ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.988.68

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ МЕТОДОВ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ[1]

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

В работе рассматриваются некорректно поставленные задачи локализации по зашумленным данным разрывов первого рода (для функции одной переменной) и линий разрыва (для функции двух переменных). Авторами исследована дискретизация регулярных методов локализации, введены классы корректности и получены оценки точности аппроксимации особенностей и порога разделимости построенных алгоритмов. Показано, что дискретные алгоритмы локализации разрывов первого рода зашумленной функции одной переменной оптимальны по порядку.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, разрыв первого рода, локализация особенностей, регуляризующий алгоритм, дискретизация.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. On discretization of methods for localization of singularities a noisy function.

Ill-posed problems of localizing the singularities of a noisy function of one or two variables are studied. For functions of one variable, singularities are discontinuities of the first kind; for a function of two variables, singularities are lines of discontinuity. The discretization of regular localization methods is investigated. Correctness classes are introduced, and error estimates are obtained for the approximation of singularities and separability threshold of the constructed algorithms. It is shown that discrete algorithms for localizing discontinuities of the first kind of a noisy function of one variable are order-optimal.

Keywords: ill-posed problem, discontinuity of the first kind, localization of singularities, regularizing method, discretization.

Введение

Во многих прикладных областях возникает необходимость локализовать особенности (определить количество и положение) зашумленной функции одной или двух переменных. Изложению алгоритмов локализации особенностей различных типов по зашумленным данным посвящено большое количество литературы. Для функции одной переменной построение практических алгоритмов локализации разрывов первого рода можно найти в [1; 2] (см. также обзор [3]). Для функции двух переменных, например, при обработке изображений, возникает задача локализации линий, в окрестности которых измеряемая функция является гладкой, а в каждой точке линии терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Различные алгоритмы, позволяющие выделять линии разрыва зашумленной функции двух переменных, и примеры их применения можно найти, например, в [4; 5].

Проблема заключается в том, что обычно задача локализации особенностей по зашумленным данным является некорректно поставленной [6–8], поскольку количество и положения особенностей известной зашумленной функции могут как угодно сильно отличаться от искомых количества и положений особенностей точной функции. В работах авторов [3; 11–16] построены регуляризующие методы, которые позволяют определить количество и аппроксимировать положение разрывов первого рода функции одной переменной и линий разрыва функции двух переменных. Методы локализации заключаются в конструировании вспомогательной функции, которая является сверткой зашумленной функции с усредняющей функцией, и в ее исследовании с помощью порогового (корреляционного) метода. При численной реализации метода локализации необходима дискретизация вычисления интеграла свертки и порогового

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00629а) и программы президиума РАН "Математическая теория управления".

метода. Приближенное вычисление интегралов является хорошо разработанной стандартной процедурой. Поэтому для упрощения изложения в статье без дополнительного обсуждения предполагается, что в точках сетки вспомогательная функция вычислена приближенно с заданной точностью.

Основная цель настоящей работы заключается в дискретизации порогового метода исследования вспомогательной функции. Авторами показано, что при согласовании выбора шага сетки с уровнем погрешности задания исходных данных оценки точности аппроксимации особенностей и порога разделимости для дискретного метода имеют тот же порядок, что и для непрерывного метода [14; 15].

В первом разделе рассмотрена задача локализации разрывов первого рода зашумленной функции одной переменной. Второй раздел посвящен задаче локализации линии разрыва зашумленной функции двух переменных.

1. Алгоритмы локализации разрывов первого рода функции одной переменной

Рассмотрим функцию g, имеющую разрывы первого рода в точках $x_k,\ k = 1, 2, \ldots, l,$ вне которых функция достаточно гладкая и имеет соответствующие пределы $g(x_k + 0),\ g(x_k - 0)$. Обозначим скачок функции g в точке x_k через $\Delta_k = g(x_k + 0) - g(x_k - 0)$.

Определим множество MV функций g, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) функция g ограничена на $(-\infty, +\infty)$;

(ii) на любом отрезке $[b, c]$ таком, что интервал (b, c) не содержит точек разрыва, функция g абсолютно непрерывна;

(iii) функция g' почти всюду ограничена на $(-\infty, +\infty)$.

Начнем с постановки задачи локализации разрывов первого рода функции из множества MV. Договоримся везде далее под L_1 и L_2 понимать $L_1(-\infty, +\infty)$ и $L_2(-\infty, +\infty)$. Через $\operatorname{ess\,sup}$ обозначим супремум почти всюду.

Постановка задачи. Пусть функция $g \in MV$. Требуется по функции g^δ и уровню погрешности δ таким, что $\|g - g^\delta\|_{L_2} \le \delta$, определить число l и аппроксимировать положения разрывов первого рода $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности локализации.

Для получения оценок точности локализации необходима дополнительная априорная информация. Пусть для точной функции g известно:

(**1**) задано число $\Delta^{\min} > 0$ такое, что $\min\{|\Delta_k|\colon k = 1, 2, \ldots, l\} \ge \Delta^{\min}$;

(**2**) задано число $r > 0$ такое, что $\operatorname{ess\,sup}_s |g'(s)| \le r$.

В условии (**2**) число r без ограничения общности можно считать равным единице, что мы и будем делать в дальнейшем. Множество функций $g \in MV$, удовлетворяющих условиям (**1**), (**2**), обозначим $\mathfrak{M}_{MV}$.

Методы локализации [11–14] основаны на построении и исследовании вспомогательной функции. Для построения вспомогательной функции в настоящей работе будем использовать усредняющую функцию $\phi(t)$ из множества усредняющих функций ΦF, удовлетворяющих условиям:

(a) $\phi \in W_1^1(-\infty, +\infty)$; $|\phi'(t)| \le C$, C — константа;

(b) $\sup\limits_{t \in [-1,1]} |\phi(t)| = \phi(0) = 1$;

(c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Методы локализации, использующие усредняющие функции из множества ΦF, конструировались в работах [12–14]. Заметим, что для любой функции $\phi \in \Phi F$ существуют константы $0 < \tau < 1$, $a > 0$ такие, что

$$a \le |\phi(t)| \le 1 \text{ для } t \in [-\tau, \tau]. \tag{1.1}$$

Вспомогательная функция $g^\delta_\lambda(x)$ вычисляется по формуле

$$g^\delta_\lambda(x) = \int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} g^\delta(t)(\phi_\lambda(x-t))'_x dt, \quad \phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{1.2}$$

Каждая усредняющая функция $\phi \in \Phi F$ будет порождать метод локализации разрывов первого рода для рассматриваемой задачи.

Сформулируем лемму 3 из работы [14].

Лемма 1. *Пусть $g \in \mathfrak{M}_{MV}$ и зафиксирована функция $\phi \in \Phi F$. Тогда для любого $\lambda > 0$ существует непрерывная функция g^δ_λ, задаваемая формулой* (1.2)*, для которой в условиях рассматриваемой задачи имеет место представление*

$$g^\delta_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \phi_\lambda(x - x_k) + \alpha_\lambda(x) + \Delta g^\delta_\lambda(x) \tag{1.3}$$

с оценками

$$\sup_x |\alpha_\lambda(x)| \le A_0\lambda, \quad \sup_x |\Delta g^\delta_\lambda(x)| \le A_1 \lambda^{-1/2}\delta,$$

где $\alpha_\lambda(x) = \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} g'(t)\phi_\lambda(x-t)dt$, $A_0 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}$.

Без ограничения общности будем считать, что точки разрыва x_k, $k = 1, 2, \dots, l$, точной функции g принадлежат известному отрезку $[-d, d]$. Введем параметр $P = a\Delta^{\min}/2$.

Пусть вместо функции g^δ_λ вычисляется ее приближенное значение $\tilde{g}^\delta_\lambda$ в точках равномерной сетки x^i на отрезке $[-d-h, d+h]$ с шагом Δx ($h > 0$ — малый параметр). Значения $\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i)$ вычисляются по какой-либо формуле приближенного вычисления интегралов так, что выполняется следующее условие аппроксимации интеграла при вычислении вспомогательной функции:

$$\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i) = g^\delta_\lambda(x^i) + \Delta\tilde{g}(x^i), \quad \text{где} \quad \max_{x^i} |\Delta\tilde{g}(x^i)| \le \frac{P}{8}. \tag{1.4}$$

Необходимой точности можно достичь, уменьшая шаг сетки и/или используя формулу приближенного вычисления интегралов более высокого порядка. Отметим, что сетка x^i, на которой вычисляется функция $\tilde{g}^\delta_\lambda$, может не совпадать с сеткой, которая используется для приближенного вычисления интеграла свертки в (1.2).

Алгоритм локализации особенностей, приведенный ниже, по величинам $\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i)$ определяет количество l точек разрыва x_k точной функции g и находит приближения x^δ_k, $k = 1, 2, \dots, l$. Алгоритм в своей работе использует параметры $\lambda, \Delta x$, которые будут определены позже. Через $\lceil\cdot\rceil$ обозначим округление до целого в бóльшую сторону: $\lceil\cdot\rceil = [\,\cdot\,] + 1$, квадратные скобки $[\,\cdot\,]$ здесь означают целую часть числа.

А л г о р и т м Π_Δ. Положим начальное $i := 0$, $m := 0$.
Шаг алгоритма: если $x^i \ge d$, то завершаем процесс;
иначе, если $|\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i)| \ge P$, то положим $m := m+1$, $a_m := x^i$, $i := i + \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil$, $x^\delta_m := a_m + \lambda/2$;
иначе $i := i + 1$;
повторяем шаг алгоритма.

Таким образом, алгоритм Π_Δ по значениям $\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i)$ определяет величину m, относительно которой будет доказано, что $m = l$, и приближения x^δ_k для аппроксимации положений особенностей x_k. Заметим, что точка x^δ_k может не быть точкой сетки.

В следующей теореме получены оценки точности локализации точек разрыва x_k величинами x^δ_k. Напомним, что $P = a\Delta^{\min}/2$, $A_0 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}$, τ — константа из условия (1.1). Для формулировки теоремы нам понадобятся следующие числа и функции:

$$D = \Big(\frac{2A_1}{P}\Big)^2, \quad \delta_0 = \frac{P}{2A_1}\Big(\frac{P}{3A_0}\Big)^{1/2},$$

$$\lambda(\delta) = D\delta^2, \quad \Delta x = \tau\lambda(\delta), \quad h(\delta) = 2\lambda(\delta) + \Delta x = \lambda(\delta)(2+\tau).$$

Теорема 1. *Пусть $g \in \mathfrak{M}_{MV}$ и зафиксирована функция $\phi \in \Phi F$. Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ и выполнении неравенства $\min\limits_{1\le j,k\le l,\ i\ne k} |x_j - x_k| \ge h(\delta)$ для алгоритма Π_Δ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \le (D/2)\delta^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\tilde g_\lambda^\delta(x^i)$ в точках сетки x^i из окрестности точки разрыва x_k таких, что $|x^i - x_k| \le \lambda,\ k = 1,2,\ldots,l$. Поскольку $\tau < 1$ и $\Delta x = \tau\lambda(\delta)$, то такие точки x^i имеются. Используя представление (1.3) и условие аппроксимации (1.4), в силу финитности функции ϕ получаем

$$\tilde g_\lambda^\delta(x^i) = \Delta_k \cdot \phi_\lambda(x^i - x_k) + \alpha_\lambda(x^i) + \Delta g_\lambda^\delta(x^i) + \Delta\tilde g(x^i).$$

Для $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ имеем

$$\max_{x^i} \left|\alpha_\lambda(x^i) + \Delta g_\lambda^\delta(x^i) + \Delta\tilde g(x^i)\right| \le A_0\lambda + A_1\delta\lambda^{-1/2} + \frac{P}{8}.$$

Оценим снизу величины $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)|$ для $x^i \in [x_k - \tau\lambda, x_k + \tau\lambda]$. Учитывая условие (1.1) на функцию ϕ, при данном выборе параметров для $k = 1,2,\ldots,l$ получаем

$$\max_{x^i:\ |x^i - x_k| \le \tau\lambda} |\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| \ge a\Delta^{\min} - \frac{23}{24}P > P. \tag{1.5}$$

Вне множества $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{l} \{x^i \colon |x^i - x_k| \le \lambda\}$ величины $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)|$ оцениваются сверху следующим образом:

$$|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| \le A_0\lambda + A_1\delta\lambda^{-1/2} + \frac{P}{8} \le \frac{23}{24}P < P. \tag{1.6}$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т. е. алгоритм Π_Δ должен найти приближение x_k^δ для точек $x_k,\ k = 1,2$. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод Π_Δ должен найти приближение для l точек. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций $g(x)$, для которых выполнено условие разделимости: $x_2 - x_1 \ge h(\delta) = 2\lambda + \Delta x$.

Согласно (1.5) во всех точках сетки x^i таких, что $|x^i - x_k| \le \tau\lambda$, имеем $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| > P$. Поскольку шаг сетки $\Delta x = \tau\lambda$, то для любого k на отрезке $[x_k - \tau\lambda, x_k + \tau\lambda]$ найдется точка сетки $x^i < x_k$. Следуя алгоритму Π_Δ, будем считать x^i первой точкой сетки, в которой $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| \ge P$. Так как $x_1 < x_2$, то $x^i < x_1$. Заметим, что x^i необязательно принадлежит отрезку $[x_1 - \tau\lambda, x_1 + \tau\lambda]$, но $|x^i - x_1| \le \lambda$ согласно оценке (1.6). Следовательно, x_1 принадлежит отрезку $[x^i, x^i + \lambda] =: [a_1, a_1 + \lambda]$.

Далее, следуя алгоритму Π_Δ, положим $i := i + \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil$, т. е. $x^i = a_1 + \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil\Delta x$. Ясно, что $x^i - x_1 > \lambda$. Покажем, что $x^i < x_2$. Используя условие разделимости, имеем $x_2 - x^i \ge x_2 - a_1 - \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil\Delta x > x_2 - x_1 - \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil\Delta x \ge x_2 - x_1 - 2\lambda - \Delta x \ge 0$. Следовательно, $x^i < x_2$. Далее, согласно (1.5) найдется точка сетки x^i такая, что $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| \ge P$. Согласно (1.6) $x_2 - x^i \le \lambda$, т. е. $x_2 \in [x^i, x^i + \lambda] =: [a_2, a_2 + \lambda]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2 + \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil\Delta x, d]$. Ясно, что он не содержит точек множества Q. Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Поскольку для всех точек $x \in [a_k, a_k + \lambda]$, $k = 1,2$, имеем оценку $|x - x_k| \le \lambda$, то для середины отрезков $x_k^\delta := a_k + \lambda/2$ справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \le \lambda/2$. □

З а м е ч а н и е 1. Если шаг сетки Δx выбрать меньше $\tau\lambda$, это не улучшит оценку точности локализации особенностей, но улучшит разделимость, т. е. уменьшит функцию $h(\delta)$. Выбирать шаг Δx больше $\tau\lambda$ нельзя, поскольку при этом на отрезке $[x_k - \tau\lambda, x_k + \tau\lambda]$, $k = 1,2,\ldots,l$, может оказаться меньше двух точек сетки и алгоритм Π_Δ не будет правильно работать.

Для того чтобы показать оптимальность построенного алгоритма локализации, введем необходимые определения [13].

О п р е д е л е н и е 1. Метод, определяющий по функции g^δ и уровню погрешности δ величину l и приближения x_k^δ, $k = 1, 2, \ldots, l$, к положениям особенностей x_k функции g, назовем *методом локализации.*

Нам понадобится дополнительное условие на функцию g:
(**3**) задано положительное число $\hat{h}$ такое, что $\min\limits_{j,k\geq 1,\ j\neq k} |x_j - x_k| \geq \hat{h}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}'_{MV}$ класс функций из $\mathfrak{M}_{MV}$, удовлетворяющих условию (**3**).

Для произвольного метода локализации $\tilde{\Pi}$ на классе функций $\mathfrak{M}'_{MV}$ введем понятия оптимальности и оптимальности по порядку и дадим определения оптимального (оптимального по порядку) метода по точности аппроксимации.

О п р е д е л е н и е 2. Для метода $\tilde{\Pi}$ точность восстановления особенностей на классе $\mathfrak{M}'_{MV}$ определяется величиной

$$\tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \equiv \sup_{g\in\mathfrak{M}'_{MV}} \ \sup_{\|g-g^\delta\|_{L_2}\leq\delta} \ \sup_{1\leq k\leq l} |x_k - x_k^\delta|.$$

Величину $\hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) = \min\limits_{\tilde{\Pi}} \tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$ назовем *оптимальной точностью* локализации особенностей на классе $\mathfrak{M}'_{MV}$ (минимум берется по всем методам локализации разрывов). Метод $\tilde{\Pi}$ назовем *оптимальным* (*оптимальным по порядку*) на классе $\mathfrak{M}'_{MV}$, если $\hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) = \tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$ (существует константа $R > 1$ такая, что $\tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \leq R \cdot \hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta)$).

Кроме точности аппроксимации интерес представляет оценка снизу для другой характеристики методов локализации — порога разделимости.

О п р е д е л е н и е 3. Наименьшая функция $\bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$, которую можно поставить в условие $\min\limits_{1\leq j,k\leq l, j\neq k} |x_j - x_k| \geq \bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$ так, чтобы метод $\tilde{\Pi}$ позволял локализовать особенности, называется *порогом разделимости метода* $\tilde{\Pi}$ на классе функций $\mathfrak{M}_{MV}$; *порогом разделимости задачи* на классе функций $\mathfrak{M}_{MV}$ называется функция $\hat{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta) = \min\limits_{\tilde{\Pi}} \bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$, где минимум берется по всем методам локализации $\tilde{\Pi}$. Метод $\tilde{\Pi}$ назовем Р-*оптимальным* (Р-*оптимальным по порядку*) на классе $\mathfrak{M}_{MV}$, если $\hat{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta) = \bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$ (существует константа $R > 1$ такая, что $\bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \leq R \cdot \hat{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta)$).

Из теоремы 1 следует

Следствие 1. *Для алгоритма* Π_Δ *справедливы оценки точности локализации точек разрыва* $\tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \Pi_\Delta, \delta) \leq \lambda(\delta)/2 = (D/2)\delta^2$ *и порога разделимости* $\bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \Pi_\Delta, \delta) \leq h(\delta) = D(2+\tau)\delta^2$.

В работе [12] получены оценки снизу для оптимальной точности и порога разделимости рассматриваемой задачи для случая, когда функция зашумлена в $L_p(-\infty, +\infty)$. Для рассматриваемой в настоящей работе задачи при $p = 2$ имеем

$$\hat{\tau}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta) \geq \left(\frac{\delta}{\Delta^{\min}}\right)^2, \quad \hat{h}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) \geq \left(\frac{\delta}{\Delta^{\min}}\right)^2.$$

Ясно, что эти оценки также являются оценками снизу и для алгоритма Π_Δ.

Следствие 2. *Алгоритм* Π_Δ *оптимален по порядку на классе* $\mathfrak{M}'_{MV}$ *и Р-оптимален по порядку на классе* $\mathfrak{M}_{MV}$.

2. Алгоритм локализации линий разрыва функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, которая имеет конечное число линий разрыва $\Gamma_k, k = 1, 2, \ldots, l$, (см. рис. 1); вне этих линий функция $f(x, y)$ гладкая. Точные условия на линии разрыва и функцию $f(x, y)$ будут приведены ниже.

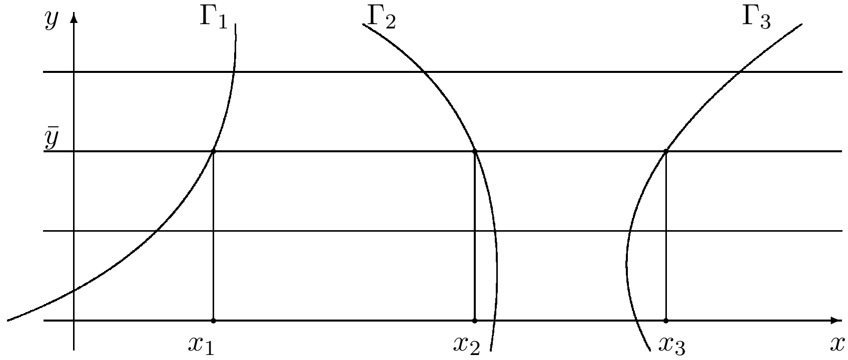

Рис. 1. Локализация линий разрыва функции двух переменных: Γ_k — линии разрыва функции f; x_k — аппроксимируемые величины.

Пусть в полосе $D = \{(x, y)\colon -\infty < x < +\infty, |y - \bar{y}| \le \bar{\delta}\}$ линии $\Gamma_k, k = 1, 2, \ldots, l$, можно задать функциями $x = \gamma_k(y)$. Через x_k обозначены точки пересечения кривых Γ_k с линией $y = \bar{y}$: $x_k = \gamma_k(\bar{y}), k = 1, 2, \ldots, l$. Скачок функции f на линии Γ_k обозначим $\Delta_k(y)$.

Введем множество DMV функций двух переменных, для которых в полосе D выполнены следующие условия:

(1^*) $f(x, y) \in MV$ для почти всех y : $|y - \bar{y}| \le \bar{\delta}$; для $(x, y) \notin \Gamma_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, существуют $|f'_x(x, y)| \le r$ и для $(x, y) \in \Gamma_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, существуют $|f'_x(x \pm 0, y)| \le r$ (без ограничения общности можно считать, что $r = 1$);

(1^{**}) для $(x, y) \in \Gamma_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, существуют конечные величины $f(x \pm 0, y)$, и они не равны; скачок $\Delta_k(y)$ функции f на линии Γ_k является непрерывной функцией; заданы положительные константы $\Delta^{\min}$, $\Delta^{\max}$: $\Delta^{\min} \le \min\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \max\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \Delta^{\max}$;

(1^{***}) существуют производные $\gamma'_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, и $\max\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\gamma'_k(y)| \le M$.

Постановка задачи. Пусть функция $f \in DMV$. Требуется по функции f^δ и уровню погрешности δ таким, что $\|f - f^\delta\|_{L_2(-\infty,+\infty;-\infty,+\infty)} \le \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности локализации.

Методы локализации в этом случае так же, как и в одномерных задачах, основаны на построении и исследовании вспомогательной функции. Поскольку возмущение $f - f^\delta$ двумерно, то для построения вспомогательной функции нужно проводить усреднение по каждой переменной. Для этого нам понадобятся два класса усредняющих функций. В качестве одного класса усредняющих функций выберем множество ΦF. Введем второе множество усредняющих функций Ψ, которое также состоит из финитных функций $\psi(t),\ t \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:

(a') $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$;

(b') $\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(t)dt = 1$;

(c') для $t \notin [-1, 1]$ $\psi(t) = 0$; для $t \in [-1, 1]$ $\psi(t) \ge 0$.

Положим
$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\Big(\frac{t}{\lambda_1}\Big), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\Big(\frac{t}{\lambda_2}\Big), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Ядро усреднения для двумерной функции $f^\delta(x,y)$ возьмем в виде произведения функций $(\phi_{\lambda_1}(x))'\psi_{\lambda_2}(y)$ и положим

$$F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f^\delta(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi \psi_{\lambda_2}(\bar y - y)d\xi dy, \quad x \in (-\infty,+\infty). \tag{2.1}$$

Подход к построению метода локализации и получению оценок в случае двух переменных во многом аналогичен случаю одной переменной. Наша задача состоит в получении для функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x)$ оценок в окрестности точек x_k и вне окрестностей точек x_k. Следующая лемма является аналогом леммы 3 из работы [15] (отличается оценка в п. (б)).

Положим $K = \lambda_1 + M\lambda_2$, где M — константа из условия (1^{***}). Напомним, что величина $\bar\delta$ входит в определение полосы D.

Лемма 2. *Пусть $f \in DMV$, зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\lambda_2 \le \bar\delta$ в условиях рассматриваемой задачи справедливы следующие утверждения*:

(а) *если выполнено условие $|x - x_k| \ge K, k = 1,2,\ldots,l$, то для функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x)$, определенной* (2.1), *имеет место оценка*
$$|F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x)| \le A_0\lambda_1 + \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}},$$
где $A_0 = \|\phi\|_{L_1}, A_1 = \|\phi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$;

(б) *если $\min\limits_{k\ne j}|x_j - x_k| \ge K$, то для всех $k = 1,2,\ldots,l$ для $|x - x_k| \le \tau\lambda_1$ имеет место оценка*
$$|F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x)| \ge a\Delta^{\min} - A_0\lambda_1 - \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - \frac{A_2\lambda_2}{\lambda_1},$$
где $A_2 = CM\Delta^{\max}\int_{-1}^{1}|t|\psi(t)dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $\lambda_2 \le \bar\delta$ гарантирует, что пределы интегрирования в (2.1) не выйдут из полосы D. Обозначим $\Delta f = f^\delta - f$. Тогда

$$F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi \psi_{\lambda_2}(\bar y - y)dy$$
$$+ \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} \Delta f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi \psi_{\lambda_2}(\bar y - y)dy. \tag{2.2}$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства Коши — Буняковского и перехода от функций ϕ'_{λ_1}, ψ_{λ_2} к функциям ϕ', ψ.

$$\left|\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} \Delta f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi \psi_{\lambda_2}(\bar y - y)dy\right|$$
$$\le \|\phi'_{\lambda_1}\|_{L_2}\|\psi_{\lambda_2}\|_{L_2}\left(\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}(\Delta f(\xi,y))^2 d\xi dy\right)^{1/2} \le \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}.$$

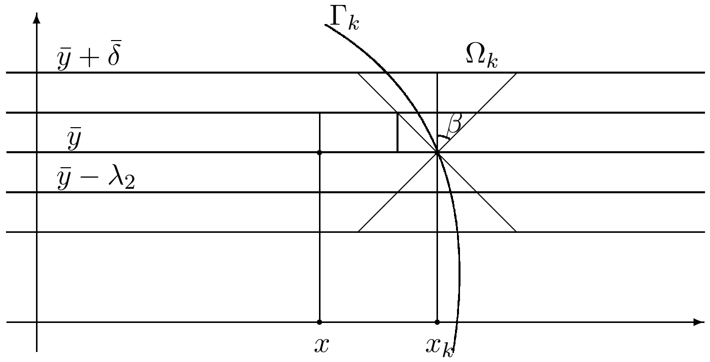

Рис. 2. Условие разделимости: Γ_k — линия разрыва функции f; $x_k - x$ — минимальное расстояние, при котором область интегрирования не пересекается с линией Γ_k; Ω_k — конус с вершиной в точке $(x_k, \bar{y})$ и углом β.

Проверим, что для $|y-\bar{y}| \le \lambda_2$ при условии $|x-x_k| \ge K$ выполнено неравенство $|x-\gamma_k(y)| \ge \lambda_1, k = 1, 2, \cdots, l$. Обозначим через β угол, тангенс которого равен M (см. рис. 2). Ясно, что кривая Γ_k в полосе D не выходит за пределы области Ω_k, где Ω_k — это конус с вершиной в точке $(x_k, \bar{y})$, как это показано на рис. 2. Нам нужно, чтобы при $|y - \bar{y}| \le \lambda_2$ расстояние от прямой x до области Ω_k было не меньше λ_1. Это достигается при условии $|x - x_k| \ge K = \lambda_1 + M\lambda_2$.

Ясно, что для $x = x_j$ при условии $\min\limits_{k \ne j} |x_j - x_k| \ge K$ имеем $|x_j - \gamma_k(y)| \ge \lambda_1, k \ne j$.

Следовательно, в п. (а) формулировки леммы в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов. Поскольку $K > \tau\lambda_1$, то в п. (б) в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k. Получим оценки для первого слагаемого в правой части (2.2) в том и в другом случае.

Рассмотрим случай (а). Перейдем от двойного интеграла в первом слагаемом в правой части (2.2) к повторному и для внутреннего интеграла применим лемму 1. Поскольку в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов, то получаем оценку

$$\left| \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi, y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi \right) \psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy \right|$$

$$= \left| \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi, y)\phi_{\lambda_1}(x-\xi) d\xi \right) \psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy \right|$$

$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in D} |f'_x| \|\phi\|_{L_1} \lambda_1 \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy.$$

Поскольку $\displaystyle\int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(y)dy = 1$, то непосредственно получаем требуемую оценку.

Рассмотрим случай (б). Поскольку в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k, то, применяя лемму 1 для внутреннего интеграла в первом слагаемом (2.2), имеем равенство

$$\int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi, y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi \right) \psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy$$

$$= \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(x-\gamma_k(y))\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy + \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi,y)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\right)\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy. \quad (2.3)$$

Второй интеграл был рассмотрен выше при доказательстве случая (a). Используя формулу Лагранжа, первое слагаемое в правой части (2.3) можно представить в виде

$$\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(x-\gamma_k(y))\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy$$

$$= \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(x-x_k)\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy + \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(x_k-\gamma_k(y))\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy, \quad (2.4)$$

$\theta \in (x-x_k, x-\gamma_k(y))$. Поскольку функция $\Delta_k(y)$ непрерывна, то, в силу (1^{**}), она сохраняет знак для всех y таких, что $|y-\bar y| \le \lambda_2$. Тогда в силу условий (b') и (c') на функцию ψ для первого слагаемого в правой части (2.4) имеем оценку

$$\left|\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(x-x_k)\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy\right| \ge \Delta^{\min} a\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy = \Delta^{\min} a.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.4). Поскольку $x_k = \gamma_k(\bar y)$, то $|x_k-\gamma_k(y)| \le M|\bar y-y|$. Используя условие (a) на функцию ϕ и замену переменных $\bar y - y = t/\lambda_2$, для второго слагаемого в правой части (2.4) получаем

$$\left|\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(x_k-\gamma_k(y))\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy\right| \le \frac{CM\Delta^{\max}}{\lambda_1}\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}|\bar y-y|\psi_{\lambda_2}(\bar y-y)dy \le A_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

□

Без ограничения общности считаем, что точки x_k, $k=1,2,\dots,l$, принадлежат отрезку $[-d,d]$. Введем параметр $P = a\Delta^{\min}/2$. Считаем, что вместо функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}$ вычисляется ее приближенное значение $\widetilde F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}$ в точках равномерной сетки x^i на отрезке $[-d-h, d+h]$ с шагом Δx (h — малый параметр). Предполагаем, что выполнено следующее условие аппроксимации интеграла при вычислении вспомогательной функции:

$$\widetilde F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) = F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) + \Delta\widetilde F(x^i), \quad \text{где} \quad \max_{x^i}|\Delta\widetilde F(x^i)| \le \frac{P}{8}. \quad (2.5)$$

Приведенный ниже алгоритм локализации по величинам $\widetilde F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)$ определяет количество l точек x_k и находит приближения x^δ_k, $k=1,2,\dots,l$. Алгоритм в своей работе использует параметры λ_1, λ_2 и Δx, которые будут определены позже.

А л г о р и т м ΠD_Δ. Положим начальное $i := 0$, $m := 0$.
Шаг алгоритма: если $x^i \ge d$, то завершаем процесс;
иначе, если $|\widetilde F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)| \ge P$, то положим $m{:=}m{+}1$, $a_m{:=}x^i$, $i{:=}i{+}\lceil 2K/\Delta x\rceil$, $x^\delta_m{:=}a_m{+}K/2$;
иначе $i := i+1$;
повторяем шаг алгоритма.

Таким образом, алгоритм ΠD_Δ по значениям $\widetilde F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)$ вычисляет величину m, относительно которой будет доказано, что $m = l$, и приближения x^δ_k для аппроксимации положений особенностей x_k. Как и в алгоритме Π_Δ, точка x^δ_k может не быть точкой сетки.

Напомним, что $K = \lambda_1 + M\lambda_2$, $A_0 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_2 = CM\Delta^{\max}\int_{-1}^{1}|t|\psi(t)dt$. Рассмотрим случай $M > 0$. (Если это не так, т. е. линии Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, являются прямыми, ортогональными оси абсцисс, то все равно можно считать $M > 0$, если загрубить оценку в условии (1^{***}).)

Введем константы

$$\omega = \Big(\frac{P}{4A_2}\Big)^{1/2}, \quad D = \frac{4A_1}{\omega P}\big(1 + M\omega^2\big), \quad \delta_0 = \min\Big\{\frac{\bar{\delta}\omega P}{4A_1}, \ \frac{P^2\omega}{24A_0A_1}\Big\}$$

и функции

$$\lambda_1(\delta) = \frac{4A_1}{\omega P}\delta, \quad \lambda_2(\delta) = \omega^2\lambda_1(\delta), \quad \Delta x = \tau\lambda_1, \quad h(\delta) = 2K + \Delta x.$$

Заметим, что $K = D\delta$.

Теорема 2. *Пусть $f \in DMV$, зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$ и выполнении условия $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j}|x_k - x_j| \ge h(\delta)$ для алгоритма ΠD_Δ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^\delta| \le (D/2)\delta$.*

Доказательство. Оценки из леммы 2 и условие аппроксимации (2.5) при данном выборе параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$ позволяют получить оценки для величин $|\widetilde{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)|$, аналогичные оценкам (1.5), (1.6) из доказательства теоремы 1. Дальнейшее доказательство абсолютно аналогично доказательству теоремы 1. □

Замечание 2. Если шаг сетки Δx выбрать меньше $\tau\lambda_1$, это не улучшит оценку точности, но улучшит разделимость, т. е. уменьшит функцию $h(\delta)$. Выбирать шаг Δx больше $\tau\lambda_1$ нельзя, поскольку при этом на отрезке $[x_k - \tau\lambda_1, x_k + \tau\lambda_1]$, $k = 1, 2, \ldots, l$, может оказаться меньше двух точек сетки и алгоритм ΠD_Δ не будет правильно работать.

Замечание 3. В случае, когда Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, являются прямыми, ортогональными оси абсцисс, т. е. в условии (1^{***}) $M = 0$, теорему 2 можно усилить. Выберем параметры алгоритма следующим образом:

$$D = \Big(\frac{2A_1}{P\bar{\delta}^{1/2}}\Big)^2, \quad \delta_0 = \Big(\frac{P\bar{\delta}}{3A_0}\Big)^{1/2}\frac{P}{2A_1}, \quad \lambda_1(\delta) = D\delta^2, \quad \lambda_2 = \bar{\delta},$$

$$K = \lambda_1, \quad \Delta x = \tau\lambda_1, \quad h(\delta) = 2K + \Delta x = (2+\tau)D\delta^2.$$

Пусть также $f \in DMV$ и зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ при выборе параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \bar{\delta}$ и выполнении условия $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j}|x_k - x_j| \ge h(\delta)$ для алгоритма ΠD_Δ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^\delta| \le (D/2)\delta^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Don't shed tears over breaks / G. Winkler, O. Wittich, V Liebsher, A Kempe // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 2005. Bd. 107, no. 2. S. 57–87.
2. **Сизиков В.С.** Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
3. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О новом классе некорректно поставленных задач // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 24–42. (Математика. Механика. Информатика; вып. 11.)
4. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов М.: Мир, 2005. 671 с.
5. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Под ред. Я.А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
6. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.

7. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
8. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 с.
9. **Oudshoorn C.G.M.** Asymptotically minimax estimation of a function with jumps // Bernoulli. 1998. Vol. 4, no. 1. P. 15–33.
10. **Коростелев А.П.** О минимаксном оценивании разрывного сигнала // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32, вып. 4. С. 796–799.
11. **Антонова Т.В.** Новые методы локализации разрывов зашумленной функции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 375–386.
12. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 30–45.
13. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 56–68.
14. **Ageev A.L., Antonova T.V.** New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. Vol. 21, no. 2. P. 177–191.
15. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
16. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Поступила 05.12.2014

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru