$

В силу (1.11) и (1.13) получим

$$0 \equiv \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} l = \varepsilon B^* \bigl(Ex^*(\tau/\varepsilon) - I_m\bigr) A^* l_x + \tau A_{13}^* l_x + \varepsilon^{-1} B^* Ex^*(\tau/\varepsilon) l_y + l_z \Longrightarrow$$

$$\tau A_{13}^* l_x + l_z - \varepsilon B^* A^* l_x \equiv -\varepsilon B^* Ex^*(\tau/\varepsilon) A^* l_x - \varepsilon^{-1} B^* Ex^*(\tau/\varepsilon) l_y \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty.$$

Поэтому

$$A_{13}^* l_x = 0 \overset{(1.6)}{\Longrightarrow} l_x = 0 \Longrightarrow l_z = 0 \Longrightarrow B^* Ex^*(\tau/\varepsilon) l_y \equiv 0 \overset{\text{предп. } 2}{\Longrightarrow} l_y = 0. \qquad \square$$

Теорема 1. *Задача* (1.8) *разрешима, и* $\theta_0 = 2\sqrt{\|A_{13}^*(A_{13}A_{13}^*)^{-1}x_0\|}$.

Доказательство. В силу принципа максимума Понтрягина [1; 3], который в рассматриваемом случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, оптимальное управление в задаче (1.8) имеет вид

$$u_0(\tau) = \frac{\mathcal{B}_0^* e^{(\theta_0 - \tau)\mathcal{A}_0^*} \widetilde{l}}{\bigl\|\mathcal{B}_0^* e^{(\theta_0 - \tau)\mathcal{A}_0^*} \widetilde{l}\bigr\|}, \quad \widetilde{l} \in \mathbb{R}^{n+k}, \tag{2.1}$$

где $\widetilde{l} = (\widetilde{l}_x^*, \widetilde{l}_z^*)^* \neq 0$ и

$$-e^{\theta_0 \mathcal{A}_0^*} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_0^{\theta_0} e^{\tau \mathcal{A}_0} \mathcal{B}_0 \mathcal{B}_0^* e^{\tau \mathcal{A}_0^*} \widetilde{l} \frac{d\tau}{\bigl\|\mathcal{B}_0^* e^{\tau \mathcal{A}_0^*} \widetilde{l}\bigr\|}.$$

Последнее равенство в силу (1.12) и (1.14) записывается следующим образом:

$$-\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_0^{\theta_0} \begin{pmatrix} \tau^2 A_{13} A_{13}^* \widetilde{l}_x + \tau A_{13} \widetilde{l}_z \\ \tau A_{13}^* \widetilde{l}_x + \widetilde{l}_z \end{pmatrix} \frac{d\tau}{\|\tau A_{13}^* \widetilde{l}_x + \widetilde{l}_z\|}. \tag{2.2}$$

Будем искать $\widetilde{l} \neq 0$ в виде

$$\widetilde{l}_z = -\lambda_0 A_{13}^* \widetilde{l}_x, \quad \lambda_0 > 0. \tag{2.3}$$

Отметим, что $\widetilde{l}_x \neq 0$ и $\lambda_0 A_{13}^* \widetilde{l}_x \neq 0$ в силу (1.6).

Равенство (2.2) при этом распадется на два равенства

$$-x_0 = \frac{A_{13} A_{13}^* \widetilde{l}_x}{\|A_{13}^* \widetilde{l}_x\|} \int\limits_0^{\theta_0} \frac{\tau(\tau - \lambda_0)}{|\tau - \lambda_0|} d\tau, \qquad 0 = \frac{A_{13}^* \widetilde{l}_x}{\|A_{13}^* \widetilde{l}_x\|} \int\limits_0^{\theta_0} \frac{\tau - \lambda_0}{|\tau - \lambda_0|} d\tau. \tag{2.4}$$

Из второго соотношения в (2.4) получим, что $\lambda_0 = \theta_0/2$. При этом первое равенство в (2.4) дает

$$-x_0 = \frac{A_{13} A_{13}^* \widetilde{l}_x}{\|A_{13}^* \widetilde{l}_x\|} \frac{\theta_0^2}{4}. \tag{2.5}$$

Поскольку в силу (1.5) и (1.6) оператор $A_{13} A_{13}^*$ обратим, то

$$\widetilde{l}_x = -\mu Q^{-1} x_0, \quad Q := A_{13} A_{13}^*, \quad \mu > 0. \tag{2.6}$$

Подставляя представление (2.6) в равенство (2.5) получаем $\theta_0^2 = 4\|A_{13}^* Q^{-1} x_0\|$, а значение параметра μ определяется условием нормировки.

Например, если $\|A_{13}^* \widetilde{l}_x\| = 1$, то $\mu^{-1} = \|A_{13}^* Q^{-1} x_0\|$. $\square$

Утверждение 2. *Для задачи* (1.8) *представление оптимального управления в виде* (2.1) *с нормированным вектором* $\widetilde{l}$ *единственно.*

Доказательство. Справедливость утверждения будет непосредственно следовать из [13, лемма 5], как только будет выполнено условие

$$\big(\forall\,\tau\in\mathbb{R}\quad(\tau A_{13}^*\widetilde{l}_{x,1}+\widetilde{l}_{z,1})\parallel((\tau A_{13}^*\widetilde{l}_{x,2}+\widetilde{l}_{z,2})\big)\Longrightarrow\big((\widetilde{l}_{x,1}^*,\widetilde{l}_{z,1}^*)^*\parallel(\widetilde{l}_{x,2}^*,\widetilde{l}_{z,2}^*)^*\big). \tag{2.7}$$

Докажем, что свойство (2.7) выполняется. В силу [18, утверждение 3] из

$$\forall\,\tau\in\mathbb{R}\quad(\tau A_{13}^*\widetilde{l}_{x,1}+\widetilde{l}_{z,1})\parallel(\tau A_{13}^*\widetilde{l}_{x,2}+\widetilde{l}_{z,2})$$

следует, что

$$\begin{pmatrix} A_{13}^*\widetilde{l}_{x,1}\\ \widetilde{l}_{z,1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{13}^* & 0\\ 0 & I_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{l}_{x,1}\\ \widetilde{l}_{z,1}\end{pmatrix}\Big\|\begin{pmatrix} A_{13}^* & 0\\ 0 & I_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{l}_{x,2}\\ \widetilde{l}_{z,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{13}^*\widetilde{l}_{x,2}\\ \widetilde{l}_{z,2}\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} A_{13}^* & 0\\ 0 & I_k\end{pmatrix}=\{0\}$, то $(\widetilde{l}_{x,1}^*,\widetilde{l}_{z,1}^*)^*\parallel(\widetilde{l}_{x,2}^*,\widetilde{l}_{z,2}^*)^*$. Тем самым свойство (2.7) справедливо. □

Теорема 2. *Задача* (1.7) *разрешима при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$. *При этом*

$$\theta_\varepsilon\to\theta_0,\ \text{а}\ l(\varepsilon)\to(\widetilde{l}_x^*,0^*,\widetilde{l}_z^*)^*\ \text{при}\ \varepsilon\to+0,$$

где $l(\varepsilon)=(l_x(\varepsilon)^*,l_y(\varepsilon)^*,l_z(\varepsilon)^*)^*$ — *нормированный вектор представления оптимального управления в задаче* (1.7);

$$u_\varepsilon(\tau)=\frac{\mathcal{B}_\varepsilon^*e^{(\theta_\varepsilon-\tau)\mathcal{A}_0^*}l(\varepsilon)}{\big\|\mathcal{B}_\varepsilon^*e^{(\theta_\varepsilon-\tau)\mathcal{A}_\varepsilon^*}l(\varepsilon)\big\|},\quad l(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{n+m+k}, \tag{2.8}$$

а $\widetilde{l}=(\widetilde{l}_x^*,\widetilde{l}_z^*)^*$ — *нормированный вектор из представления* (2.1) *оптимального управления в задаче* (1.8).

Доказательство. Пусть матрица $\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon$ получается из $\mathcal{A}_\varepsilon$, если взять $A_{12}=0$. Тогда из (1.13) получим, что при любых $\varepsilon>0$ и $\tau\geqslant0$

$$\|e^{\mathcal{A}_\varepsilon\tau}-e^{\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}\|\leqslant\varepsilon^2\|A(Ex(\tau/\varepsilon)-I_m)\|\leqslant K\varepsilon^2$$

при некотором K, не зависящем от $\varepsilon>0$ и $\tau\geqslant0$. Поэтому к задаче (1.7) применимы результаты теорем 2 и 3 и следствие 1 работы [13]. □

3. Основная система уравнений и асимптотика ее решения

Вектор $l(\varepsilon)$ (для сокращения записи будем опускать зависимость от ε) есть решение основного уравнения, аналогичного уравнению (2.2)

$$-\begin{pmatrix} x_0-\varepsilon^2Ay_0+\varepsilon\theta_\varepsilon A_{13}z_0\\ 0\\ \varepsilon z_0\end{pmatrix}=\int\limits_0^{\theta_\varepsilon}\mathcal{C}_\varepsilon(\tau)\mathcal{C}_\varepsilon^*(\tau)l(\varepsilon)\frac{d\tau}{\|\mathcal{C}_\varepsilon^*(\tau)l(\varepsilon)\|}+O\big(\varepsilon^{+\infty}\big),\ \varepsilon\to+0, \tag{3.1}$$

где в силу (1.11) и (1.13)

$$\mathcal{C}_\varepsilon(\tau):=e^{\tau\mathcal{A}_\varepsilon}\mathcal{B}_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon A\big(Ex(\tau/\varepsilon)-I_m\big)B+\tau A_{13}\\ \varepsilon^{-1}Ex(\tau/\varepsilon)B\\ I_k\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Для нахождения асимптотики решения уравнения (3.1) в силу работ [10; 11; 14] достаточно получить асимптотику интеграла из правой части (3.1) относительно малых добавок к предельному вектору $\widetilde{l}$ и, потом, построить асимптотическое решение получившейся системы.

Для нахождения требуемой асимптотики указанного интеграла воспользуемся методом вспомогательного параметра [15; 16].

Разобьем интеграл $J := \int_0^{\theta_\varepsilon}$ из (3.1) в сумму двух интегралов $J = J_1 + J_2$: $J_1 := \int_0^{\mu}$, $J_2 := \int_{\mu}^{\theta_\varepsilon}$, где $\mu = \varepsilon^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Получим асимптотическое разложение интеграла J_2. При $\tau > \mu$ имеем

$$\mathcal{C}(\tau)\mathcal{C}^*(\tau)l$$
$$= \begin{pmatrix} \tau^2 A_{13}A_{13}^* l_x + \tau A_{13} l_z - \varepsilon\tau(ABA_{13}^* + A_{13}B^*A^*)l_x - \varepsilon ABl_z + \varepsilon^2 ABB^*A^*l_x \\ 0 \\ \tau A_{13}^* l_x + l_z - \varepsilon B^*A^*l_x \end{pmatrix} \tag{3.3}$$
$$+ O\big(\varepsilon^{+\infty}\big) := \mathcal{G}(\tau)\mathcal{G}^*(\tau)l + O\big(\varepsilon^{+\infty}\big), \quad \varepsilon \to +0,$$

$$\|\mathcal{C}^*(\tau)l(\varepsilon)\| = \|\tau A_{13}^* l(\varepsilon)_x + l(\varepsilon)_z - \varepsilon B^*A^*l(\varepsilon)_x\| + O\big(\varepsilon^{+\infty}\big) = \|\mathcal{G}^*(\tau)l(\varepsilon)\| + O\big(\varepsilon^{+\infty}\big), \quad \varepsilon \to +0.$$

Поэтому, как и в [18], удобно искать l при специальной нормировке и в специальном виде. Векторы $\widetilde{l}$ и l нормируем условием

$$\|A_{13}^*\widetilde{l}_x\| = 1, \quad \|A_{13}^* l_x\| = 1. \tag{3.4}$$

Введем новые малые неизвестные r, ρ, h, λ, ϑ (их зависимость от ε будем для сокращения записи опускать) и один неизвестный вектор h_0 по формулам

$$\begin{gathered} l_x = \widetilde{l}_x + r, \quad l_z = -\widetilde{\lambda}A_{13}^* l_x + \varepsilon B^*A^*l_x + \rho, \quad \rho \perp A_{13}^* l_x, \\ l_y = \varepsilon(h_0 + h), \quad \theta_\varepsilon = \theta_0 + \vartheta, \quad \widetilde{\lambda} = (\lambda_0 + \lambda), \quad \beta := \|\rho\|. \end{gathered} \tag{3.5}$$

В силу (3.5) имеем

$$\|\mathcal{G}^*(\tau)l\| = \sqrt{(\tau - \widetilde{\lambda})^2 + \beta^2}. \tag{3.6}$$

Поскольку в окрестности $\tau = 0$ подынтегральное выражение в J_2 бесконечно дифференцируемо по τ, то для нахождения разложения всего интеграла J достаточно взять разложение интеграла

$$\widetilde{J}_2 := \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} \mathcal{G}(\tau)\mathcal{G}^*(\tau)l \frac{d\tau}{\|\mathcal{G}^*(\tau)l(\varepsilon)\|}.$$

В этом случае с учетом (3.3), (3.5) и (3.6) получим

$$\widetilde{J}_2 = \begin{pmatrix} F_0(\vartheta,\lambda,\beta)V_0 + F_1(\vartheta,\lambda,\beta)V_1 + F_2(\vartheta,\lambda,\beta)V_2 \\ 0 \\ F_1(\vartheta,\lambda,\beta)A_{13}^* l_x + F_0(\vartheta,\lambda,\beta)\rho \end{pmatrix},$$

$$V_0 := \widetilde{\lambda}A_{13}\rho - \varepsilon AB\rho - \frac{\beta^2}{2}Ql_x, \tag{3.7}$$

$$V_1 := \widetilde{\lambda}Ql_x + A_{13}\rho - \varepsilon ABA_{13}^*,$$

$$V_2 := \frac{1}{2}Ql_x,$$

где

$$F_0(\vartheta,\lambda,\beta)=\ln\left(\frac{\lambda_0+\vartheta-\lambda+\sqrt{(\lambda_0+\vartheta-\lambda)^2+\beta^2}}{-\lambda_0-\lambda+\sqrt{(\lambda_0+\lambda)^2+\beta^2}}\right);$$

$$F_1(\vartheta,\lambda,\beta)=\frac{(\lambda_0+\vartheta-\lambda)^2-(\lambda_0+\lambda)^2}{\sqrt{(\lambda_0+\vartheta-Gl)^2+\beta^2}+\sqrt{(\lambda_0+\lambda)^2+\beta^2}};$$

$$F_2(\vartheta,\lambda,\beta)=(\lambda_0+\vartheta-\lambda)\sqrt{(\lambda_0+\vartheta-\lambda)^2+\beta^2}+(\lambda_0+Gl)\sqrt{(\lambda_0+Gl)^2+\beta^2}.$$

При этом, если r, λ, β и ϑ достаточно малы, то функции F_0, F_1 и F_2 можно представить в следующем виде (напомним, что $\lambda_0=\theta_0/2$):

$$\begin{aligned}
&F_0(\vartheta,\lambda,\beta)=2\ln\frac{\theta_0}{\beta}+\frac{2\vartheta}{\theta_0}+\frac{2\beta^2}{\theta_0^2}-\frac{2}{\theta_0^2}(\lambda^2+(\vartheta-\lambda)^2)+\overset{0}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta),\\
&F_1(\vartheta,\lambda,\beta)=\vartheta-2\lambda+\overset{1}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta),\\
&F_2(\vartheta,\lambda,\beta)=\frac{\theta_0^2}{2}+\theta_0\vartheta+\beta^2+(\vartheta-\lambda)^2+\lambda^2+\overset{2}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta),
\end{aligned}\tag{3.8}$$

где $\overset{0}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta)$, $\overset{1}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta)$ и $\overset{2}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta)$ — сходящиеся степенные ряды, начинающиеся с третьей степени от своих аргументов, с известными коэффициентами.

Теперь рассмотрим асимптотику интеграла J_1. Сделав замену $\tau:=\varepsilon\eta$ в этом интеграле, получим

$$J_1=\varepsilon\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\mathcal{C}(\varepsilon\eta)\mathcal{C}^*(\tau)l\frac{d\tau}{\|\mathcal{C}^*(\varepsilon\eta)l\|},$$

$$\mathcal{C}^*(\varepsilon\eta)l=\big(B^*Ex^*(\eta)h_0+\widetilde{l}_z\big)$$

$$+\Big(-\lambda\widetilde{l}_x-(\lambda_0+\lambda)A_{13}^*r+\rho+\varepsilon B^*Ex^*(\eta)A^*l_x+\varepsilon\eta A_{13}^*l_x+B^*Ex^*(\eta)h\Big)=:q_0(\eta)+q_1(\eta).\tag{3.9}$$

Поэтому

$$\|\mathcal{C}^*(\varepsilon\eta)l\|^{-1}=\frac{1}{\|q_0\|}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\frac{(2<q_0,q_1>+\|q_1\|^2)^i}{\|q_0\|^i}\right),\quad \gamma_1=-\frac{1}{2}.\tag{3.10}$$

Поскольку

$$\varepsilon\mathcal{C}(\varepsilon\eta)\mathcal{C}^*(\varepsilon\eta)l\ =\begin{pmatrix}\varepsilon^2AEx(\eta)-\varepsilon^2AB+\varepsilon^2\eta A_{13}\\ Ex(\eta)B\\ \varepsilon I_k\end{pmatrix}\big(q_0(\eta)+q_1(\eta)\big),\tag{3.11}$$

то компоненты интеграла распадаются на слагаемые двух различных видов

$$\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\mathcal{E}_j(\eta)(l)d\eta}{\|q_0\|^i}\ \text{и}\ \int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\eta^jD_j(l)d\eta}{\|q_0\|^i},$$

где через $\mathcal{E}_j(\eta)$ обозначены известные экспоненциально убывающие при $\eta\to+\infty$ операторы, а через D_j — известные операторы, не зависящие от η.

Отметим, что $\displaystyle\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\mathcal{E}_j(\eta)(l)d\eta}{\|q_0\|^i}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathcal{E}_j(\eta)(l)d\eta}{\|q_0\|^i}+O\big(\varepsilon^{+\infty}\big)$, $\varepsilon\to+0$. Наконец,

$$\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\eta^jD_j(l)d\eta}{\|q_0\|^i}=\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\left(\frac{1}{\|q_0\|^i}-\frac{1}{\|\widetilde{l}_z\|^i}\right)\eta^jD_j(l)d\eta+\frac{1}{\|\widetilde{l}_z\|^i}\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\eta^jD_j(l)d\eta.$$

Но первый интеграл в этой сумме имеет первый тип и сводится к интегралу по $[0;+\infty)$, а второй дает слагаемые, которые сокращаются с аналогичными слагаемыми из интеграла $\int\limits_0^{\mu} \mathcal{G}\mathcal{G}^* l \dfrac{d\tau}{\|\mathcal{G}^* l\|}$.

При этом в силу (3.1) и (3.2) неизвестный вектор h_0 есть решение уравнения (отметим, что вектор $\widetilde{l}_z$ известен):

$$0 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{Ex(\eta)B\big(B^*Ex^*(\eta)h_0 + \widetilde{l}_z\big)}{\|B^*Ex^*(\eta)h_0 + \widetilde{l}_z\|} d\eta. \tag{3.12}$$

Предположение 5. *Уравнение* (3.12) *имеет решение.*

Утверждение 3. *Если* $A_{22} = -\alpha I_m$, $\alpha > 0$, *то предположение* 5 *выполнено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этом случае $h_0 = -\nu(BB^*)^{-1}B\widetilde{l}_z$ при некотором $\nu > 0$. Пусть

$$f(\nu) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\big(-\nu e^{-2\eta} + e^{-\eta}\big)}{\|-\nu e^{-2\eta}B^*(BB^*)^{-1}B^*\widetilde{l}_z + \widetilde{l}_z\|} d\eta.$$

Тогда уравнение (3.12) имеет вид $0 = f(\nu)B\widetilde{l}_z$. Если $B\widetilde{l}_z = 0$, то $h_0 = 0$. Если же $B\widetilde{l}_z \neq 0$, то и $B^*(BB^*)^{-1}B^*\widetilde{l}_z \neq 0$. При этом $f(0) = 1/(\alpha\|\widetilde{l}_z\|) > 0$, а $f(\nu) \to -\infty$ при $\nu \to +\infty$. Поэтому существует ν_0 такое, что $f(\nu_0) = 0$. □

Таким образом, необходимое разложение интеграла в (3.1) получено.

Система первого приближения для (3.1) в силу (3.7)–(3.11) имеет вид

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-2\varepsilon A_{13}\, z_0 & = & \dfrac{\theta_0}{2} Q\, r_1 + \vartheta_1 Q\, \widetilde{l}_x + (\vartheta_1 - 2\lambda_1)\, Q\, \widetilde{l}_x + 2\ln\dfrac{\theta_0}{\beta_1} A_{13}\, \rho_1, \\
0 & = & \varepsilon P_1 + \lambda_1 P_2 + D_{1,r}\, r_1 + D_{1,\rho}\, \rho_1 + D_{1,h}\, h_1, \\
-\varepsilon z_0 & = & (\vartheta_1 - 2\lambda_1)\, A_{13}^*\, \widetilde{l}_x + 2\rho_1 \ln\dfrac{\theta_0}{\beta_1}, \\
0 & = & \langle A_{13}^*\widetilde{l}_x,\, A_{13}^* r_1\rangle, \\
0 & = & \langle A_{13}^*\widetilde{l}_x,\, \rho_1\rangle.
\end{array}\right. \tag{3.13}$$

Здесь P_1, P_2 — известные постоянные векторы, а $D_{1,r}$, $D_{1,\rho}$, $D_{1,h}$ — известные линейные операторы. В частности,

$$D_{1,h}h = \int\limits_0^{+\infty} \frac{Ex(\eta)B}{\|q_0(\eta)\|} \left(\frac{q_0(\eta)}{\|q_0(\eta)\|}\langle B^*Ex^*(\eta)h, q_0(\eta)\rangle + B^*Ex^*(\eta)h\right) d\eta.$$

При $h \neq 0$ имеем

$$\langle D_{1,h}h, h\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\|q_0(\eta)\|} \left(\frac{\langle B^*Ex^*(\eta)h, q_0(\eta)\rangle^2}{\|q_0(\eta)\|} + \|B^*Ex^*(\eta)h\|^2\right) d\eta \neq 0.$$

Следовательно, (в силу предположения 2) $\operatorname{Ker} D_{1,h} = \{0\}$ и $D_{1,h}$ обратим. Умножая скалярно первое и третье уравнения системы (3.13) на $\widetilde{l}_x$ и $A_{13}^*\widetilde{l}_x$ соответственно, найдем

$$\vartheta_1 = -\varepsilon\langle z_0, A_{13}^*\widetilde{l}_x\rangle, \quad \lambda_1 = 0, \quad r_1 = \frac{2\varepsilon}{\theta_0} Q^{-1}\big(\langle A_{13}\, z_0, \widetilde{l}_x\rangle - A_{13}\, z_0\big).$$

Далее, ρ_1 удовлетворяет уравнению

$$2\rho_1 \ln \frac{\theta_0}{\beta_1} = -\varepsilon z_0 + \varepsilon A_{13}^* \widetilde{l}_x \langle z_0, A_{13}^* \widetilde{l}_x \rangle =: \varepsilon v_0. \tag{3.14}$$

Отметим, что $v_0 = 0 \Longleftrightarrow A_{13}^* \widetilde{l}_x \parallel z_0 \overset{(2.6)}{\Longleftrightarrow} A_{13}^* Q^{-1} x_0 \parallel z_0$.

Предположение 6.

$$A_{13}^* Q^{-1} x_0 \nparallel z_0.$$

Предположение 6 соответствует случаю общего положения (т.е. сохраняется при малых изменениях векторов).

Тем самым в уравнении (3.14) $v_0 \neq 0$ и $\beta_1 = \|\rho_1\|$ удовлетворяет уравнению

$$2\beta_1 \ln\Big(\frac{\theta_0}{\beta_1}\Big) = \varepsilon \|v_0\|. \tag{3.15}$$

Обозначив $\delta := \beta_1/\theta_0$ и $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon\|v_0\|/(2\theta_0)$, получаем уравнение $\delta \ln(1/\delta) = \widetilde{\varepsilon}$. Пусть $W_0(\widetilde{\varepsilon})$ — функция, обратная к функции $\delta \ln(1/\delta)$ при малых δ . Тогда (см. [10; 11])

$$\beta_1 = \theta_0 W_0\Big(\frac{\varepsilon\|v_0\|}{2\theta_0}\Big) =: W(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.16}$$

Отметим также, что в силу (3.15) и (3.16)

$$\varepsilon \ln^{-1} \frac{\theta_0}{\beta_1} = \frac{2}{\|v_0\|}\beta_1, \quad \ln \frac{\theta_0}{\beta_1} = \ln \theta_0 + \ln \frac{1}{W(\varepsilon)} = \frac{2\varepsilon\|v_0\|}{W(\varepsilon)}.$$

Таким образом,

$$\rho_1 = W(\varepsilon)\widetilde{P}_1, \quad h_1 = \varepsilon D_{1,h}^{-1} \widetilde{P}_2 + W(\varepsilon) D_{1,h}^{-1} D_{1,\rho} \widetilde{P}_1.$$

Далее, как и в [18], получаются асимптотические разложения для всех указанных величин (3.4) и (3.5). Отметим, что в силу (3.1) для времени быстродействия поправка ϑ_2 второго порядка малости по ε будет иметь вид

$$\vartheta_2 = R_2\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big) \not\equiv R_2\big(\varepsilon, 1\big),$$

где $R_2\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big) = O(\varepsilon^2)$ — рациональная функция своих аргументов.

Вид всех разложений искомых величин подобен виду разложений в [10; 11], и справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При выполнении предположений* 1–6 *время быстродействия* T_ε *и компоненты вектора* $l(\varepsilon)$ *раскладываются в асимптотические ряды вида* $\sum_{k=0}^{\infty} R_k\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big)$, *где* $R_k(\cdot)$ — *рациональные функции своих аргументов и* $R_k\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big) = O(\varepsilon^k)$ *при* $\varepsilon \to +0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
5. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
6. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.

7. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
8. **Гичев Т.Р., Дончев А.Л.** Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
9. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
10. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий // Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 96–103.
11. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
12. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
13. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып 14.)
14. **Парышева Ю.В.** Асимптотика решения линейной задачи оптимального управления в сингулярном случае // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 266–270.
15. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярных эллиптических задач // Мат. сб. 1998. Т. 189 (34), № 11. С. 27–60.
16. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстро стабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
17. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстродействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 67–79.
18. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в задаче о быстродействии с двумя малыми параметрами // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 92–99.

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 20.10.2014

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент УрФУ
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: koo@imm.uran.ru