ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.62

К ЗАДАЧЕ СОПРОВОЖДЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА НАБЛЮДАТЕЛЯМИ[1]

В. И. Бердышев

Рассматриваются экстремальные задачи, связанные с сопровождением движущегося объекта наблюдателями. Обсуждается тактика движения аппарата с учетом его видимости со стороны наблюдателей. Даны характеристические свойства оптимальных траекторий.

Ключевые слова: задача сопровождения, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. On the problem of tracking a moving object by observers.

Extremal problems concerned with tracking a moving object by observers are considered. The motion tactic of the vehicle with account taken of its visibility by the observers is discussed. Characteristic properties of optimal trajectories are given.

Keywords: tracking problem, moving object, observer.

Введение

Пусть $X = \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, $G \subset X$ — фиксированное ограниченное множество, являющееся замыканием открытого множества $\overset{\circ}{G}$, дополнение до которого линейно связно (т. е. любые две его точки можно соединить спрямляемой кривой, принадлежащей этому дополнению). Множество $\overset{\circ}{G}$ препятствует видимости и движению. В X движутся точки t и f, t — объект, f — наблюдатель, $t \notin G$, $f \notin \overset{\circ}{G}$. Точки t и f видимы одна для другой, если отрезок $[t, f]$ не пересекается с $\overset{\circ}{G}$.

Дадим краткую формулировку задачи. В [1] рассмотрен вариант задачи сопровождения. Здесь, в отличие от [1], предполагается, что наблюдатель ограничен в передвижении: объект способен поразить наблюдателя посредством миниобъекта, который может двигаться равномерно и прямолинейно. Для каждого положения t объекта наблюдатель вынужден выбирать свою позицию f в безопасной для себя зоне $S(t)$. Описание безопасной зоны дается ниже. Задача объекта — перейти из начальной точки t_* в конечную точку t^*, $t_* \neq t^*$, $t^* \notin G$, $t_* \notin G$, двигаясь внутри заданной линейно связной области Y, $Y \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing$, минимизируя на траектории максимум видимости со стороны наблюдателя (множество Y (коридор) представляет собой окрестность заданной "базовой" траектории $\mathcal{T}$, не пересекающуюся с G). Основное внимание уделяется случаю, когда множество G является телесным многогранником с конечным числом граней и задействовано несколько наблюдателей, которые могут занять исходные позиции в вершинах этого многогранника.

Введем следующие обозначения:

$v(t) = \{x \in X : [t, x] \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing\}$ — множество точек, видимых из точки t. Ясно, что $v(t)$ замкнуто;

$N(t)$ — множество невидимых точек;

$s(t) = N(t) \setminus G$ — множество затененных (множеством G) точек пространства;

[1]Приведенные в статье результаты (исключая предложение 1) получены за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

$\overline{s}(t)$ — его замыкание;

k — отношение максимальной скорости движения наблюдателя к скорости движения миниобъекта (предполагается, что $k < 1$);

$\mathbb{T}$ — совокупность непрерывных траекторий

$$\mathcal{T} = \{t(\tau)\colon 0 \le \tau \le 1,\ t(0) = t_*,\ t(1) = t^*\} \subset Y,$$

не имеющих точек самопересечения;

$\rho(t, M) = \inf\{\|t - m\|\colon m \in M\},\ M \subset X$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма;

$d(t, m)$ — нижняя грань длин спрямляемых кривых, соединяющих t и m и не пересекающихся с $\overset{\circ}{G}$;

$d(t, M) = \inf\{d(t, m)\colon m \in M\},\ M \subset X$;

$\mathcal{P}_M(f) = \{m \in M\colon d(f, M) = d(f, m)\}$ — проекция точки f на множество M;

$$r(t, f) = \frac{\rho(t, N(f))^p}{\|t - f\|^q}, \quad p, q \ge 0, \tag{0.1}$$

— функция видимости объекта t из точки f (см. [2]). Показатель q определяется в зависимости от оптической проницаемости среды.

Заметим, что

$$\rho(t, N(f)) = \inf\{r:\ K_r(t, f) \bigcap G \ne \varnothing\},$$

где

$$K_r(t, f) = \operatorname{conv}\{V_r(t) \bigcup f\},$$

а conv означает выпуклую оболочку множества.

1. О тактике движения наблюдателя

Позицию f наблюдателя назовем безопасной, если

$$d(f, s(t)) \le k d(t, \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(f)). \tag{1.1}$$

Находясь в позиции f, удовлетворяющей условию (1.1), наблюдатель в случае опасности имеет возможность укрыться в теневой области $s(t)$, двигаясь по непрерывной спрямляемой кривой.

Из множества безопасных для наблюдателя f позиций при заданной позиции объекта t выделим множество позиций $S(t)$, близких к t. Сперва докажем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $t \notin G$, $s^* \in \overline{s}(t)$ — ближайшая к t точка из $\overline{s}(t)$, т. е. $d(t, s^*) = d(t, \overline{s}(t))$, тогда $d(t, s^*) = \|t - s^*\|$ и $[t, s^*] \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $s \in \overline{s}(t)$, $\gamma(s, t)$ — кратчайшая кривая, соединяющая точки s и t, $\gamma(s, t) \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing$. Поскольку $t \notin G$, то конечный участок кривой $\gamma(s, t)$, содержащей точку t, является, очевидно, прямолинейным отрезком. Пусть $[g, t] \subset \gamma(s, t)$ — максимальный из таких отрезков. Ясно, что $g \in G$. Покажем, что каждая точка q кривой $\gamma(s, g)$ принадлежит множеству $\overline{s}(t)$. Кривая $\gamma(s, g)$ не содержит точек из множества $v(t)$. В противном случае $\gamma(s, t)$ не была бы кратчайшей. Поэтому для любой точки $q \in \gamma(s, g)$ отрезок $[q, t]$ пересекается с множеством $\overset{\circ}{G}$. Любая точка $q \in \gamma(s, g)$ либо не принадлежит множеству G, либо является его граничной точкой. В первом случае $q \in s(t)$, поскольку q невидима из точки t. Пусть $q \in \gamma[s, g]$ — граничная точка множества G. Тогда существует последовательность точек $q_k \notin G$, сходящаяся к q. Эта последовательность не содержит подпоследовательности видимых из t точек, иначе мы бы имели включение $q \in v(t)$. Если q_k невидима, то $q_k \in s(t)$, так как $q_k \notin G$. Следовательно, q есть предел точек из $s(t)$, т.е. $q \in \overline{s}(t)$ и, в частности, $g \in \overline{s}(t)$, $g = s^*$. Доказательство завершено. $\square$

Итак, для поиска точки из $\overline{s}(t)$, ближайшей по расстоянию d к объекту t, надо найти кратчайший не пересекающийся с $\overset{\circ}{G}$ прямолинейный отрезок, соединяющий t и множество $\overline{s}(t)$. В общем случае эта задача имеет неединственное решение.

Задача наблюдателя двоякая: сократить расстояние до объекта, увеличивая его видимость (0.1), и остаться в безопасной зоне.

Наблюдатель, чтобы решать свою первую задачу, сперва занимает позицию $s^* = s^*(t)$ — одну из ближайших к t из замыкания $\overline{s}(t)$ затененной области, а затем для решения второй задачи он выбирает позицию $f \notin \overset{\circ}{G}$, удовлетворяющую условию

$$d(f, s^*) \le k\|t - s^*\|.$$

Поскольку

$$d(f, s(t)) \le d(f, s^*), \quad \|t - s^*\| \le d(t, \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(f)),$$

то (см. (1.1)) выбранная позиция f является безопасной.

Множество таких позиций f обозначается через $S(t)$. Легко видеть, что $S(t)$ принадлежит евклидовому шару $V_c(s^*)$ с центром s^* радиуса $c = k\|t - s^*\|$. Радиус c евклидова шара, содержащего множество $S(t)$, в общем случае нельзя уменьшить. Очевидно (см. предложение 1), что

$$\rho(t, S(t)) = d(t, S(t)) \ge \rho(t, V_c(s^*)) = (1-k)\|t - s^*\| = (1-k)d(t, s^*). \tag{1.2}$$

Из определения величины $r(t,f)$ нетрудно вывести, что справедлива

Лемма 1. *Если $f \in \overset{\circ}{V}_c(s^*) \backslash G$, точка $f_0 \in [f,t]$ такова, что*

$$\|s^* - f_0\| = c, \quad f_0 \notin G, \quad \text{то} \;\; r(t, f_0) \ge r(t,f).$$

Из леммы 1 следует, что величина $r(t,f)$ не убывает в направлении вектора $\overrightarrow{ff_0}$.

Предложение 2. *Пусть $t \notin G$, $s^* \in \overline{s}(t)$ — ближайшая к t точка из $\overline{s}(t)$, $\rho < \rho(t,G)$, $s \in [s^*, t]$ и $0 < \|s - s^*\| < \|t - s^*\| - \rho$. В любой окрестности точки s найдется точка f, для которой $r(t,f) > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка s не является внутренней для множества G, поэтому в любой ее окрестности найдется точка f, не принадлежащая множеству $\overset{\circ}{G}$, и некоторая ее окрестность $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(f)$ не пересекается с G. Эту точку f можно выбрать так, что конус

$$\operatorname{conv}\Big(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(f) \bigcup t\Big) \tag{1.3}$$

не пересекается с множеством $\overset{\circ}{G}$. Допустим противное, что для любой f такой, что $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(f) \bigcap G = \varnothing$, $\varepsilon = \varepsilon_f > 0$, есть точка $s_f \in \operatorname{conv}(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(f)) \bigcup G$. Любая точка $x \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(f)$ такая, что $s_f \in [t, x]$, затенена точкой s_f. Следовательно, точка s является пределом последовательности затененных точек, $s \in \overline{s}(t)$. Но $\|t - s\| < \|t - s^*\|$, что противоречит условию $\|t - s^*\| = \rho(t, \overline{s}(t))$. Завершая доказательство предложения, приведем оценку снизу для величины $r(t,f)$. Пусть K — пересечение конуса (1.3) с шаром $V_\rho(t)$, и пусть $K(f,t) = \operatorname{conv}(K \bigcup f)$. Нетрудно проверить, что

$$r(t,r) \ge \max\{r \colon V_r(t) \subset K(f,t)\} = \frac{\varepsilon\rho}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\sqrt{\|f - t\|^2 - \varepsilon^2} - \rho^2)^2}}. \qquad \square$$

В условиях ограниченной возможности влияния на величину знаменателя в (0.1) наблюдатель заинтересован в решении задачи

$$R(t) = \max\{\rho(t, N(f))\colon f \in S(t)\}. \tag{1.4}$$

В [2] приведена формула для производной по направлению величины $\rho(t, N(f))$, которую можно использовать для поиска максимума (1.4) градиентным методом. Предложение 2 дает возможность осуществить такой поиск.

Во многих случаях, в частности в случае многогранного множества G, задача (1.4) решается легко. Так, для множества G из $\mathbb{R}^2$

$$G = \{(x, y)\colon\ -2 \le x \le 0,\ 1 \le y \le 2\},$$

точки $t = (0, 0),\ k = 1/4,\ b = 1,\ a = (0, 1)$ будем иметь: $s^* = (0, 2)$, максимум (1.4) достигается для $f,\ \|s^* - f\| = 1/2$ с максимальной величиной синуса угла $\angle aft$ с вершиной в точке f.

В отличие от наблюдателя, объект может увеличивать знаменатель $\|t - f\|$ для уменьшения функции видимости $r(t, f)$. Ввиду (1.2) и предложения 1 ему следует увеличивать величину

$$\rho(t, s(t)) = \|f - s^*(t)\|, \quad \text{где} \quad s^*(t) \in \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(t).$$

2. Метод перевала

Задача поиска траектории, оптимальной для объекта, принимает вид

$$\inf_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{R(t)}{\rho(t, s(t))}. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$F(t) = R(t)\rho(t, s(t))^{-1},$$

$$L_e = \{y \in Y:\ F(y) \le e\} \quad (e \ge 0),$$

$L_e(t)$ — максимальное по включению линейно связное подмножество из L_e, содержащее точку t, и

$$\widetilde{e} = e(t_*, t^*) = \min\big(e \ge \max\{F(t_*), F(t^*)\},\ L_e(t_*) \bigcap L_e(t^*) \ne \varnothing\big).$$

Любая непрерывная кривая $\mathcal{T} = \mathcal{T}(t_*, t^*)$, принадлежащая множеству

$$\big(L_{\widetilde{e}}(t_*) \bigcap L_{\widetilde{e}}(t^*)\big)$$

и содержащая точки t_* и t^*, является решением задачи (2.1).

Простые примеры показывают, что функция $d(t, s(t))$ и, значит, $F(t)$, вообще говоря, не являются непрерывными.

П р и м е р 1. Пусть $G = \{(x, y)\colon |x| \le 1,\ |y| \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат с вершинами a_i. Для любой точки $t \notin G$ ближайшей точкой из множества $\overline{s}(t)$ может быть только одна из вершин. Дополнение $\mathbb{R}^2 \backslash G$ разбивается на четыре несвязных области Q_i, каждая из которых составлена из четырех областей, расположенных симметрично относительно одной из диагоналей квадрата, так, что для любой точки $t \in Q_i$ ближайшей точкой из $\overline{s}(t)$ является вершина a_i. Нетрудно видеть, что график функции $\rho(t, s(t))$ представляет собой объединение конических поверхностей с вершинами a_i. Эта функция разрывна, и все точки разрыва лежат на продолжении сторон квадрата.

3. Случай многогранного множества G

Поиск оптимальной траектории в (2.1) методом перевала — трудная задача. Она упрощается, если множество G является телесным, может быть, несвязным многогранником (замыканием открытого многогранника с конечным числом граней).

Далее рассматривается задача

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}}\min_{t\in\mathcal{T}} d(t,s(t)), \tag{3.1}$$

являющаяся частным случаем задачи для (0.1) при $p=0,\ q=1$.

О п р е д е л е н и е 1. Точка $a\in G$ называется угловой (вершиной), если существуют $\varepsilon>0$ и гиперплоскость L такие, что $L\bigcap(V_\varepsilon(a)\bigcap G)=a$ и множество $V_\varepsilon(a)\bigcap G$ расположено по одну сторону относительно L.

Далее считаем, что любая вершина многогранника G такова, что множество $V_\varepsilon(a)\bigcap G$ выпукло для некоторого $\varepsilon>0$.

Обозначим через A множество угловых точек множества G.

В случае $X=\mathbb{R}^2$ угловая точка является вершиной угла раствора, меньшего π. Угол при вершине a будем обозначать через $\angle a$, а вертикальный по отношению к $\angle a$ угол — через

$$a\angle=\big\{\lambda(a-x)\colon x\in V_\varepsilon(a)\bigcap G,\ \lambda>0\big\}+a,$$

где $\varepsilon>0$ достаточно мало. Для $a\in A$ будем обозначать

$$\widetilde{T}(a)=\{t\in v(a)\colon a\in\overline{s}(t)\}\quad\text{и}\quad T(a)=\{t\in v(a)\colon a\in\mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(t)\}$$

— множество точек t из $\widetilde{T}(a)$, для которых a является ближайшей точкой из $\overline{s}(t)$.

Установим явное выражение для множества $T(a)$. Пусть $a\in A$. Легко видеть, что

$$\widetilde{T}(a)=X\setminus\big[(\angle a)\bigcup(a\angle)\bigcup N(a)\big].$$

Здесь следует подчеркнуть, что видимые из a точки t (т. е. $a\in v(t)$), принадлежащие вертикальному углу $a\angle$, не содержатся в множестве $\widetilde{T}(a)$. Для любого $a'\in A$ возьмем элемент $\varphi=\varphi_{a'}$ из X такой, что

$$\|\varphi\|=1,\quad \Big\langle\varphi_{a'},\frac{a'-a}{\|a'-a\|}\Big\rangle=1,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение, тогда

$$T(a)\subset\widetilde{T}(a)\setminus\Big[t\in\widetilde{T}(a')\colon\langle\varphi_{a'},t\rangle>\Big\langle\varphi_{a'},\frac{a'+a}{2}\Big\rangle\Big],$$

поскольку расстояние точек t вычитаемого множества до a' меньше, чем до точки a. Более того, легко видеть, что

$$T(a)=\widetilde{T}(a)\setminus\bigcup_{a'\in(A\setminus a)}\Big[t\in\widetilde{T}(a')\colon\langle\varphi_{a'},t\rangle>\Big\langle\varphi_{a'},\frac{a'+a}{2}\Big\rangle\Big]. \tag{3.2}$$

Из формулы (3.2) следует

Предложение 3. *Множество $T(a)$ для любой $a\in A$ является многогранником, грани которого могут лежать либо на $bd(\angle a)\bigcup bd(a\angle)$, либо на гиперплоскости $H(a,a')$, содержащей точку $(a+a')/2$ и ортогональной отрезку $[a,a']$, для некоторой вершины $a'\in A$.*

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $X = \mathbb{R}^2$*. Справедливы следующие утверждения*:

— *для любой точки* $a \in A$ *множество* $T(a)$ *является многоугольником, необязательно связным,*

— $\bigcup\limits_{a \in A} T(a) = X \setminus \overset{\circ}{G}$,

— $\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') = \varnothing$ *для любых* $a, a' \in A$, $a' \neq a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $t \notin G$ множество видимых из t точек множества G, т. е. $v(t) \bigcap G$, представляет собой кусочно линейную кривую без самопересечений. Возьмем ее связную компоненту. Ввиду связности множества $X \setminus G$ исключен случай, когда эта компонента разбивает пространство на внешнюю часть и внутреннюю, содержащую точку t. Пусть g — конечная точка этой связной компоненты. Легко убедиться, что на луче с началом t, содержащем точку g, имеется угловая точка a множества G, являющаяся предельной для затененных точек, т. е. $a \in \overline{s}(t)$. Отсюда следует, что для некоторой угловой точки $a' \in G$, может быть, для $a' = a$, выполняется включение $t \in T(a')$. Итак,

$$(X \setminus G) \subset \bigcup_{a \in A} T(a).$$

Имеем также, что

$$\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') = \varnothing \;\; \forall\, a, a' \in A.$$

В самом деле, если $\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') \neq \varnothing$, то для любых t и t' из множества $\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a')$ верны равенства

$$\|t - a\| = \|t - a'\|, \quad \|t' - a\| = \|t' - a'\|,$$

в частности, они выполняются для точки t и точки $t' \in [a, t]$, близкой к t, что невозможно. □

В случае пространства $X = \mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ второе утверждение теоремы может нарушаться.

П р и м е р 2. Из точек внутренней полости множества $G \subset \mathbb{R}^3$, где

$$G = \Big\{(x, y, z) \colon \frac{1}{2} \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 1, \;|z| \leq 1\Big\},$$

не видно ни одной угловой точки этого множества.

Доказательство же первого и третьего утверждений остается без изменений. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $X = \mathbb{R}^n$, *тогда*

— *множество* $T(a)$ *является многогранником для любой* $a \in A$,

— $\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') = \varnothing$ *для любых* $a, a' \in A$, $a \neq a'$.

Отметим, что множество

$$T_0 = (X \setminus \overset{\circ}{G}) \setminus \bigcup_{a \in A} \overset{\circ}{T}(a) \tag{3.3}$$

также является многогранником. Как показывает пример, оно может быть непустым в случае $X = \mathbb{R}^n$ $(n > 2)$.

Для любого t существует точка $s^* = s^*(t) \in \overline{s}(t)$, ближайшая к t, т. е.

$$\rho(t, s(t)) = \|t - s^*(t)\|, \quad t \in T(s^*). \tag{3.4}$$

Очевидно, что точка $s^*(t)$ не может быть внутренней для грани размерности $n - 1$ многогранника G. Так, в случае пространства $X = \mathbb{R}^2$ точка s^* является вершиной. В случае же пространства $X = \mathbb{R}^n$ точка t может оказаться в множестве T_0 и точка s^*, реализующая равенство (3.4), принадлежит некоторой грани размерности k, $1 \le k \le n-1$ (см. приведенный выше пример).

Далее будем исходить из того, что в задаче сопровождения участвуют несколько наблюдателей. Естественно предположить, что предпочтительным местоположением наблюдателя является одна из вершин многогранника G, поскольку вершина обеспечивает лучший обзор близлежащей местности и у наблюдателя больше возможностей укрыться от миниобъекта в затененной области. При этом предположении задача (3.1) принимает вид

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}} \min_{t\in\mathcal{T}\setminus T_0} \rho(t, s(t)). \tag{3.5}$$

Наряду с (3.5) представляет интерес задача максимизации интегрального функционала. Для траектории

$$\mathcal{T} = \{t(\tau),\ 0 \le \tau \le 1\} \in \mathbb{T}$$

обозначим

$$\Delta = \Delta_{\mathcal{T}} = \{\tau \in [0,1] \colon t(\tau) \in T_0\}.$$

Упомянутая выше задача ставится следующим образом:

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}^*} \int\limits_{[0,1]\setminus\Delta_\tau} \rho(t(\tau), s(t(\tau)))\, d\tau, \tag{3.6}$$

где $\mathbb{T}^*$ — специальный класс траекторий из $\mathbb{T}$ с заданной последовательностью посещения множеств $T(a)$.

Далее ограничимся случаем $X = \mathbb{R}^2$. Ради простоты будем предполагать, что "коридор" Y, $Y \bigcap \overset{\circ}{G} \ne \varnothing$, внутри которого должен двигаться объект t, является односвязным телесным многогранником (окрестностью заданной базовой траектории), точки t_*, t^* принадлежат его границе и движение объекта осуществляется от t_* к t^*. Границу bdY многоугольника Y разобьем на две части — левую Y_l и правую Y_r (по отношению к объекту, начинающему движение от t_* к t^* по базовой траектории, содержащейся в Y). Обозначим

$$A_Y = \bigl\{a \in A \colon T(a) \bigcap \overset{\circ}{Y} \ne \varnothing\bigr\}.$$

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2. *Если* $\widehat{t} \in \widetilde{T}(a)$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любого* $t \in V_\varepsilon(\widehat{t}) \bigcap \overset{\circ}{V}_{\|\widehat{t}-a\|}(a)$ *выполняется неравенство*

$$\rho(t, s(t)) < \|\widehat{t} - a\|.$$

Из теоремы 1 следует, что "коридор" Y заполнен связными компонентами множеств вида $T(a) \bigcap Y$ $(a \in A_Y)$.

Пусть траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ максимизирует величину $\min_{t\in\widehat{\mathcal{T}}} \rho(t, s(t))$, т. е.

$$\max_{\mathcal{T}} \min_{t\in\mathcal{T}} \rho(t, s(t)) = \min_{t\in\widehat{\mathcal{T}}} \rho(t, s(t)),$$

и точка $\widehat{t} \in \widehat{\mathcal{T}}$ такова, что

$$\rho(\widehat{t}, s(\widehat{t})) = \min_{t\in\widehat{\mathcal{T}}} \rho(t, s(t)). \tag{3.7}$$

Существует точка $\widehat{a} \in A$, для которой

$$\widehat{t} \in T(\widehat{a}) \quad \text{и} \quad \rho(\widehat{t}, s(\widehat{t})) = \|\widehat{t} - \widehat{a}\|, \quad \text{т. е.} \quad \widehat{a} \in \mathcal{P}_{\overline{s}(\widehat{t})}(\widehat{t}).$$

Предложение 4. *Если* $\widehat{t} \in (bdY)\bigcap T(\widehat{a})$, $[\widehat{t}, \widehat{a}]\bigcap \overset{\circ}{Y} \neq \varnothing$, *то точка* $\widehat{t}$ *является точкой локального минимума функции* $\|\widehat{a} - g\|$ *от* g, $g \in Y_r$.

Если эта точка $\widehat{t}$ *принадлежит множеству* $\overset{\circ}{Y}$, *то* $P_{\overline{s}(\widehat{t})}(\widehat{t}) = \{\widehat{a}, 2\widehat{t} - \widehat{a}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим первое утверждение. Если $\widehat{t}$ не является точкой локального минимума функции $\|\widehat{a} - g\|$ переменного $g \in Y_r$, то в любой ε-окрестности точки $\widehat{t}$ найдется точка $y_\varepsilon \in Y_r$, для которой $\|\widehat{a} - y_\varepsilon\| < \|\widehat{a} - \widehat{t}\|$. Траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ должна пересечь отрезок $[\widehat{a}, y_\varepsilon]$ и для точки $t_\varepsilon = [\widehat{a}, y_\varepsilon]\bigcap \widehat{\mathcal{T}}$ по лемме 2 будет выполняться неравенство $\rho(t_\varepsilon, s(t_\varepsilon)) \leq \|t_\varepsilon - \widehat{a}\| < \|\widehat{t} - \widehat{a}\|$, противоречащее равенству (3.7) и выбору вершины $\widehat{a}$.

Проверим справедливость второго утверждения. Обозначим $\widehat{a}_0 = 2\widehat{t} - \widehat{a}$, $\widehat{P} = P_{\overline{s}(\widehat{t})}(\widehat{t})$. Допустим, что $\widehat{a}_0 \notin \widehat{P}$. Построим траекторию $\mathcal{T}_\varepsilon$, изменив траекторию $\widehat{\mathcal{T}}$ в ε-окрестности точки $\widehat{t}$ так, чтобы $\mathcal{T}_\varepsilon$ прошла через точку $t_\varepsilon = \widehat{t} - \varepsilon(\widehat{a} - \widehat{t})$. Тогда будем иметь неравенство

$$\rho(t_\varepsilon, s(t_\varepsilon)) \leq \|t_\varepsilon - \widehat{a}\| < \|\widehat{t} - \widehat{a}\|,$$

которое противоречит свойству экстремальности (3.7) траектории $\widehat{\mathcal{T}}$. Теперь предположим, что кроме точек $\widehat{a}, \widehat{a}_0$ есть еще точка a, принадлежащая проекции $\widehat{P}$. Для определенности будем считать, что $[\widehat{a}, \widehat{t}]\bigcap Y_l \neq 0$ и, значит, $[\widehat{a}_0, \widehat{t}]\bigcap Y_r \neq \varnothing$. Определим точку t_ε следующим образом:

$$t_\varepsilon = \widehat{t} + \varepsilon\frac{a + \widehat{a}_0 - 2\widehat{t}}{2}, \quad \text{если} \quad [a, \widehat{t}]\bigcap Y_l \neq \varnothing.$$

$$t_\varepsilon = \widehat{t} + \varepsilon\frac{a + \widehat{a} - 2\widehat{t}}{2}, \quad \text{если} \quad [a, \widehat{t}]\bigcap Y_r \neq \varnothing,$$

Тогда будем иметь $\|a - t_\varepsilon\| = \|\widehat{a}_0 - t_\varepsilon\| < \|\widehat{a} - \widehat{t}\|$ в первом случае и $\|\widehat{a} - t_\varepsilon\| = \|a - t_\varepsilon\| < \|\widehat{a} - \widehat{t}\|$ во втором случае. Построив траекторию $\mathcal{T}_\varepsilon$, изменив исходную траекторию $\widehat{\mathcal{T}}$ в ε-окрестности точки $\widehat{t}$ так, чтобы траектория $\mathcal{T}_\varepsilon$ содержала точку t_ε, получим противоречие с условием (3.7) экстремальности траектории $\widehat{\mathcal{T}}$. Предложение установлено. □

О п р е д е л е н и е 2. Отрезок назовем разделяющим (точки t_*, t^*), если любая траектория из $\mathbb{T}$ пересекается с ним и его пересечение с $\overset{\circ}{Y}$ — связный интервал.

Для поиска траектории, доставляющей максимум (3.5), рассмотрим множество разделяющих отрезков трех видов:

$$W = \Big\{[a, a'] : \ a \in A, \ a' \in A, \ a \in \widetilde{T}(a'), \ a' \in \widetilde{T}(a), \ \frac{a + a'}{2} \in Y\Big\},$$

$$W_l = \Big\{[a, y_l] : \ a \in A, \ y_l \in Y_l, \ [a, y_l]\bigcap Y_r \neq \varnothing, \ y_l \in \widetilde{T}(a)\bigcap \mathcal{P}_{Y_l}(a)\Big\},$$

$$W_r = \Big\{[a, y_r] : \ a \in A, \ y_r \in Y_r, \ [a, y_r]\bigcap Y_l \neq \varnothing, \ y_r \in \widetilde{T}(a)\bigcap \mathcal{P}_{Y_r}(a)\Big\}.$$

Обозначим

$$M = \min\Big\{\min_W \frac{\|a - a'\|}{2}, \ \min_{W_l} \|a - y_l\|, \ \min_{W_r} \|a - y_r\|\Big\}. \tag{3.8}$$

Из предложения 4 следует

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\max_{\mathcal{T}} \min_{t \in \mathcal{T}} \rho(t, s(t)) = M.$$

Траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ *является экстремальной в задаче* (3.7) *тогда и только тогда, когда*

$$\rho(t, s(t)) \geq M \quad \forall \ t \in \widehat{\mathcal{T}}$$

и для отрезков из W, W_l, W_r, *доставляющих минимум* (3.8), *выполняются включения*

$$\frac{a + a'}{2} \in \widehat{\mathcal{T}}, \quad y_l \in \widehat{\mathcal{T}}, \quad y_r \in \widehat{\mathcal{T}}.$$

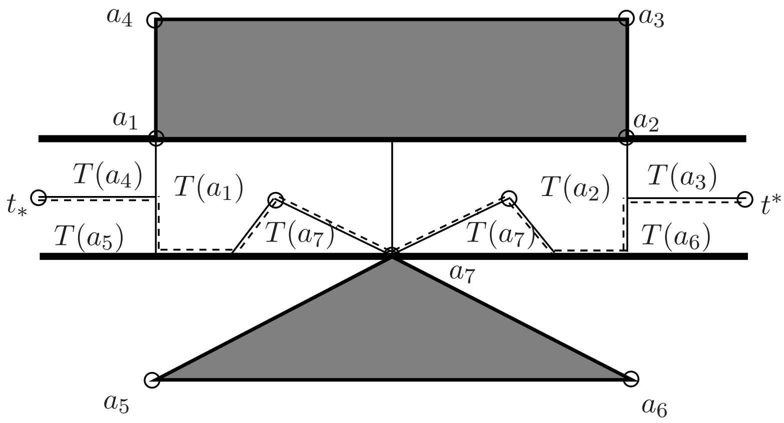

Рисунок.

Перейдем к задаче (3.6) максимизации интегрального функционала. Ясно, что без дополнительных ограничений на класс $\mathbb{T}$ траекторий величина (3.6) не ограничена.

Как отмечалось, "коридор" заполнен связными компонентами B множеств вида $T(a)\bigcap Y$ $(a \in A_Y)$. Каждая из них является многогранником. Совокупность этих компонент обозначим через $\mathcal{N} = \{B\}$. Естественно потребовать, чтобы часть траектории $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, попавшая в компоненту $B \subset T(a)\bigcap Y$, располагалась по возможности дальше от вершины a, что фактически однозначно определяет траекторию на B.

Второе требование — порядок посещения траекторией компонент B. Введем на $\mathcal{N}$ частичный порядок по величине расстояния $d(t_*, B)$, здесь $d(t_*, x)$ означает минимум длин кривых, содержащихся в Y и соединяющих точку t^* с $x \in B$. Построим всевозможные связные строго возрастающие цепочки

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}, \quad t_* \in B_1, \quad t^* \in B_N, \quad d(t_*, B_i) < d(t_*, B_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{3.9}$$

где номер N зависит от цепочки. Будем рассматривать только такие траектории $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{T}$, которые посещают множества из цепочки по очереди, в соответствии с введенным порядком.

На каждой компоненте $B = B(a) \subset T(a) \cap Y$ $(B \in \mathcal{N})$ выделим "дальнюю" от вершины a часть $\gamma = (bdB)^* = (bdB)^*(a)$ границы bdB компоненты B следующим образом.

Найдем угол с вершиной a наименьшего раствора, содержащий компоненту $B(a)$. Две точки на сторонах этого угла, наиболее удаленные от a, разбивают bdB на две части: ближнюю к a и дальнюю от вершины a часть $\gamma_B = (bdB)^*$.

Для каждой цепочки $\mathcal{B}$ (3.9) траектория $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ строится из фрагментов "дальних" границ $\gamma_i = (bdB_i)^*$ $(B_i \subset T(a),\ a = a(B_i))$ с весом

$$q_i = \int\limits_{\gamma_i} \|t - a(B_i)\| \, dt \tag{3.10}$$

и при необходимости из отрезков, принадлежащих $bd(a\angle)$ (см. предложение 3) с нулевым весом. Вес $Q_{\mathcal{B}}$ траектории $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ определяется как сумма весов q_i.

При введенных требованиях на класс траекторий $\mathcal{T}$ из $\mathbb{T}$ задача (3.6) сводится к задаче

$$\max_{\mathcal{B}} Q_{\mathcal{B}}$$

поиска оптимального пути на направленном графе, вершинами которого являются множества $B \in \mathcal{N}$ с весом (3.10), а пути определяются цепочками (3.9).

В приведенном примере (см. рисунок выше) множество G составлено из прямоугольника с вершинами $a_1, \ldots, a_4$ и треугольника с вершинами a_5, a_6, a_7, "коридор" Y — полоса, ограниченная горизонтальными прямыми, разделяющая прямоугольник и треугольник. Траектория, обозначенная пунктирной линией, является оптимальной для обеих задач (3.1), (3.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Объект и наблюдатель. Задача сопровождения // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 7–19.
2. **Бердышев В.И.** Характеристики видимости движущейся точки // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 5. С. 588–590.

Бердышев Виталий Иванович
академик
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 09.10.2014