ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.928:517.984

О СОБСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА В КРУГЕ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ НА МАЛОМ УЧАСТКЕ ГРАНИЦЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Р. Р. Гадыльшин, С. В. Репьевский, Е. А. Шишкина

Рассмотрена краевая задача на собственные значения для отрицательного оператора Лапласа в круге с граничным условием Неймана почти на всей окружности за исключением малой дуги, длина которой стремится к нулю и на которой выставлено граничное условие Дирихле. Построены полные асимптотики по параметру (длине малой дуги) собственного значения такой задачи, сходящегося к двукратному собственному значению предельной задачи Неймана.

Ключевые слова: оператор Лапласа, сингулярное возмущение, малый параметр, собственное значение, асимптотика.

R. R. Gadyl'shin, S. V. Rep'evskii, E. A. Shishkina. On an eigenvalue for the Laplace operator in a disk with Dirichlet boundary condition on a small part of the boundary in a critical case.

A boundary-value problem of finding eigenvalues is considered for the negative Laplace operator in a disk with Neumann boundary condition on almost all circle except for a small arc of vanishing length, where the Dirichlet boundary condition is imposed. Complete asymptotic expansions with respect to a parameter (the length of the small arc) are constructed for an eigenvalue of this problem; the eigenvalue converges to a double eigenvalue of the Neumann problem.

Keywords: Laplace operator, singular perturbation, small parameter, eigenvalue, asymptotics.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Обозначим через Ω круг единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть x_0 — точка с декартовыми координатами $(1,0)$, (r,φ) — полярные координаты. Обозначим $\gamma_\varepsilon = \{x \in \partial\Omega\colon \varepsilon a < \varphi < \varepsilon b\}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$; $\Gamma_\varepsilon := \partial\Omega \backslash \overline{\gamma_\varepsilon}$. Из [1] следует, что при $\varepsilon \to 0$ собственные значения краевой задачи

$$-\Delta\psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon\psi^\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \psi^\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \tag{1.1}$$

сходятся к собственным значениям краевой задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial r} = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

с учетом совокупной кратности. В свою очередь, хорошо известно, что задача (1.2) имеет либо простые собственные значения, совпадающие с квадратами нулей производной функции Бесселя нулевого порядка $\mathcal{J}_0$, либо двукратные собственные значения, совпадающие с квадратами нулей производной функции Бесселя m-го порядка $\mathcal{J}_m$, $m \geqslant 1$.

[1]Работа первого автора выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки России. Второй автор поддержан РФФИ (проект 14-01-00322). Работа третьего автора поддержана РФФИ (проект 15-01-07920).

В работе методом согласования асимптотических разложений [2–4] получено асимптотическое разложение по малому параметру ε собственного значения краевой задачи (1.1), сходящегося к двукратному собственному значению краевой задачи (1.2), а именно доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть λ_0 — двукратное собственное значение предельной краевой задачи* (1.2)*, являющееся квадратом нуля производной функции Бесселя $\mathcal{J}_m$. Тогда существует собственное значение λ^ε краевой задачи* (1.1)*, которое имеет асимптотику*

$$\lambda^\varepsilon =\lambda_0 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \, \lambda_{i+2,k}, \tag{1.3}$$

$$\lambda_{2k+2,k} =(-1)^k \frac{\lambda_0 m^2}{(\lambda_0 - m^2)} \frac{(b-a)^{2k+2}(\lambda_0+8)^k}{4^{2k+1}}, \quad k \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Структура работы следующая. Во втором разделе представлены предварительные сведения и вспомогательные утверждения. Главные члены (1.4) асимптотического разложения (1.3) выводятся в третьем разделе. В четвертом разделе строится полная формальная асимптотика (1.3) собственного значения. И, наконец, в пятом, заключительном, разделе, дается обоснование построенного разложения, что и завершает доказательство теоремы 1.1.

Следует заметить, что асимптотики собственных значений для лапласиана с аналогичной сменой типа граничного условия в более простом случае, когда область имеет выпрямленный участок границы, на котором и проводится смена типа граничного условия, исследовались в [5]. Для круга же в [6] была построена двучленная асимптотика минимального значения в случае, когда, наоборот, на большей части границы было выставлено граничное условие Дирихле, а на малой — Неймана. Отметим также, что задачи со сменной типа граничных условий на малых частях границ, число которых стремится к бесконечности при стремлении к нулю длины каждого участка, исследовались в [7; 8] методами усреднения [9–11].

2. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

В окрестности точки x_0 введем новые переменные $y_1 = \varphi$, $y_2 = 1 - r$, где, напомним, (r, φ) — полярные координаты для переменной $x = (x_1, x_2)$. Замены переменных $y(x)$ и $x(y)$ будут использоваться только в окрестности точек $x = x_0$ и $y = 0$, соответственно, где они взаимно однозначны. В переменной $y = (y_1, y_2)$ оператор Δ приобретает вид

$$\Delta = \Delta_y + \sum_{k=-1}^{\infty} L_k^y, \quad L_k^y := -y_2^{k+1} \frac{\partial}{\partial y_2} + (k+3) y_2^{k+2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \tag{2.1}$$

где Δ_y означает оператор Лапласа по переменной y. В дальнейшем операторы (2.1) будут рассматриваться и в переменных $\xi = \varepsilon^{-1} y = (\xi_1, \xi_2)$. В этом случае мы будем использовать обозначения Δ_ξ и L_k^ξ.

Всюду далее через $P_n(y)$, $P_n^{(i)}(y)$ будем обозначать однородные полиномы степени n, а через $Z_n(y)$, $Z_n^{(i)}(y)$ — однородные гармонические полиномы степени n. Очевидно, что любой гармонический полином $Z_n(y)$ представим в виде $Z_n(y) = \alpha X_n(y) + \beta Y_n(y)$, где $Y_n(y) = \tau^n \sin n\theta$, $X_n(y) = \tau^n \cos n\theta$, τ, θ – полярные координаты для переменных y, а α и β – некоторые постоянные.

Лемма 2.1. *Пусть $k \geqslant 0$, j — целое, $M = (j+2)(j+2+2k)$. Тогда уравнение $\Delta_y U = \tau^j Z_k$ имеет решение $U(y) = p\,\tau^{j+2} Z_k(y)$, где p — некоторое число, если $M \neq 0$, и $U(y) = (2j+4+2k)^{-1} \tau^{j+2} Z_k(y) \ln \tau$, если $M = 0$.*

Для $j \geqslant 0$ уравнение $\Delta_y U = \tau^j Z_k \ln \tau$ имеет решение $U(y) = \tau^{j+2} Z_k(y)(p \ln \tau + q)$, где p, q — некоторые числа.

Лемма 2.2. *Для любого $P_j(y)$ справедливо равенство*

$$P_j(y) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \tau^{2s} Z_{j-2s}(y).$$

Лемма 2.3. *Для любых $Z_k(y)$, $P_j(y)$ $(k > j)$ справедливо равенство*

$$Z_k(y)P_j(y) = \sum_{s=0}^{j} \tau^{2s} Z_{k+j-2s}(y).$$

Первое и третье утверждения доказаны в [13], а второе — в [14, гл. XI, § 2].

Обозначим через $\widehat{\mathcal{A}}_k$ множество рядов вида

$$\mathcal{E}(y) = \Phi_0(y) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(y), \tag{2.2}$$

где $\Phi_0(y) = A\dfrac{X_k(y)}{\tau^{2k}}$ при $k \geqslant 1$ и $\Phi_0(y) = A\ln\tau$ при $k = 0$, A — произвольная постоянная,

$$\Phi_n(y) = \sum_{j=0}^{2n} \tau^{-2k-2n+2j} Z_{k+3n-2j}(y) + \delta_k^n \alpha_1 \ln\tau, \quad 1 \leqslant n \leqslant k, \tag{2.3}$$

$$\Phi_n(y) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k+3n}{2}\right]} \tau^{-2k-2n+2j} Z_{k+3n-2j}(y) + \ln\tau \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \tau^{2j} Z_{n-k-2j}(y), \quad n \geqslant k+1, \tag{2.4}$$

δ_k^n — символ Кронекера, а α_1 — любое число.

На основе метода математической индукции и исходя из лемм 2.1, 2.2, 2.3 в [13, доказательство теоремы 1.1] была показана справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.4. *Для любого ряда $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{A}}_k$ и любого числа A существует ряд $\mathcal{E} \in \widehat{\mathcal{A}}_k$ такой, что $\Phi_0(y) = A\tau^{-2k} X_k(y)$ при $k \geqslant 1$, $\Phi_0(y) = A\ln\tau$ при $k = 0$ и справедливы равенства*

$$\begin{gathered} -\Delta_y \Phi_0 = 0, \qquad -\Delta_y \Phi_1 = L_{-1}\Phi_0, \\ -\Delta_y \Phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} L_{i-1}\Phi_{n-i-1} + \lambda_0 \Phi_{n-2} + \widetilde{\Phi}_{n-2}, \; n \geqslant 2, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\Phi_n(y)$ и $\widetilde{\Phi}_n(y)$ — члены рядов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.

Из (2.1) вытекает, что если ряд $\mathcal{E}(y)$ удовлетворяет утверждению леммы 2.4, то ряд $\mathcal{E}(y(x))$ является асимптотическим решением уравнения

$$-\Delta\mathcal{E}(y(x)) = \lambda_0 \mathcal{E}(y(x)) - \mathcal{F}(y(x)) \quad \text{при } x \to x_0. \tag{2.6}$$

Однако нам в дальнейшем понадобится, чтобы это асимптотическое решение удовлетворяло и однородному граничному условию Неймана. В переменных y это означает, что от членов $\Phi_n(y)$ ряда $\mathcal{E}(y)$ дополнительно требуется выполнение условия

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y_2}(y_1, 0) = 0, \quad y_1 \neq 0. \tag{2.7}$$

Очевидно, что главные члены $\Phi_0(y)$ асимптотических рядов из $\widehat{\mathcal{A}}_k$ удовлетворяют условию (2.7). Из (2.3) также легко видеть, что при $1 \leqslant n \leqslant k-1$, добавляя к $\Phi_n(y)$ гармоническое слагаемое $\beta Y_{k-n}(y)\tau^{-2(k-n)}$, где, напомним, $Y_m(y) = \tau^m \sin m\theta$, для вновь полученной функции, во-первых, за счет выбора β добиваемся равенства (2.7), а во-вторых, сохраняем представление (2.3). С другой стороны, из (2.3) и (2.4) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_n}{\partial y_2}(y_1,0) =&\alpha_1 y_1|y_1|^{-2}, \quad y_1\neq 0, \quad n=k\geqslant 1,\\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial y_2}(y_1,0) =&\alpha_2 y_1^{n-k-1}+\alpha_3 y_1^{n-k-1}\ln|y_1|, \quad y_1\neq 0, \quad n\geqslant k+1.\end{aligned}$$

Конечно, добавляя к $\Phi_n(y)$ гармоническое слагаемое $\beta_1\theta$ для $n=k\geqslant 1$ и гармонические слагаемые $\beta_2 Y_{n-k}(y)$, $\beta_3(\theta X_{n-k}(y)+Y_{n-k}(y)\ln\tau)$ для $n\geqslant k+1$, за счет выбора β_i для подправленных функций легко добиться равенства (2.7). Однако при этом структура (2.3) и (2.4) для $\Phi_n(y)$ при $n\geqslant k\geqslant 1$ изменится. Более того, в силу дополнительного слагаемого у $\Phi_k(y)$ изменится и структура правой части уравнения для $\Phi_{k+1}(y)$ и т. д. Поэтому для построения асимптотического решения уравнения (2.6) необходимо показать справедливость следующего утверждения, являющегося аналогом леммы 2.1.

Лемма 2.5. *При $j\geqslant 0$ уравнение $\Delta_y U=\tau^j Z_k\theta$ имеет решение*

$$U(y)=\tau^{j+2}(M^{-1}\theta Z_k(y)+Z_k'(y)),$$

где постоянная $M\neq 0$ из условия леммы 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно проверяются равенства

$$\begin{aligned}\Delta_y\left(\tau^{j+2}X_k\theta\right) =&\tau^j M X_k\theta-2k\tau^j Y_k,\\ \Delta_y\left(\tau^{j+2}Y_k\theta\right) =&\tau^j M Y_k\theta+2k\tau^j X_k.\end{aligned}$$

Так как $M\neq 0$, то из этих равенств вытекает справедливость доказываемой леммы.

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ множество рядов вида (2.2), где $\Phi_0(y)=A\dfrac{X_k(y)}{\tau^{2k}}$ при $k\geqslant 1$ и $\Phi_0(y)=A\ln\tau$ при $k=0$, A — произвольная постоянная,

$$\Phi_n(y)=\sum_{j=0}^{2n}\tau^{-2k-2n+2j}Z_{k+3n-2j}(y)+\delta_k^n(\alpha_1\ln\tau+\alpha_2\theta), \quad 1\leqslant n\leqslant k,$$

$$\Phi_n(y)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{k+3n}{2}\right]}\tau^{-2k-2n+2j}Z_{k+3n-2j}(y)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\tau^{2j}\left(\ln\tau Z_{n-k-2j}(y)+\theta Z'_{n-k-2j}(y)\right), \quad n\geqslant k+1,$$

причем выполняются равенства (2.7).

Следуя доказательству теоремы 1.1 из [13] с использованием лемм 2.1–2.3, 2.5 и приведенных выше соображений, легко показать справедливость следующего аналога леммы 2.4, учитывающего, однако, еще и требуемое граничное условие.

Лемма 2.6. *Для любого ряда $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathcal{A}}_k$ и любого числа A существует ряд $\mathcal{E}\in\widetilde{\mathcal{A}}_k$ такой, что $\Phi_0(y)=A\tau^{-2k}X_k(y)$ при $k\geqslant 1$, $\Phi_0(y)=A\ln\tau$ при $k=0$ и справедливы равенства* (2.5), *где $\Phi_n(y)$ и $\widetilde{\Phi}_n(y)$ — члены рядов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.*

Вычислим несколько первых функций $\Phi_n(y)$ для модельного ряда $\mathcal{E}_1$. Нас интересует коэффициент при первом слагаемом, содержащем $\ln\tau$.

Лемма 2.7. *Существует ряд $\mathcal{E}_1\in\widetilde{\mathcal{A}}_1$, удовлетворяющий утверждению леммы* 2.6 *при $\mathcal{F}=0$ и такой, что*

$$\Phi_0(y)=\tau^{-2}X_1, \quad \Phi_1(y)=-\frac{1}{4}\tau^{-2}Y_2(y)+\frac{1}{8}\tau^{-4}Y_4(y), \tag{2.8}$$

$$\Phi_2(y)=\left(\frac{1}{2}\lambda_0+4\right)X_1(y)\ln\tau+\frac{59}{16}\tau^{-2}X_3(y)-\frac{55}{48}\tau^{-4}X_5(y)+\frac{1}{4}\tau^{-6}X_7(y). \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя $\Phi_0(y)$ в (2.5), получаем уравнение для $\Phi_1(y)$:

$$-\Delta_y \Phi_1 = L_{-1}\Phi_0 = -\frac{Y_2}{\tau^4} + 2\frac{Y_4}{\tau^6}.$$

В силу леммы 2.1 функция $\Phi_1(y)$, определяемая равенством (2.8), удовлетворяет этому уравнению. Непосредственно проверяется выполнение равенства (2.7).

С учетом найденного $\Phi_1(y)$ выписывается уравнение для $\Phi_2(y)$:

$$-\Delta_y \Phi_2 = L_{-1}\Phi_1 + L_0\Phi_0 + \lambda_0\Phi_0 = -(\lambda_0+8)\tau^{-2}X_1 + \frac{59}{2}\tau^{-4}X_3 - \frac{55}{2}\tau^{-6}X_5 + 12\tau^{-8}X_7.$$

В силу леммы 2.1 функция $\Phi_2(y)$, определяемая равенством (2.9), удовлетворяет этому уравнению и, очевидно, для нее выполняется равенство (2.7). Лемма доказана.

Заметим, что с учетом равенства

$$\int\limits_0^1 \mathcal{J}_m^2\big(\sqrt{\lambda_0}r\big)r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{m^2}{\lambda_0}\Big)\mathcal{J}_m^2\big(\sqrt{\lambda_0}\,\big)$$

(см., например, [12, § Д1, п. 2]), ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, соответствующие двукратному собственному значению задачи (1.2), имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi(\lambda_0-m^2)}}\mathcal{J}_m^{-1}\big(\sqrt{\lambda_0}\,\big)\mathcal{J}_m\big(\sqrt{\lambda_0}r\big)\cos m\varphi, \\ \psi_0^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi(\lambda_0-m^2)}}\mathcal{J}_m^{-1}\big(\sqrt{\lambda_0}\,\big)\mathcal{J}_m\big(\sqrt{\lambda_0}r\big)\sin m\varphi. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\psi_0^{(1)}(x(y)) = \phi_1 + O(\tau^2),\ \tau\to 0, \qquad \phi_1 = \psi_0^{(1)}(x_0) = \sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi(\lambda_0-m^2)}}, \\ &\psi_0^{(2)}(x(y)) = \phi_2 y_1 + O(\tau^2),\ \tau\to 0, \quad \phi_2 = \frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial\varphi}(x_0) = m\sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi(\lambda_0-m^2)}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{A}_k$ множество функций из $C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{x_0\})$ с асимптотикой из $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ в точке x_0, нормальная производная которых обращается в ноль на $\partial\Omega\backslash\{x_0\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $F\in\mathcal{A}_k$, A — произвольная постоянная. Тогда существует функция $E\in\mathcal{A}_k$, имеющая главный член асимптотики при $x\to x_0$, равный $A\tau^{-2k}X_k(y)$ при $k\geqslant 1$ и $A\ln\tau$ при $k=0$ в переменных y и являющаяся решением уравнения*

$$-(\Delta+\lambda_0)E = F + \Lambda_1\psi_0^{(1)} + \Lambda_2\psi_0^{(2)}, \quad x\in\Omega \tag{2.12}$$

при некоторых числах Λ_1, Λ_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathcal{A}}_k$ асимптотическое разложение функции $F\in\mathcal{A}_k$ при $x\to x_0$, записанное в переменной y. Пусть $\mathcal{E}$ — ряд из $\widetilde{\mathcal{A}}_k$, удовлетворяющий утверждениям леммы 2.6, а $\mathcal{E}^{(M)}$ — его частичная сумма до членов порядка $O(\tau^M\ln\tau)$, где M — достаточно большое положительное число.

Обозначим через $\chi(t)$ бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, тождественно равную единице при $t<1$ и равную нулю при $t>2$. Функцию E будем искать в виде

$$E(x;M) = \chi(3\tau(x))\mathcal{E}^{(M)}(y(x)) + S_M(x). \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.12), получаем краевую задачу для S_M:

$$-(\Delta+\lambda_0)S_M = G_M + \Lambda_1\psi_0^{(1)} + \Lambda_2\psi_0^{(2)}, \quad x\in\Omega, \quad \frac{\partial S_M}{\partial r} = 0, \quad x\in\partial\Omega, \tag{2.14}$$

где

$$G_M = F + \chi(3\tau)\,(\Delta+\lambda_0)\,\mathcal{E}^{(M)} + \left(\mathcal{E}^{(M)}\Delta\chi(3\tau) + 2\nabla\mathcal{E}^{(M)}\cdot\nabla\chi(3\tau)\right).$$

Следовательно, $G_M \in C^{M-3}(\overline{\Omega})$ в силу леммы 2.6.

Из необходимого и достаточного условия разрешимости краевой задачи (2.14) в $W_2^1(\Omega)$ следует, что

$$\Lambda_j(M) = -\int\limits_\Omega G_M\psi_0^{(j)}dx,$$

причем в силу теорем о повышении гладкости $S_M \in C^{M-1}(\overline{\Omega})$.

Покажем, что $\Lambda_j(M)$ не зависит от M. Для этого рассмотрим разность $Q_M(x) = E(x;M) - E(x;3)$, где $M \geqslant 4$. По построению $Q_M \in C^2(\overline{\Omega})$ и

$$-(\Delta+\lambda_0)Q_M = (\Lambda_1(M)-\Lambda_1(3))\psi_0^{(1)} + (\Lambda_2(M)-\Lambda_2(3))\psi_0^{(2)}, \quad \frac{\partial Q_M}{\partial r} = 0, \quad x\in\partial\Omega.$$

В силу условия разрешимости этой краевой задачи получаем, что $\Lambda_j(M) = \Lambda_j(3) = \Lambda_j$ и не зависит от M, а $Q_M(x) = c_{M,1}\psi_0^{(1)}(x) + c_{M,2}\psi_0^{(2)}(x)$. Если функции $E(x;M)$ нормализовать, например, условием

$$\int\limits_\Omega (E(x;M)-E(x;3))\psi_0^{(j)}dx = 0,$$

то они также не будут зависеть от M, т.е. $E(x;M) = E(x)$. Отсюда в силу произвола в выборе M следует, что $E\in\mathcal{A}_k$. Теорема доказана.

Лемма 2.8. *Существует функция $E_1\in\mathcal{A}_1$, имеющая асимптотику*

$$E_1(x(y)) = \Phi_0(y) + \Phi_1(y) + \Phi_2(y) + O(\tau^2\ln\tau), \ \tau\to 0, \tag{2.15}$$

где $\Phi_j(y)$ — из леммы 2.7, которая удовлетворяет уравнению (2.12) при $F(x)=0$, и

$$\Lambda_1 = 0, \quad \Lambda_2 = -\pi\phi_2. \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя доказательству теоремы 2.1, в силу леммы 2.7 и граничных условий получаем, что при $F=0$ существует решение уравнения (2.12), имеющее асимптотику

$$E(x(y)) = \Phi_0(y) + \Phi_1(y) + \Phi_2(y) + S_4(x_0) + \frac{\partial S_4}{\partial y_1}(x_0)y_1 + O(\tau^2\ln\tau), \ \tau\to 0.$$

Тогда в силу (2.11) получаем, что функция

$$E_1(x) = E(x) - \frac{S_4(x_0)}{\phi_1}\psi_0^{(1)}(x) - \frac{\dfrac{\partial S_4}{\partial y_1}(x_0)}{\phi_2}\psi_0^{(2)}(x)$$

имеет асимптотику (2.15) и является решением уравнения (2.12) при $F=0$ и некоторых Λ_i.

Значения (2.16) постоянных Λ_i вычисляются достаточно стандартным образом (см., например, [3]). Пусть $\widetilde{B}_\mu$ — круг радиуса μ с центром в нуле в переменных y, B_μ — его образ в переменных x, $\Omega_\mu := \Omega\backslash B_\mu$. Домножая уравнение (2.12) на $\psi_0^{(i)}$, интегрируя полученное равенство по области Ω_μ по частям и переходя к пределу при $\mu\to 0$ с учетом равенств (2.15), (2.11) и (2.10), получаем равенства (2.16). Лемма доказана.

Таким же методом доказывается справедливость аналогичного утверждения для E_0.

Лемма 2.9. *Существует функция $E_0 \in \mathcal{A}_0$, имеющая главный член асимптотики при $x \to x_0$, равный $\ln\tau$ в переменных y, и являющаяся решением* (2.12) *при $F = 0$ и*

$$\Lambda_1 = \pi\phi_1, \quad \Lambda_2 = 0.$$

Так как $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$, то из лемм 2.8 и 2.9 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 2.1. *Если $k \geqslant 2$, то для любого $F \in \mathcal{A}_k$ существует решение $E \in \mathcal{A}_k$ уравнения* (2.12) *при $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$.*

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\rho = |\xi|$, а $H_j(\xi, t, s)$ — такие функции, что при некотором целом k справедливо равенство $\rho^k H_j(\xi; s, t) = sP^{(1)}_{k+j}(\xi) + tP^{(2)}_{k+j} + P^{(3)}_{k+j}(\xi)$, где $P^{(q)}_n(\xi)$ — однородные полиномы порядка n. Далее, пусть $\xi_1^- = -(\xi_1 - a)$, $\xi_1^+ = \xi_1 - b$, $\xi_\pm = (\xi_1^\pm, \xi_2)$, $\rho_\pm$, $\theta_\pm$ — полярные координаты в плоскостях $\xi_\pm$, а

$$\Psi^{(\pm)}_l(\rho_\pm, \theta_\pm, \ln\rho_\pm) = \rho_\pm^{\frac{l}{2}} \sum_{k=0}^{l} \Big(c_k \cos\frac{k\theta_\pm}{2} + d_k \sin\frac{k\theta_\pm}{2} \Big).$$

Обозначим через $\mathcal{B}_p$ множество функций, определенных в $\mathbb{R}^2_+ := \{\xi : x_2 \geqslant 0\}$ и представимых для любых целых $N \geqslant 0$ и достаточно малых действительных $R > 0$ в виде

$$G(\xi) = (1 - \chi(\rho R)) \sum_{l=-p}^{N} H_{-l}(\xi; \ln\rho, \theta) + \chi(\rho_+ R^{-1}) \sum_{l=1}^{2N} \Psi^{(+)}_l(\rho_+, \theta_+, \ln\rho_+)$$

$$+ \chi(\rho_- R^{-1}) \sum_{l=1}^{2N} \Psi^{(-)}_l(\rho_-, \theta_-, \ln\rho_-) + \widetilde{\mathcal{E}}_N(\xi),$$

где $\widetilde{\mathcal{E}}_N(\xi) \in C^N(\mathbb{R}^2_+)$ и $\widetilde{\mathcal{E}}_N(\xi) = o(\rho^{-N})$ при $\rho \to \infty$. Обозначим также через $\mathcal{B}^{(-j)}$ линейную оболочку функций из $\mathcal{B}_p$ вместе с их производными по ξ до j-го порядка включительно, а через $\widetilde{\mathcal{B}}_p$ обозначим множество рядов вида

$$H(\xi) = \sum_{l=-p}^{\infty} H_{-l}(\xi, \ln\rho, \theta).$$

В [15] была доказана справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.10. *Пусть функции $f(\xi) \in \mathcal{B}^{(-2)}$ и ряд $H(\xi) \in \widetilde{\mathcal{B}}_t$ является формальным асимптотическим решением при $\rho \to \infty$ краевой задачи*

$$\Delta_\xi H = f, \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_2}(\xi_1, 0) = 0.$$

Тогда существует функция $v(\xi) \in \mathcal{B}_t$, которая является решением краевой задачи

$$\Delta_\xi v = f, \quad \xi_2 > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma, \quad v = 0, \quad \xi \in \gamma,$$

где $\gamma := \{\xi \colon \xi_2 = 0, \xi_1 \in (a, b)\}$, $\Gamma := \{\xi \colon \xi_2 = 0, \xi_1 \notin [a, b]\}$, и при $\rho \to \infty$ разлагается в сумму двух асимптотических рядов

$$v(\xi) = H(\xi) + \sum_{l=0}^{\infty} c_l \rho^{-2l} X_l(\xi).$$

Легко видеть, что функция $\Upsilon_1(\xi) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{(z-a)(z-b)}\right)$, где $z = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$, а i — мнимая единица, принадлежит $\mathcal{B}_1$, является решением краевой задачи

$$\Delta_\xi \Upsilon_1 = 0, \xi_2 > 0, \quad \Upsilon_1 = 0, \quad \xi \in \gamma, \quad \frac{\partial \Upsilon_1}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma,$$

и имеет дифференцируемую асимптотику

$$\Upsilon_1(\xi) = \xi_1 + c_{1,0} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1,k} \frac{X_k(\xi)}{\rho^{2k}}, \quad \rho \to \infty, \quad c_{1,0} = -\frac{a+b}{2}, \quad c_{1,1} = -\frac{(b-a)^2}{8}. \tag{2.17}$$

3. Вывод структуры асимптотических разложений собственной функции и собственного значения и формул для главных членов асимптотик

Вне малой окрестности точки x_0 (т.е. вне малой окрестности участка границы γ_ε, где задано граничное условие Дирихле) главные члены приближения собственной функции $\psi^\varepsilon(x)$ будем искать в виде $\psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon\varkappa_{1,0}\psi_0^{(1)}(x)$, где константа $\varkappa_{1,0}$ будет определена позднее. Тогда при $x \to x_0$ в силу (2.11) имеем

$$\psi_0^{(2)}(x(y)) + \varepsilon\varkappa_{1,0}\psi_0^{(1)}(x(y)) = \phi_2 y_1 + \varepsilon\varkappa_{1,0}\phi_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(P_k^{(2)}(y) + \varepsilon P_k^{(1)}(y)\right), \quad \tau \to 0. \tag{3.1}$$

Переписывая этот ряд в переменных $\xi = y\varepsilon^{-1}$, получаем, что

$$\psi_0^{(2)}(x(\varepsilon\xi)) + \varepsilon\varkappa_{1,0}\psi_0^{(1)}(x(\varepsilon\xi)) = \phi_2\varepsilon\xi_1 + \varepsilon\varkappa_{1,0}\phi_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\left(P_k^{(2)}(\xi) + \varepsilon P_k^{(1)}(\xi)\right).$$

Поэтому в соответствии с методом согласования асимптотических разложений внутреннее разложение в окрестности точки x_0 должно иметь слагаемые в виде

$$\varepsilon v_{1,0}(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k v_{k,0}(\xi), \tag{3.2}$$

где

$$v_{1,0}(\xi) \sim \phi_2\xi_1 + \varkappa_{1,0}\phi_1, \quad \xi \to \infty, \tag{3.3}$$
$$v_{2,0}(\xi) \sim P_2^{(2)}(\xi), \quad v_{k,0}(\xi) \sim P_k^{(2)}(\xi) + P_{k-1}^{(1)}(\xi), \quad k \geqslant 3, \quad \xi \to \infty.$$

Подставляя (3.2) в исходную краевую задачу (1.1), переходя к переменной ξ и приравнивая к нулю коэффициент при ε^{-1}, получаем краевую задачу для $v_{1,0}(\xi)$:

$$\Delta_\xi v_{1,0} = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad v_{1,0} = 0, \quad \xi \in \gamma, \quad \frac{\partial v_{1,0}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma. \tag{3.4}$$

Согласно определению (2.17) функции $\Upsilon_1(\xi)$ функция

$$v_{1,0}(\xi) = \phi_2\Upsilon_1(\xi) \tag{3.5}$$

является решением краевой задачи (3.4) и имеет асимптотику

$$v_{1,0}(\xi) = \phi_2\xi_1 + \phi_2 c_{1,0} + \phi_2 c_{1,1}\xi_1\rho^{-2} + \phi_2\sum_{k=2}^{\infty} c_{1,k}X_k(\xi)\rho^{-2k}, \quad \rho \to \infty, \tag{3.6}$$

которая при

$$\varkappa_{1,0} = \phi_1^{-1}\phi_2 c_{1,0} \tag{3.7}$$

соответствует требуемой асимптотике (3.3).

Переписывая асимптотику первого слагаемого в (3.2) при $\rho \to \infty$ во внешней переменной x, с учетом равенства (3.6) получаем, что

$$\varepsilon v_{1,0}(\xi) = \phi_2 y_1 + \varepsilon \varkappa_{1,0} \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 c_{1,1} y_1 \tau^{-2} + \phi_2 \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^{k+1} c_{1,k} X_k(y) \tau^{-2k}.$$

Первые два слагаемых в правой части уже согласованы (см. (3.1)). Из согласования же остальных членов следует, что внешнее разложение (вне малой окрестности точки x_0) должно иметь слагаемые

$$\psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon \varkappa_{1,0} \psi_0^{(1)}(x) + \varepsilon^2 \psi_{2,0}(x) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^k \psi_{k,0} + \psi_0^{(1)}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \varkappa_{k,0}, \tag{3.8}$$

где

$$\psi_{2,0}(x(y)) \sim \phi_2 c_{1,1} y_1 \tau^{-2}, \ \tau \to 0, \tag{3.9}$$
$$\psi_{k+1,0}(x(y)) \sim \phi_2 c_{1,k} X_k(y) \tau^{-2k}, \ \tau \to 0,$$

а последняя сумма выделена в (3.8) для удобства дальнейшего построения полного асимптотического разложения собственного значения (ее можно было бы включить в третье и четвертое слагаемые). По аналогии с (3.8) собственное значение λ^ε должно иметь слагаемые

$$\lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_{2,0} + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_{k,0}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.8) и (3.10) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем краевые задачи для $\psi_{j,0}(x)$:

$$-(\Delta + \lambda_0)\psi_{2,0} = \lambda_{2,0} \psi_0^{(2)}, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \psi_{2,0}}{\partial r} = 0, \quad x \in \partial\Omega \backslash \{x_0\}, \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} -(\Delta + \lambda_0)\psi_{k+1,0} = \sum_{s=2}^{k-1} \lambda_{s,0} \psi_{k+1-s,0} + \psi_0^{(1)} \sum_{s=2}^{k} \lambda_{s,0} \varkappa_{k+1-s,0} + \lambda_{k+1,0} \psi_0^{(2)}, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \psi_{k+1,0}}{\partial r} = 0, \quad x \in \partial\Omega \backslash \{x_0\}, \quad k \geqslant 2. \end{gathered} \tag{3.12}$$

В силу леммы 2.8 функция

$$\psi_{2,0}(x) = \phi_2 c_{1,1} E_1(x) \tag{3.13}$$

является решением краевой задачи (3.11) при

$$\lambda_{2,0} = -\pi \phi_2^2 c_{1,1} \tag{3.14}$$

и имеет асимптотику

$$\psi_{2,0}(x(y)) = \phi_2 c_{1,1} \left(y_1 \tau^{-2} + H_0(y) + H_1(y) + d y_1 \ln \tau + O(\tau^2 \ln \tau) \right), \quad \tau \to 0, \tag{3.15}$$

$$d = \frac{1}{2}(\lambda_0 + 8), \tag{3.16}$$

где $H_j(y)$ — однородные функции степени j, которая соответствует требуемой асимптотике (3.9).

Появление логарифмических членов и их степеней в асимптотических разложениях как собственного значения λ^ε, так и во внешнем и внутреннем разложениях собственной функции $\psi^\varepsilon(x)$ легко проследить по следующей цепочке, в которой для удобства изложения полагается $k = 1$ (пока не оговорено противное).

Переходя в асимптотике $\varepsilon^{2k}\ln^{k-1}\varepsilon\psi_{2k,k-1}(x(y))$ (т. е. в асимптотике $\varepsilon^2\psi_{2,0}(x(y))$) при $y\to 0$ к внутренней переменной ξ, в силу равенства (3.15) и метода согласования асимптотических разложений получаем, что во внутреннем разложении должно появиться слагаемое

$$\varepsilon^{2k+1}\ln^k\varepsilon v_{2k+1,k}(\xi),\quad v_{2k+1,k}(\xi)\sim\phi_2(c_{1,1}d)^k\xi_1,\quad \xi\to\infty. \tag{3.17}$$

Для $v_{2k+1,k}(\xi)$ аналогично (3.4) получаем краевую задачу

$$\Delta_\xi v_{2k+1,k}=0,\quad \xi_2>0,\quad v_{2k+1,k}=0,\quad \xi\in\gamma,\quad \frac{\partial v_{2k+1,k}}{\partial\xi_2}=0,\quad \xi\in\Gamma. \tag{3.18}$$

Легко видеть, что функция $v_{2k+1,k}(\xi)$, определяемая равенством

$$v_{2k+1,k}(\xi)=\phi_2(c_{1,1}d)^k\Upsilon_1(\xi) \tag{3.19}$$

является решением краевой задачи (3.18) и имеет асимптотику

$$v_{2k+1,k}(\xi)=\phi_2(c_{1,1}d)^k\left(\xi_1+c_{1,0}+c_{1,1}\xi_1\rho^{-2}+O(\rho^{-2})\right),\quad \rho\to\infty. \tag{3.20}$$

Переписывая асимптотику $\varepsilon^{2k+1}\ln^k\varepsilon v_{2k+1,k}(\xi)$ при $\rho\to\infty$ во внешней переменной x, с учетом равенства (3.20) получаем, что во внешнем разложении должно появиться слагаемое

$$\varepsilon^{2k+2}\ln^k\varepsilon\psi_{2k+2,k}(x),\quad \psi_{2k+2,k}(x(y))\sim\phi_2c_{1,1}^{k+1}d^ky_1\tau^{-2},\quad \tau\to 0. \tag{3.21}$$

(Слагаемое типа $\phi_2(c_{1,1}d)^kc_{1,0}$ согласовывается введением во внешнем разложении слагаемого вида $\varepsilon^{2k+1}\ln^k\varepsilon\varkappa_{2k+1,k}\psi_0^{(1)}(x)$). По аналогии с (3.21) в разложение собственного значения λ^ε добавим слагаемое

$$\varepsilon^{2k+2}\ln^k\varepsilon\lambda_{2k+2,k}.$$

Тогда для $\psi_{2k+2,k}(x)$ аналогично (3.11) легко получить следующую краевую задачу:

$$-(\Delta+\lambda_0)\psi_{2k+2,k}=\lambda_{2k+2,k}\psi_0^{(2)},\quad x\in\Omega,\quad \frac{\partial\psi_{2k+2,k}}{\partial r}=0,\quad x\in\partial\Omega\backslash\{x_0\}. \tag{3.22}$$

В силу леммы 2.8 функция

$$\psi_{2k+2,k}(x)=\phi_2c_{1,1}^{k+1}d^kE_1(x) \tag{3.23}$$

является решением краевой задачи (3.22) при

$$\lambda_{2k+2,k}=-\pi\phi_2^2c_{1,1}^{k+1}d^k \tag{3.24}$$

и имеет асимптотику

$$\psi_{2k+2,k}(x(y))=\phi_2c_{1,1}^{k+1}d^k\left(y_1\tau^{-2}+H_0(y)+H_1(y)+dy_1\ln\tau+O(\tau^2\ln\tau)\right),\quad \tau\to 0, \tag{3.25}$$

которая соответствует требуемой асимптотике (3.21).

Переходя в асимптотике $\varepsilon^{2k+2}\ln^k\varepsilon\psi_{2k+2,k}(x(y))$ (т.е. в асимптотике $\varepsilon^4\ln\varepsilon\psi_{4,1}(x(y))$) при $y\to 0$ к внутренней переменной ξ, в силу равенства (3.25) и метода согласования асимптотических разложений получаем, что во внутреннем разложении должно появиться слагаемое (3.17) при $k=2$. Далее, повторяя выкладки, приведенные выше для случая $k=1$, убеждаемся, что они имеют место и для $k=2$. Следовательно, переходя в асимптотике $\varepsilon^{2k+2}\ln^k\varepsilon\psi_{2k+2,k}(x(y))$, но уже при $k=2$ (т.е. в асимптотике $\varepsilon^6\ln^2\varepsilon\psi_{6,2}(x(y))$) при $y\to 0$ к внутренней переменной ξ, в силу равенства (3.25) и метода согласования асимптотических разложений получаем, что во внутреннем разложении должно появиться слагаемое (3.17) при $k=3$. Далее, повторяя выкладки, приведенные выше для случая $k=1$, убеждаемся, что они имеют место и для $k=3$. И так далее.

В результате получаем, что вне окрестности точки x_0 внешнее асимптотическое разложение собственной функции следует строить в виде

$$\psi^\varepsilon(x) = \psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon\varkappa_{1,0}\psi_0^{(1)}(x) + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]-1}\varepsilon^i\ln^k\varepsilon\,\psi_{i,k}(x) + \psi_0^{(1)}(x)\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{i-1}{2}]}\varepsilon^i\ln^k\varepsilon\,\varkappa_{i,k}; \qquad (3.26)$$

в окрестности точки x_0 внутреннее асимптотическое разложение собственной функции следует искать в виде

$$\psi_{\mathrm{in}}^\varepsilon(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{i-1}{2}]}\varepsilon^i\ln^k\varepsilon\,v_{i,k}(\xi), \quad \xi = \frac{y(x)}{\varepsilon}, \qquad (3.27)$$

а собственное значение — в виде (1.3), где главные члены асимптотик определяются равенствами (3.5), (3.7), (3.13) и (3.14) при $k=0$ и равенствами (3.19), (3.23), (3.24) и (3.16) при $k \geqslant 1$. Причем из этих формул следует, что равенства (3.19), (3.23) и (3.24) справедливы и при $k=0$. В свою очередь, из равенства (3.24) и определений (2.11), (2.17) и (3.16) постоянных ϕ_2, $c_{1,1}$ и d вытекает формула (1.4).

В заключение раздела заметим, что, подставляя ряды (1.3) и (3.26) в (1.1), выводим краевые задачи для коэффициентов внешнего разложения (3.26):

$$\begin{aligned} -(\Delta+\lambda_0)\psi_{s+2+2i,i} =& \lambda_{s+2+2i,i}\psi_0^{(2)} + \sum_{q=0}^{i}\sum_{p=2+2q}^{s+2q+1}\lambda_{p,q}\psi_{s+2+2i-p,i-q} \\ &+ \psi_0^{(1)}\sum_{q=0}^{i}\sum_{p=2+2q}^{s+2q+2}\lambda_{p,q}\varkappa_{s+2+2i-p,i-q}, \quad x\in\Omega, \\ &\frac{\partial\psi_{s+2+2i,i}}{\partial r} = 0, \quad x\in\partial\Omega\setminus\{x_0\}, \quad s\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (3.28)$$

Аналогично, подставляя ряды (1.3) и (3.27) в (1.1) и переходя ко внутренней переменной ξ, получаем краевые задачи для коэффициентов внутреннего разложения (3.27):

$$\begin{aligned} &\Delta_\xi v_{s+1+2i,i} = -\sum_{p=0}^{s-1}L_{p-1}^{\xi}v_{s+1+2i-p,i} - \sum_{q=0}^{i}\sum_{p=2+2q}^{s-1+2q}\lambda_{p,q}v_{s+2i-p,i-q}, \quad \xi_2>0, \\ &v_{s+1+2i,i} = 0, \quad \xi\in\gamma, \quad \frac{\partial v_{s+1+2i,i}}{\partial\xi_2} = 0, \quad \xi\in\Gamma, \quad s\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (3.29)$$

Заметим также, что при $s=0$ краевые задачи (3.28) и (3.29) представляют собой краевые задачи (3.22) и (3.18) соответственно, а краевые задачи (3.28) при $i=0$ и $s\geqslant 1$ совпадают с (3.12).

4. Построение полных формальных асимптотических разложений

Коэффициенты асимптотики внешнего разложения собственной функции удобно строить в следующем виде

$$\psi_{s+2+2i,i}(x) = \sum_{t=2i}^{s+2i}\Psi_{s+2+2i,i}^{(t)}(x). \qquad (4.1)$$

Обозначим

$$U_{s+2+2i,i}^{(M)}(x) = \sum_{t=2i}^{\min\{s+2i,M\}}\Psi_{s+2+2i,i}^{(t)}(x).$$

В этих обозначениях $U^{(M)}_{s+2+2i,i}(x) = \psi_{s+2+2i,i}(x)$ при $M \geqslant s+2i$ в силу (4.1). Через $\Psi^{\varepsilon,M}_{\text{ex}}(x)$ будем обозначать ряды вида (3.26), где коэффициенты $\psi_{s+2+2i,i}(x)$ заменены на $U^{(M)}_{s+2+2i,i}(x)$, а $\varkappa_{j+1+2i,i} = 0$ при $j+2i \geqslant M$.

На рядах $W(x,\varepsilon)$ вида (3.26) определим операторы $\mathcal{K}_{q,p}$ и $\mathcal{K}$ следующим образом. Коэффициенты ряда $W(x,\varepsilon)$ разложим в ряды при $x \to x_0$ и перейдем к переменным ξ. В полученных рядах оставим только члены вида $\varepsilon^q \ln^p \varepsilon u(\xi)$. Этот ряд обозначим $\mathcal{K}_{q,p}(W(x,\varepsilon))$ и положим

$$\mathcal{K} = \sum_{q,p} \mathcal{K}_{q,p}.$$

Из определений $\mathcal{A}_m$, $\widetilde{\mathcal{B}}_m$, $\mathcal{K}_{m,l}$, $\mathcal{K}$, $\Psi^{\varepsilon,M}_{\text{ex}}(x,\varepsilon)$ и представления (4.1) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Если $\psi_{s+2+2i,i}(x) \in \mathcal{A}_{s+1}$, причем $\psi_{2+2i,i}(x) = \alpha_i E_1(x)$, то*

$$\mathcal{K}(\psi^\varepsilon(x)) = \Psi^\varepsilon_{\text{in}}(\xi),$$

где $\Psi^\varepsilon_{\text{in}}(\xi)$ — ряды вида (3.27), в которых функции $v_{s+1+2i,i}(\xi)$ заменены на ряды $V_{s+1+2i,i}(\xi) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{s+1}$.

Если $\Psi^{(t)}_{s+2+2i,i}(x) \in \mathcal{A}_{s+1-t}$, то функции $\psi_{s+2+2i,i}(x)$, определяемые равенством (4.1), принадлежат $\mathcal{A}_{s+1}$, причем если $\Psi^{(2i)}_{2+2i,i}(x) = \psi_{2+2i,i}(x) = \alpha_i E_1(x)$, а $\Psi^{(2i+1)}_{3+2i,i}(x) = \beta_i E_1(x)$, то имеют место следующие равенства:

$$\varepsilon^{t+1+2i} \ln^i \varepsilon V_{t+1+2i,i}(\xi) = \mathcal{K}_{t+1+2i,i}\left(\Psi^{\varepsilon,t+2i}_{\text{ex}}(x)\right) = \mathcal{K}_{t+1+2i,i}\left(\psi^\varepsilon(x)\right),$$

$$V_{t+1+2i,i}(\xi) = \widetilde{V}_{t+1+2i,i}(\xi) + \varkappa_{t+1+2i,i}\phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} A^{(t,i)}_k \rho^{-2k} X_k(\xi),$$

где $A^{(t,i)}_k \tau^{-2k} X_k(y)$ – главный член асимптотики $\Psi^{(t+2i)}_{k+1-t+2i,i}(x(y))$ при $y \to 0$,

$$\widetilde{V}_{1,0}(\xi) = \phi_2 \xi_1,$$

$$\widetilde{V}_{1+2i,i}(\xi) = \varepsilon^{-(1+2i)} \ln^{-i} \varepsilon \mathcal{K}_{1+2i,i}\left(\psi_{2i,i-1}(x)\right) = \alpha_{i-1}\Big(\frac{\lambda_0}{2} + 4\Big)\xi_1 + \omega_{i-1}, \quad i \geqslant 1.$$

Здесь ω_j — коэффициент при логарифмическом слагаемом в асимптотике в нуле функции $\Psi^{(2j)}_{3+2j,j}(x(y))$,

$$\widetilde{V}_{t+1+2i,i}(\xi) = \varepsilon^{-(t+1+2i)} \ln^{-i} \varepsilon \mathcal{K}_{t+1+2i,i}\left(\Psi^{\varepsilon,t-1+2i}_{\text{ex}}(x)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{t+1}, \quad i \geqslant 0, \quad t \geqslant 1,$$

(т.е. $\widetilde{V}_{t+1+2i,i}$ не зависит от $\Psi^{(m)}_{p,q}$ при $m \geqslant t$, $q \geqslant i+1$).

Если, к тому же, функции $\Psi^{(t)}_{s+2+2i,i}(x)$ являются решениями уравнений

$$
\begin{aligned}
-(\Delta+\lambda_0)\Psi^{(t+2i)}_{t+2+2i,i} &= \lambda_{t+2+2i,i}\psi^{(2)}_0, \quad t+2i \geqslant 0,\\
-(\Delta+\lambda_0)\Psi^{(t+2i)}_{t+3+2i,i} &= \psi^{(1)}_0 \sum_{q=0}^{i} \sum_{j=2i-2q}^{t+2i} \lambda_{t+2+2i-j,i-q}\varkappa_{1+j,q}, \quad t+2i \geqslant 0,\\
-(\Delta+\lambda_0)\Psi^{(t+2i)}_{t+k+2+2i,i} &= \psi^{(1)}_0 \sum_{q=0}^{i} \sum_{j=2i-2q}^{t+2i-k+1} \lambda_{t+2+2i-j,i-q}\varkappa_{k+j,q} + \sum_{q=0}^{i} \lambda_{t+2+2i,i-q} \sum_{m=0}^{\min\{t+2i-1,k-2\}} \Psi^{(m)}_{k,q}\\
&\quad + \sum_{q=0}^{i}\sum_{j=1}^{t+2i} \lambda_{t+2+2i-j,i-q}\Psi^{(t+2i)}_{k+j,q}, \quad t+2i+1 \geqslant k > 1,\\
-(\Delta+\lambda_0)\Psi^{(t+2i)}_{t+k+2+2i,i} &= \sum_{q=0}^{i} \lambda_{t+2+2i,i-q} \sum_{m=0}^{t+2i} \Psi^{(m)}_{k,q} + \sum_{q=0}^{i}\sum_{j=1}^{t+2i} \lambda_{t+2+2i-j,i-q}\Psi^{(t+2i)}_{k+j,q}, \quad k > t+2i+1 \geqslant 1,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

то функции $\psi_{s+2+2i,i}(x)$, *определяемые равенствами* (4.1), *являются решениями краевых задач* (3.28), *а ряды* $\widetilde{V}_{t+1+2i,i}$ *— формальными асимптотическими решениями краевых задач* (3.29) *при* $\rho \to \infty$, *где в правой части функции* $v_{t+1+2i,i}(\xi)$ *заменены на ряды* $V_{t+1+2i,i}(\xi)$.

Теорема 4.1. *Пусть* λ_0 *— двукратное собственное значение краевой задачи* (1.2), *являющееся квадратом нуля производной функции Бесселя* $\mathcal{J}_m$, $\psi_0^{(1)}$, $\psi_0^{(2)}$ *— соответствующие нормированные в* $L_2(\Omega)$ *собственные функции* (2.10).

Тогда существуют ряды (1.3), (1.4), (3.26), (3.7), (3.23) *и* (3.27), (3.19) *такие, что*

1) *функции* $\psi_{s+2+2i,i} \in \mathcal{A}_{s+2}$ *являются решениями краевых задач* (3.28);
2) *функции* $v_{t+1+2i,i} \in \mathcal{B}_{t+1}$ *являются решениями краевых задач* (3.29);
3) *выполняется следующее равенство*

$$\mathcal{K}(\psi^\varepsilon(x)) = \psi^\varepsilon_{\text{in}}(\xi), \quad \rho \to \infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. С учетом утверждений леммы 4.1 для доказательства равенства (4.3) достаточно показать выполнение равенства

$$v_{t+1+2i,i}(\xi) = \varepsilon^{-(t+1+2i)} \ln^{-i} \varepsilon \mathcal{K}_{t+1+2i,i}\left(\Psi_{\text{ex}}^{\varepsilon,t+2i}(x)\right), \quad \rho \to \infty. \tag{4.4}$$

Это достигается путем выбора на q-м шаге согласования главных членов асимптотик в нуле функций $\Psi_{j,i}^{(q)}(x(y))$ и постоянных $\varkappa_{1+q,i}$ (начиная с $q = 0$). При этом числа $\lambda_{2+q,i}$ определяются из условия разрешимости уравнений (4.2) для $\Psi_{2+q,i}^{(q)}(x)$ (т. е. уравнений из первой строки в (4.2) при $t + 2i = q$).

С учетом утверждений леммы 4.1 алгоритм для этого следующий. На q-м шаге по $\widetilde{V}_{q+1,i}$ в силу леммы 2.10 определяется $v_{q+1,i}$ и $\varkappa_{q+1,i}$. По асимптотике на бесконечности функций $v_{q+1,i}$ последовательно определяются главные члены асимптотик функций $\Psi_{s+2+2i,i}^{(q)}$. Затем в силу леммы 2.8 определяются $\Psi_{2+q,i}^{(q)}(x)$ и $\lambda_{2+q,i}$. И, наконец, в силу следствия 2.1 определяются остальные $\Psi_{2+q+j,i}^{(q)}(x)$ при $j \geqslant 1$. В результате добиваемся равенства (4.4) при $t + 2i = q$.

Теорема доказана.

5. Обоснование построенных формальных асимптотических разложений (окончание доказательства теоремы 1.1)

Обоснование построенных асимптотик достаточно стандартно (см., например, [3; 4]).

Обозначим через $\widehat{\lambda}_N^\varepsilon$, $\widehat{\psi}_N^\varepsilon(x)$ и $\widehat{\psi}_{\text{in},N}^\varepsilon(x)$ частичные суммы рядов (1.3), (3.26) и (3.27) до $\varepsilon^N \ln^j \varepsilon$ включительно. Из теоремы 4.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.1. *Справедливы равенства*

$$\big(\Delta + \widehat{\lambda}_{2+2M}^\varepsilon\big)\widehat{\psi}_{2+2M}^\varepsilon(x) = O\big(\varepsilon^{2+2M}\tau^{-2M-1}\big),$$

$$\big(\Delta + \widehat{\lambda}_{2+2M}^\varepsilon\big)\widehat{\psi}_{\text{in},1+2M}^\varepsilon(x) = O\big(\varepsilon^{2M-1}\rho^{2M}\big) \quad \textit{при } \rho \to \infty, \quad \varepsilon\rho \to 0,$$

$$\widehat{\psi}_{2+2M}^\varepsilon(x) - \widehat{\psi}_{\text{in},1+2M}^\varepsilon(x) = O\big(\varepsilon^{2M+2}\tau^{-(2M+2)} + \varepsilon^{2M+1}\rho^{2M+2}\big) \quad \textit{при } \tau \to 0, \quad \rho \to \infty,$$

причем последнее равенство дифференцируемо по x (*с учетом того, что* $\xi = \varepsilon^{-1}y(x)$).

Обозначим

$$\widetilde{\psi}_{2+2M}^\varepsilon(x) = \Big(1 - \chi\Big(\frac{\tau(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\Big)\widehat{\psi}_{2+2M}^\varepsilon(x) + \chi\Big(\frac{\tau(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\widehat{\psi}_{\text{in},1+2M}^\varepsilon(x),$$

где, напомним, $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и равная нулю при $t > 2$.

Из определения $\mathcal{H}_p$ следует, что если $v(\xi) \in \mathcal{H}_p$, то $L_q^\xi v(\xi) \in L_2\left(\mathbb{R}_+^2 \cap \{\xi : \rho < R\}\right)$ для любого $q \geqslant -1$ и любого R. Поэтому из утверждений теоремы 4.1 и леммы 5.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.2. *Функция* $\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{2+2M}(x)$ *принадлежит* $W^1_2(\Omega)$*, для нее имеет место сходимость*

$$\|\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{2+2M} - \psi^{(2)}_0\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{5.1}$$

и она является решением краевой задачи

$$-\Delta\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{2+2M} = \widehat{\lambda}^{\varepsilon}_{2+2M}\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{2+2M} + F^{\varepsilon}_M, \quad x \in \Omega, \quad \widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{2+2M} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{2+2M}}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \tag{5.2}$$

где

$$\|F^{\varepsilon}_M\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{M-\frac{1}{2}}\right). \tag{5.3}$$

Так как существует собственное значение λ^ε краевой задачи (1.1), сходящееся к двукратному собственному значению λ_0 краевой задачи (1.2), то из хорошо известных оценок резольвенты (см., например, [16, гл. V, § 3]) для решения краевой задачи (5.2) справедливо неравенство

$$\|\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{2+2M}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\|F^{\varepsilon}_M\|_{L_2(\Omega)}}{\left|\widehat{\lambda}^{\varepsilon}_{2+2M} - \lambda^\varepsilon\right|}.$$

Из этой оценки, равенства (5.3) и сходимости (5.1) следует, что

$$\left|\widehat{\lambda}^{\varepsilon}_{2+2M} - \lambda^\varepsilon\right| = O\big(\varepsilon^{M-\frac{1}{2}}\big).$$

Отсюда в силу произвола в выборе M вытекает справедливость доказываемой теоремы 1.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гадыльшин Р.Р.** Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий // Асимптот. свойства решений дифференц. уравнений: сб. науч. ст. Уфа: Изд-во БНЦ УрО АН СССР, 1988. С. 4–16.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
3. **Гадыльшин Р.Р.** Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа // Соврем. математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 3–32.
4. **Бикметов А.Р., Гадыльшин Р.Р.** Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n-мерной области // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 28–64.
5. **Гадыльшин Р.Р.** Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 43–61.
6. **Гадыльшин Р.Р., Шишкина Е.А.** О неравенствах Фридрихса для круга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 48–61.
7. **Чечкин Г.А.** Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 6. С. 99–150.
8. **Гадыльшин Р.Р.** Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстроосциллирующими граничными условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 540–551.
9. **Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. **Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.** Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990. 311 с.
11. **Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С.** Усреднение. Методы и приложения. Новосибирск: Изд-во “Тамара Рожковская”, 2004. 246 с. (Белая серия в математике и физике.)
12. **Владимиров В.С., Жаринов В.В.** Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
13. **Ильин А.М.** Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием // Мат. сб. 1977. Т. 103(145), № 2(6). С. 265–284.
14. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

15. **Гадыльшин Р.Р.** Асимптотика решений эллиптических задач с сингулярно возмущенными граничными условия: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1988. 133 с.
16. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

Гадыльшин Рустем Рашитович
д-р физ.-мат. наук
зав. кафедрой, профессор
Башкирский государственный педагогический университет им. Акмуллы
e-mail: gadylshin@yandex.ru

Поступила 10.12.2014

Репьевский Сергей Владимирович
аспирант
Челябинский государственный университет
e-mail: repyevsky@gmail.com

Шишкина Елена Алексеевна
ассистент
Башкирский государственный педагогический университет им. Акмуллы
e-mail: shishkina.ea@yandex.ru