ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.17

СИЛЬНО ОДНОРОДНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ 2-СХЕМ[1]

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Сильно α-однородное частичное пространство прямых порядка (s,t) называется α-частичной геометрией. Если $\alpha = t+1$, то геометрия является двойственной 2-схемой. Локально треугольные и локально Грассмановы графы отвечают треугольным расширениям некоторых двойственных 2-схем, класс сильно однородных квазибиплоскостей совпадает с классом сильно однородных расширений двойственных 2-схем. В работе изучаются сильно однородные расширения двойственных 2-схем.

Ключевые слова: частичная геометрия, однородные расширения, 2-схемы.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. Strongly uniform extensions of dual 2-designs.

A strongly α-uniform partial space of lines of order (s,t) is called an α-partial geometry. If $\alpha = t+1$, then the geometry is called a dual 2-design. Locally triangular and locally Grassman graphs correspond to triangular extensions of certain dual 2-designs, and the class of strongly uniform quasi-biplanes coincides with the class of strongly uniform extensions of dual 2-designs. We study strongly uniform extensions of dual 2-designs.

Keywords: partial geometry, uniform extensions, 2-designs.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a,b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, через $\Gamma_i(a)$ — подграф из Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Γ называется *сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках и $|[a]\cap[b]| = \mu$ для любых двух несмежных вершин a,b.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядка $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1=\dots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X|=m$, и пары $\{a,b\},\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. Граф на множестве вершин $X\times Y$ называется $m\times n$*-решеткой*, если $|X|=m$, $|Y|=n$ и вершины (x_1,y_1), (x_2,y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем F_q. Граф, вершинами которого являются m-мерные подпространства из V и вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $\dim(x\cap y)=m-1$, называется *графом Грассмана* $J_q(n,m)$. Пусть $\mathcal{F}$ — класс графов. Граф Γ называется локально $\mathcal{F}$-графом, если $[a]\in\mathcal{F}$ для любой вершины a из Γ.

Геометрия G *ранга* 2 — это система инцидентности с множеством точек X и множеством блоков $\mathcal{B}$, не имеющая кратных блоков. При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек, и инцидентность становится обычным включением. Две точки из X называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке. *Точечный граф* геометрии G — это граф на множестве точек X, в котором две точки смежны, если они различны и

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00061) (теорема 1), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, №02.A03.21.0006 (теорема 2).

коллинеарны. Аналогично определяется блочный граф. Геометрия G называется *связной*, если связен ее точечный граф. Геометрия называется *треугольной*, если любые три ее попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке.

Для $a \in X$ *вычетом* G_a в точке a называется геометрия с множеством точек X_a, отличных от a и коллинеарных с a, и с множеством блоков $\mathcal{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathcal{B}\}$. Для блока B *вычетом* G_B в блоке называется геометрия с множеством точек $X_B = X - B$ и множеством блоков $\mathcal{B}_B = \{A \in \mathcal{B} \mid A \cap B = \varnothing\}$.

Пусть $a \in X, B \in \mathcal{B}$ и $a \notin B$ (пара (a, B) называется *антифлагом*). Число точек из B, коллинеарных с a, обозначим через $f(a, B)$. Геометрия G называется *β-однородной*, если $f(a, B) = 0$ или β для любого антифлага (a, B); G называется *сильно β-однородной*, если $f(a, B) = \beta$ для любого антифлага (a, B). Если любые два блока из $\mathcal{B}$ пересекаются не более чем по одной точке, то множество блоков называется *множеством прямых* и обозначается $\mathcal{L}$; геометрия $(P, \mathcal{L})$ называется *частичным пространством прямых*. Частичное пространство прямых имеет порядок (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точек и каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой.

Сильно α-однородное частичное пространство прямых порядка (s, t) называется *α-частичной геометрией* и обозначается $pG_\alpha(s, t)$. Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Если $\alpha = t$, то геометрия оказывается *сетью*. Если же $\alpha = t+1$, то геометрия является *двойственной 2-схемой Штейнера* (далее двойственной 2-схемой). Геометрия $pG_{s+1}(s, s)$ называется *проективной плоскостью порядка s*. Множество точек S проективной плоскости $pG_{s+1}(s, s)$ называется *n-дугой*, если $|S| = n$ и S пересекает любую прямую не более чем по двум точкам. *Гиперовалом* проективной плоскости порядка s называется $(s + 2)$-дуга.

Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Геометрия G называется *расширением* α-частичных геометрий, если она связна, и вычет в каждой точке является $pG_\alpha(s, t)$ для подходящих (s, t) (обозначение EpG_α). По связности порядок геометрии (s, t) не зависит от выбора вычета, и такое расширение можно обозначить $EpG_\alpha(s, t)$. Геометрия EpG_α треугольна тогда и только тогда, когда она $(\alpha + 1)$-однородна.

Геометрия $G = (P, \mathcal{B})$ называется *квазибиплоскостью* с параметрами (V, K, Λ), если $|P| = V$, $|B| = K$ для любого блока $B \in \mathcal{B}$, любая точка содержится ровно в R блоках, любые две точки содержатся ровно в 0 или Λ блоках, любые два блока пересекаются ровно в 0 или 2 точках и найдется пара непересекающихся блоков. Заметим, что $R = K\Lambda - K - \Lambda + 2$ (см. лемму 1.1). Если $\Lambda = 2$, то геометрия называется *полубиплоскостью*. Заметим, что квазибиплоскость является сильно β-однородной тогда и только тогда, когда для любого антифлага (a, B) найдется ровно $\alpha = \Lambda\beta/2$ блоков, содержащих a и пересекающих B.

Изучение однородных расширений двойственных 2-схем начато Хьюзом в [1]. Заметим, что класс сильно однородных расширений двойственных 2-схем совпадает с классом сильно однородных полубиплоскостей (см. лемму 1.1). Из [2, теорема 1.7.1] следует, что двудольный дистанционно регулярный граф диаметра 4 имеет $c_2 = 2$ тогда и только тогда, когда он является графом инцидентности сильно однородной полубиплоскости. Классификация сильно регулярных локально треугольных графов [3, предложение 1] дает классификацию сильно 3-однородных расширений $pG_2(K, 1)$ и двудольных дистанционно регулярных графов диаметра 4 с $c_2 = 2$ и $c_3 = 3$.

Предложение 1 [3, предложение 1]. *Пусть Γ является сильно регулярным локально $T(n)$ графом, $n \geq 4$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $n = 4$, $\Gamma = K_{4\times 2}$;

(2) $n = 5$, Γ *— граф Клебша*;

(3) $n = 8$, Γ *— половинный граф свернутого* 8*-куба с параметрами* $(64, 28, 12, 12)$;

(4) $n = 10$, Γ *— половинный граф свернутого* 10*-куба с параметрами* $(256, 45, 16, 6)$;

(5) $n = 24$, Γ — *половинный граф ректаграфа, отвечающего графу смежных классов расширенного бинарного кода Голея с параметрами* $(2^{11}, 276, 44, 36)$.

Примеры из пунктов (1), (3) и (5) отвечают сильно 3-однородным полубиплоскостям с блочным графом, являющимся псевдогеометрическим для $pG_3(n-1,(n-2)/2)$.

В данной работе изучаются сильно однородные расширения двойственных 2-схем.

Пусть S является двойственной 2-$(v,k,1)$ схемой с $r=(v-1)/(k-1)$ прямыми, проходящими через точку и с $b = vr/k$ прямыми. Тогда S является частичной геометрией $pG_k(r-1,k-1)$ с b точками и v прямыми.

Пример 1. Выясним, какие частичные геометрии отвечают известным 2-схемам Штейнера:

(1) унитали порядка $q>1$ (т. е. 2-$(q^3+1,q+1,1)$ схеме) отвечает $pG_{q+1}(q^2-1,q)$;

(2) если π — проективная плоскость четного порядка q, содержащая гиперовал C, то геометрия с множеством точек, не лежащих в C, и с множеством блоков, состоящим из $q(q-1)/2$ прямых, не пересекающих C, является двойственной к 2-$(q(q-1)/2, q/2, 1)$ схеме и отвечает $pG_{q/2}(q, q/2-1)$;

(3) схема точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$ имеет параметры 2-$(q^{n+1}-1)/(q-1), q+1, 1)$ и отвечает $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q, q)$;

(4) схема точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$ имеет параметры 2-$(q^n,q,1)$ и отвечает $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q,q-1)$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{D}=(X,\mathcal{B})$ является сильно β-однородной квазибиплоскостью с параметрами (V,K,m). Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *$\mathcal{D}$ — сильно β-однородное расширение двойственной 2-схемы $pG_m(K-2,m-1)$, $K = xm+2$ для некоторого натурального числа x, точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(xm+1, xm-x)$, а блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{\beta m/2}((xm+1)(m-1), xm/2)$*;

(2) *если $K=m+2$, то $\beta=m+1$, Γ является полным многодольным графом $K_{(m+2)\times m}$ и в случае $m>2$ для любого блока B вычет геометрии $\mathcal{D}_B$ является сильно $(m+1)$-однородной квазибиплоскостью с параметрами $((m-1)(m+2), m+2, m/2)$, а ее блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{m(m+1)/4}((m+1)(m-2)/2, m/2)$*;

(3) *если $K=2m+2$, то $R=2m^2-m$, $\mathcal{D}$ является расширением геометрии $pG_m(2m,m-1)$, Γ — псевдогеометрический граф для геометрии $pG_\beta(2m+1,2m-2)$, $\beta(4m-\beta)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$, β делит $2(m-1)(2m+1)$ и*

(*i*) *если $\beta=m+1$, то вычет геометрии $\mathcal{D}$ в любой точке совпадает с геометрией прямых и точек $PG(3,2)$, Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$, а блочный граф является сильно регулярным с параметрами $(120,56,28,24)$*,

(*ii*) *если $m+2\le\beta\le m+3$, то либо $\beta=2m-2$, либо $\beta=m+3$, Γ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{m+3}(2m+1,m+3)$, а блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{m^2-m}((2m+1)(m-1),m)$ и $m=7$ или 17*;

(*iii*) *если $2m-2\le\beta\le 2m$, то $\beta=2m-2$, Γ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{2m-2}(2m+1,2m-2)$, а блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{m^2-m}((2m+1)(m-1),m)$*;

(*iv*) *если $\beta=2m+1$, то Γ — полный многодольный граф $K_{(2m+2)\times(2m-1)}$, а блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{m(2m+1)/2}((2m+1)(m-1),m)$.*

Если $m=2^n$, то по [4] существует сильно $(m+1)$-однородная квазибиплоскость с параметрами $(m(m+2), m+2, m)$ такая, что ее вычет в любом блоке является сильно $(m+1)$-однородной квазибиплоскостью с параметрами $((m-1)(m+2), m+2, m/2)$, а дополнительный граф для ее блочного графа является частичной геометрией $pG_{(m-2)/2}(m-1,(m-2)(m+1)/2)$, в которой окрестность любой точки — псевдогеометрический граф для $pG_{(m-4)/2}(m-2,(m+1)(m-4)/4)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *в случае унитали порядка $q > 1$ (т. е. 2-$(q^3+1, q+1, 1)$ схемы) имеем*

(i) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2-1, q)$, $K = q^2+1$ и $R = q^3+1$*;

(ii) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2, q^2-q)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{(q+1)\beta/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно, β делит $6q^3$ и $\beta(2q^2-q+1-\beta)$ делит $q^2(q^2+1)(q^2-q)(q^2-q+1)$*;

(iii) *параметр β не равен $q+2$, и, если $q^2-1 \le \beta \le q^2+1$, то $\beta = q^2$, Γ является полным многодольным графом $K_{(q^2+1)\times(q^2-q+1)}$ и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{q^2(q+1)/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно*;

(iv) *если $q = 3$, то β равно 6 или 9*;

(2) *в случае схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$ (т. е. 2-$((q^{n+1}-1)/(q-1), q+1, 1)$ схемы) имеем $n = 2m+1$ и*

(i) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(s, q)$ и $s = q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+q$*;

(ii) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+1, q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{\beta(q+1)/2}(q(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+1), (q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+q)/2)$, $(q+1)\beta$ делит $s(s+1)(s+2)(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2)$ и $\beta(2q^{2m}+2q^{2m-1}+\ldots+2-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)(s-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q)(s+1-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q)$*;

(iii) *если $\beta = q+2$, то $q = 2$, $m = 1$ и Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4, 2)$; если $\beta = s+1$, то Γ является полным многодольным графом $K_{(s+2)\times(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2+1)}$; если же $s-3 \le \beta \le s$, то $\beta = q+2$*;

(iv) *если $m = 1$, то для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2+q, q)$, граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2+q+1, q^2)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{\beta(q+1)/2}(q^3+q^2+q, (q^2+q)/2)$; в случае $q = 2$ имеем $\beta = 4$, а в случае $q = 4$ граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(21, 16)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{5\beta/2}(84, 10)$ и $\beta = 14$ или 16*;

(3) *в случае схемы точек и прямых аффинного пространства $AG(n, q)$ (т. е. 2-$(q^n, q, 1)$ схемы) имеем*

(i) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_q(s, q-1)$, $s = q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q$, либо q четно, либо $n-1$ и β четны*;

(ii) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(s+1, q^{n-1}-1)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{\beta q/2}((s+1)(q-1), s/2)$, и $\beta(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+2q^3+q^2+2q+2-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)q(q^{2m-1}+\ldots+q^3+q+1)$*;

(iii) *если $\beta = q+1$, то q нечетно, для любой вершины $a \in \Gamma$ каждый μ-подграф из $\Gamma(a)$ является $q \times q$-решеткой и $(q+1)(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2)$ делит $(s+1)(s+2)q^{n-1}(q^{n-1}-1)$.*

1. Предварительные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если геометрия $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ является квазибиплоскостью с параметрами (V, K, Λ), то для любой точки a вычет геометрии $\mathcal{D}_a$ является двойственной 2-схемой $pG_\Lambda(K-2, \Lambda-1)$ и $R = K\Lambda - K - \Lambda + 2$*;

(2) *геометрия $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородной квазибиплоскостью с параметрами (V, K, Λ) тогда и только тогда, когда $(X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородным расширением частичной геометрии $pG_\Lambda(K-2, \Lambda-1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{D}$ является квазибиплоскостью с параметрами (V, K, Λ). Покажем, что для любой точки $a \in X$ вычет $\mathcal{D}_a = (X_a, \mathcal{B}_a)$ является частичной геометрией $pG_\Lambda(K-2, \Lambda-1)$. Прежде всего любые два блока из $\mathcal{B}_a$ пересекаются в единственной точке, и $\mathcal{B}_a$ является множеством прямых. Далее, любая точка из X_a лежит на Λ прямых, и каждая прямая имеет $K-1$ точек. Наконец, для каждого антифлага (b, L) геометрии $(X_a, \mathcal{B}_a)$ ровно Λ блоков содержат a, b, и все эти блоки пересекают L. Утверждение (1) доказано.

Необходимость утверждения (2) следует из утверждения (1). *Достаточность*. Пусть $(X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородным расширением частичной геометрии $pG_\Lambda(K-2, \Lambda-1)$. Тогда каждая точка принадлежит ровно $R = \Lambda(1+(K-2)(\Lambda-1)/\Lambda)$ блокам и каждый блок содержит ровно K точек. Далее, любые две точки принадлежат 0 или Λ блокам, и любые два блока пересекаются по 0 или 2 точкам. Лемма доказана.

В [5] было замечено, что сильно регулярный граф с $k = 2\mu$ и целыми собственными значениями является псевдогеометрическим графом для $pG_x(2x, y)$, а дополнительный к нему граф является псевдогеометрическим для $pG_y(2y, x)$. Более того, если Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$, $s > \alpha$ и α делит st, то дополнительный граф к Γ также является псевдогеометрическим.

Лемма 1.2. *Пусть граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\alpha(s, t)$, $s > \alpha$ и α делит st. Тогда дополнительный граф Δ является псевдогеометрическим для $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что собственные значения Γ равны $s-\alpha$ и $-(t+1)$, поэтому собственные значения Δ равны t и $-(s-\alpha+1)$, поэтому Δ может быть псевдогеометрическим для $pG_\beta(t+\beta, s-\alpha)$. Теперь степень вершины в графе Δ равна $(t+\beta)(s-\alpha+1) = k(k-\lambda-1)/\mu = s(st-\alpha t+t)/\alpha$ и $\beta = st/\alpha - t$.

Наконец, число вершин в $pG_\alpha(s, t)$ равно числу вершин в $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathcal{D}$ является β-однородным расширением $pG_\alpha(s, t)$. Тогда точечный граф геометрии $\mathcal{D}$ является реберно регулярным с $\lambda = s+st(\beta-1)/\alpha$ и $\alpha\beta$ делит $st(s+1)(s+2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. леммы 2.1 и 2.2 из [6].

Лемма 1.4 [7, теорема 3.3]. *Пусть $\mathbf{S}$ является s-однородной геометрией $EpG_\alpha(s, t)$, $\overline{\Gamma}$ — дополнение точечного графа $\mathbf{S}$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *$s = 2$, $\alpha = 1$, и имеется точно 7 геометрий: две сильно однородные с параметрами точечных графов $(16, 9, 4, 6)$ и $(28, 15, 6, 10)$, еще две геометрии с сильно регулярными точечными графами, имеющими параметры $(36, 15, 6, 6)$ и $(64, 27, 10, 12)$, а также три геометрии (по одной для $t = 1, 2, 4$), точечные графы которых являются графами Тэйлора;*

(2) *$\mathbf{S}$ является геометрией $EpG_2(s, 1)$, $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с $\lambda = 0$, $\mu = 2$, и $\mathbf{S}$ — геометрия вершин и клик Γ, соответствующих $\bar{\Gamma}(a)$ для вершины $a \in \bar{\Gamma}$;*

(3) *$\mathbf{S}$ сильно s-однородна, и либо $t = \alpha$ и $\bar{\Gamma}$ является квадратной решеткой на $(s+2)^2$ вершинах, либо $t = 2\alpha$, $s \le (2\alpha-1)(\alpha+1)^2$, $s+\alpha+1$ делит $2s(s+1)(2\alpha+1)$ и $\bar{\Gamma}$ является треугольным графом на $(s+2)(2s+3)$ вершинах.*

Лемма 1.5. *Пусть Γ является связным графом и окрестности вершин в Γ изоморфны графу Грассмана $J_q(n, 2)$. Тогда $q = 2$ и связная компонента любого μ-подграфа из Γ является дополнительным графом к 4×4-решетке или графом Джонсона $J(6, 3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что связная компонента Δ любого μ-подграфа из Γ является локально $(q+1)\times(q+1)$-графом. По теореме 3 из [8] имеем $q = 2$ и Δ — дополнительный граф к 4×4 решетке или граф Джонсона $J(6, 3)$. Лемма доказана.

2. Сильно однородные квазиплоскости

В леммах 2.1–2.3 предполагается, что $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородной квазиплоскостью с параметрами (V, K, m).

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) $K = mx + 2$, $R = m^2x - mx + m$;
(2) *точечный граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\beta(mx+1, xm-x)$;
(3) *блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{\beta m/2}((xm+1)(m-1), xm/2)$;
(4) $\beta(2mx+2-x-\beta)$ *делит* $(mx+1)(mx+2)(m-1)(xm-x+1)$.

Доказательство. По [7, теорема 3.1] точечный граф Γ сильно β-однородной геометрии $EpG_\alpha(s,t)$ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(s+1, st/\alpha)$. Отсюда $K-2 = mx$ для некоторого натурального числа x и $R = m^2x - mx + m$. Утверждения (1) и (2) доказаны.

В [4] доказано, что блочный граф сильно β-однородной квазиплоскости с параметрами (V, K, Λ) является сильно регулярным с параметрами $(b, R(K-1)/\Lambda, K(\alpha-1)/2 + R - \alpha - 1, K\alpha/2)$, где $\alpha = \beta\Lambda/2$ и $b = R(K-1)(R-\Lambda)/(2\alpha) + R$. Отсюда блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{\beta m/2}((xm+1)(m-1), xm/2)$. Утверждение (3) доказано.

Последнее утверждение следует теперь из условия целочисленности для точечного графа частичной геометрии $pG_{\beta m/2}((xm+1)(m-1), xm/2)$. Условие целочисленности для точечного графа квазиплоскости является следствием условия целочисленности для блочного графа. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $K = m+2$. *Тогда* $\beta = m+1$ *и выполняются следующие утверждения*:

(1) *точечный граф квазиплоскости является полным многодольным графом* $K_{(m+2)\times m}$, *а блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{m(m+1)/2}(m^2-1, m/2)$;

(2) *если* $m > 2$, *то для любого блока* B *вычет геометрии* $\mathcal{D}_B$ *является сильно* $(m+1)$-*однородной квазиплоскостью с параметрами* $((m-1)(m+2), m+2, m/2)$, *а ее блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{m(m+1)/4}((m-2)(m+1)/2, m/2)$, *в частности,* m *делится на* 4.

Доказательство. Пусть $K = m+2$. Из лемм 1.1, 2.1 следует, что точечный граф Γ квазиплоскости — псевдогеометрический граф для $pG_\beta(m+1, m-1)$, являющийся сильно β-однородным расширением $pG_m(m, m-1)$. В этом случае $\beta = m+1$, геометрия является треугольной, и Γ — полный многодольный граф $K_{(m+2)\times m}$.

Далее, $R = m^2$, и блочный граф является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_{m(m+1)/2}(m^2-1, m/2)$, m четно. Утверждение (1) доказано.

Пусть $m > 2$ и B — блок. Тогда вычетная геометрия $\mathcal{D}_B$ имеет множество точек $X_B = X - B$ и множество блоков $\mathcal{B}_B = \{A \in \mathcal{B}, A \cap B = \varnothing\}$. Ясно, что каждый блок из $\mathcal{B}_B$ имеет K точек и каждая точка из $X - B$ лежит в $R - \alpha$ блоках из $\mathcal{B}_B$, $\alpha = m(m+1)/2$. Любые два блока из $\mathcal{B}_B$ пересекаются по 0 или 2 точкам. Пусть a, b — две точки из X_B. Если a, b несмежны в Γ, то они не лежат в общем блоке. Если же a, b смежны в Γ, то блок B имеет m вершин $c_1, \ldots, c_m$ из $\Gamma(a) \cap \Gamma(b)$. Так как $\mathcal{D}$ является треугольным расширением, то тройка a, b, c_i лежит в единственном общем блоке. Поэтому точки a, b лежат ровно в $m/2$ блоках, пересекающих B, и a, b коллинеарны в $\mathcal{D}_B$. Отсюда $\mathcal{D}_B$ является сильно $(m+1)$-однородной квазиплоскостью с параметрами $((m-1)(m+2), m+2, m/2)$. По лемме 2.1, примененной к этой квазиплоскости, ее блочный граф сильно регулярен с параметрами $(m(m-1)^2/2, (m+1)(m^2-4)/4, (m-3)(m+4)^2/8+4, (m^2+m)(m+2)/8)$, поэтому является псевдогеометрическим для $pG_{m(m+1)/4}((m-2)(m+1)/2, m/2)$, в частности, m делится на 4. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $K = 2m+2$. *Тогда* $R = 2m^2 - m$, $\mathcal{D}$ *является расширением геометрии* $pG_m(2m, m-1)$, *точечный граф* Γ — *псевдогеометрический граф для* $pG_\beta(2m+1, 2m-2)$,

$\beta(4m-\beta)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$, β делит $2(m-1)(2m+1)$, блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{m\beta/2}((2m+1)(m-1),m)$ и выполняются следующие утверждения:

(1) *если $\beta=m+1$, то вычет геометрии $\mathcal{D}$ в любой точке совпадает с геометрией прямых и точек $PG(3,2)$, Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$ и блочный граф сильно регулярен с параметрами $(120,56,28,24)$;*

(2) *если $2m-2\le\beta\le 2m$, то $\beta=2m-2$ и Γ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{2m-2}(2m+1,2m-2)$;*

(3) *если $m+2\le\beta\le m+3$, то либо $\beta=2m-2$, либо $\beta=m+3$, Γ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{m+3}(2m+1,m+3)$ и $m=7$ или 17;*

(4) *если $\beta=2m+1$, то Γ — полный многодольный граф $K_{(2m+2)\times(2m-1)}$.*

Доказательство. Пусть $K=2m+2$. По лемме 2.1 имеем $R=2m^2-m$, $\mathcal{D}$ является расширением геометрии $pG_m(2m,m-1)$, ее точечный граф является псевдогеометрическим для $pG_\beta(2m+1,2m-2)$, и $\beta(4m-\beta)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$. Заметим, что если m четно, то β нечетно. По прямоугольному соотношению β делит $2(m-1)(2m+1)$.

Блочный граф является сильно регулярным с параметрами $(b,(m+1)(2m+1)(m-1),m(m\beta-2)/2+2m^2-m-2,m\beta(m+1)/2)$, $b=(\beta+2(m-1)(2m+1))(2m^2-m)/\beta$ и собственными значениями $2m^2-m-1-m\beta/2$, -$(m+1)$. Значит, β делит $6(m-1)(2m+1)$ и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{m\beta/2}((2m+1)(m-1),m)$.

Если $\beta=m+1$, то $3m-1$ делит $2(m-1)(4m^2-1)$, поэтому $3m-1$ делит 20. Отсюда $m=2,3$ или 7. Но в последнем случае число блоков b не является целым. В случае $m=2$ граф Γ является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_3(5,2)$, и окрестности вершин в Γ являются треугольными графами $T(6)$. Противоречие с тем, что тогда μ-подграфы из Γ являются локально четырехугольными графами. Итак, $m=3$, Γ является псевдогеометрическим для сети $pG_4(7,4)$, и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_6(14,3)$, т. е. сильно регулярным с параметрами $(120,56,28,24)$. По теореме Хьюза [7, теорема 3.12] для треугольного расширения двойственной 2-$(v,3,1)$ схемы вычет в каждой точке является геометрией точек и прямых $PG(n,2)$. Поэтому в Γ окрестности вершин изоморфны графу Грассмана $J_2(4,2)$, и по теореме 1 из [5] Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$. Утверждение (1) доказано.

Если $\beta=2m$, то $4m^2$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$, противоречие. Если $\beta=2m-1$, то $2m-1$ делит 8, противоречие. Если $\beta=2m-2$, то Γ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{2m-2}(2m+1,2m-2)$. Утверждение (2) доказано.

Если $\beta=m+2$, то $(m+2)(3m-2)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$. Так как $(m+2,m^2-1)$ делит 3 и $(m+2,4m^2-1)$ делит 15, то $m+2$ делит 90. Далее, $(3m-2,m^2-1)$ делит 5, и $(3m-2,4m^2-1)$ делит 7, поэтому $3m-2$ делит 70. Отсюда $m\in\{3,4\}$. В случае $m=3$ число $\beta=5$ не делит $6(m-1)(2m+1)$. Значит, $m=4$ и $\beta=6=2m-2$.

Если $\beta=m+3$, то $(m+3)(3m-3)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$. Так как $(m+3,m-1)$ делит 4 и $(m+3,2m+1)$ делит 5, то $m+3$ делит 40. Если $m+3=8$, то $\beta=2m-2$. Если же $\beta<2m-2$, то $m+3=10,20$ или 40. В случае $m=40$ нарушается условие целочисленности для блочного графа. Утверждение (3) доказано.

Если $\beta=2m+1$, то по лемме 2.1 Γ является полным многодольным графом $K_{(2m+2)\times(2m-1)}$. Лемма доказана.

Из лемм 2.1–2.3 следует теорема 1.

Заметим, что существуют допустимые параметры m,β с $m+3<\beta<2m-2$, например $(m,\beta)=(17,28)$ или (127,140).

3. Расширения известных двойственных 2-схем

Ввиду предложения 1 для точечного графа Γ сильно 3-однородного расширения частичной геометрии $pG_2(s,1)$ либо $s=2$ и $\Gamma=K_{4\times 2}$, либо $s=6$, Γ — половинный граф свернутого 8-куба с параметрами $(64, 28, 12, 12)$, либо $s = 22$, Γ — половинный граф ректаграфа, отвечающего графу смежных классов расширенного бинарного кода Голея с параметрами $(2^{11}, 276, 44, 36)$.

В этом разделе доказана теорема 2.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы, отвечающей унитали. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2-1, q)$, $K = q^2+1$ и $R = q^3+1$;

(2) точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2, q^2-q)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{(q+1)\beta/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно, β делит $6q^3$ и $\beta(2q^2-q+1-\beta)$ делит $q^2(q^2+1)(q^2-q)(q^2-q+1)$;

(3) параметр β не равен $q+2$, и если $q^2-1 \le \beta \le q^2+1$, то $\beta = q^2$, Γ является полным многодольным графом $K_{(q^2+1)\times(q^2-q+1)}$ и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{q^2(q+1)/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно;

(4) если $q = 3$, то β равно 6 или 9.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы, отвечающей унитали. Тогда для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2-1, q)$, $K = q^2+1$ и $R = q^3+1$. Утверждение (1) доказано.

Далее, точечный граф Γ — псевдогеометрический граф для $pG_\beta(q^2, q^2-q)$. По лемме 2.1 блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{(q+1)\beta/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, и q нечетно. По лемме 1.3 $\beta(q+1)$ делит $q^3(q^2-1)(q+1)$, и по условию целочисленности $\beta(2q^2-q+1-\beta)$ делит $q^3(q^2+1)(q^2-q+1)$. По прямоугольному соотношению для точечного графа β делит $q^3(q-1)(q^2+1)$, по прямоугольному соотношению для блочного графа β делит $q^3(q-1)(q^3+1)$. Таким образом, β делит $6q^3$.

Заметим, что $q+2 \le \beta \le q^2$. Если $\beta = q+2$, то $q+2$ делит 3, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Если $\beta = q^2$, то условие целочисленности выполняется, Γ является полным многодольным графом $K_{(q^2+1)\times(q^2-q+1)}$ и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{q^2(q+1)/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно.

Если $\beta = q^2-1$, то $\beta(2q^2-q+1-\beta)$ не делит $q^2(q^2+1)(q^2-q)(q^2-q+1)$. Утверждение (3) доказано.

Пусть $q = 3$. Тогда для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_4(8, 3)$, граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(9, 6)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{2\beta}(27, 4)$ и $\beta = 6$ или 9. Если $\beta = 6$, то по лемме 1.2 дополнительный граф для блочного графа — псевдогеометрический граф для $pG_5(9, 15)$. Лемма доказана.

Пример 2. Пусть q — степень простого числа, W — $3 \times (s+1)$-матрица над F_q такая, что любые ее три столбца линейно независимы (столбцы W образуют дугу в проективной плоскости $PG(2, q)$). Пусть точками геометрии $\mathbf{S}$ являются пары (i, x), где i — номер столбца W, $x \in F_q$, а блоками — векторы из пространства, порожденного строками W; пара (i, x) инцидентна блоку w, если i-я координата w равна x.

Тогда $\mathbf{S}$ является треугольным расширением двойственной сети $pG_s(s, q-1)$. Это пример Хобарта — Хьюза.

Заметим, что требуемая дуга существует, если $q \ge s$ для четного q и $q \ge s+1$ для нечетного q. В частности, существуют треугольные расширения $pG_q(q, q)$ для нечетного q и $pG_q(q, q-1)$ — для четного q.

Случай, когда $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы, отвечающей гиперовалу проективной плоскости, рассмотрен в лемме 2.3 (в этом случае для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q/2}(q, q/2-1)$, $K = q+2$ и $R = q(q-1)/2$).

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$. Тогда $n = 2m+1$, и выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(s,q)$ и $s = q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q$;*

(2) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+1, q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{\beta(q+1)/2}(q(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+1),(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+q)/2)$, $(q+1)\beta$ делит $s(s+1)(s+2)(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2)$ и $\beta(2q^{2m}+2q^{2m-1}+\ldots+2-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)(s-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q)(s+1-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q)$;*

(3) *если $\beta = q+2$, то $q = 2$, $m = 1$ и Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$, если $\beta = s+1$, то Γ является полным многодольным графом $K_{(s+2)\times(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2+1)}$, если же $s-3 \le \beta \le s+1$, то $\beta = q+2$;*

(4) *если $m = 1$, то для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2+q,q)$, граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2+q+1,q^2)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{\beta(q+1)/2}(q^3+q^2+q,(q^2+q)/2)$; в случае $q = 2$ имеем $\beta = 4$, а в случае $q = 4$ граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(21,16)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{5\beta/2}(84,10)$ и $\beta = 14$ или 16.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$. Так как $K-2$ делится на $\Lambda = q+1$, то $n = 2m+1$.

Для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(s,q)$, где $s = q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q$. Утверждение (1) доказано.

По лемме 2.1 точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+1, q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{\beta(q+1)/2}(q(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+1),(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+q)/2)$, и, если β нечетно, то $q+1$ четно.

По лемме 1.3 число $(q+1)\beta$ делит $s(s+1)(s+2)q$, а по условию целочисленности $\beta(2q^{2m}+2q^{2m-1}+\ldots+2-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)(s-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q)(s+1-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q)$. Утверждение (2) доказано.

Заметим, что $q+2 \le \beta \le s+1$. Если $\beta = q+2$, то по лемме 1.5 имеем $q = 2$, и $2m+1$ не меньше числа связных компонент μ-подграфа, умноженного на 4. Поэтому $m = 1$, $\mu = 4(4+1)$, и по теореме 1 из [5] Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$.

Если $\beta = s+1$, то Γ является графом $K_{(s+2)\times(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2+1)}$.

Если $\beta = s$, то по лемме 1.4 либо $s = 2$, либо геометрия $\mathcal{D}$ является расширением $pG_\alpha(s,t)$ и $t = \alpha$ или 2α, противоречие с утверждением (1).

Если $\beta = s-1$, то по утверждению (2) $s-1 = q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+q-1$ делит $6q$, противоречие.

Если $\beta = s-2$, то по утверждению (2) $s-2 = q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+q-2$ делит $24q$, поэтому $q = 2$, $m = 1$ и $s = 6$. Но в этом случае $\beta = q+2$, и выполняется утверждение (3).

Если $m = 1$, то для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2+q,q)$, граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2+q+1,q^2)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{\beta(q+1)/2}(q^3+q^2+q,(q^2+q)/2)$. В случае $q = 2$ граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(7,4)$ и $\beta = 4$. В случае $q = 4$ граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(21,16)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{5\beta/2}(84,10)$ и $\beta = 14$ или 16. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{D}$ является расширением двойственной 2-схемы, отвечающей точкам и прямым аффинного пространства $AG(n,q)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_q(s,q-1)$, $s = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q$, либо q четно, либо $n-1$ и β четны;*

(2) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(s+1,q^{n-1}-1)$, блочный граф — псевдогеометрический для $pG_{\beta q/2}((s+1)(q-1),s/2)$, и $\beta(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+2q^3+q^2+2q+2-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)q(q^{2m-1}+\ldots+q^3+q+1)$;*

(3) *если* $\beta = q+1$, *то* q *нечетно, для любой вершины* $a \in \Gamma$ *каждый* μ*-подграф из* $\Gamma(a)$ *является* $q \times q$*-решеткой, и* $(q+1)(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2)$ *делит* $(s+1)(s+2)q^{n-1}(q^{n-1}-1)$;

(4) *если* $n=4$, *то* $2q+1$ *делит* $65(3,q-1)$ *и* $q \in \{2,7,19\}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$. Тогда для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_q(s,q-1)$, $s = q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q$. Утверждение (1) доказано.

По лемме 2.1 точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(s+1,q^{n-1}-1)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{\beta q/2}((s+1)(q-1),s/2)$, поэтому либо q четно, либо $n-1$ и β четны.

По лемме 1.3 $q\beta$ делит $s(s+1)(s+2)(q-1)$, а по условию целочисленности $\beta(2s+2-s/q-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)(q-1)q^{n-1}$. Утверждение (2) доказано.

Заметим, что $q+1 \le \beta \le s+1$. Если $\beta = q+1$, то каждый μ-подграф из $\Gamma(a)$ отвечает паре непересекающихся прямых L, M пространства $AG(n,q)$. Для любой точки x прямой L найдется единственная прямая, проходящая через x и пересекающая M. Поэтому каждый μ-подграф из $\Gamma(a)$ является $q \times q$-решеткой. Далее, $q(q+1)$ делит $s(s+1)(s+2)(q-1)$, а по условию целочисленности $(q+1)(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2)$ делит $(s+1)(s+2)q^{n-1}(q-1)$. В случае четного n на $q+1$ делится $s+1$, а в случае нечетного n имеем $q=2$. Если $n=2$, то $s=q$, блочный граф — псевдогеометрический для $pG_{(q+1)q/2}(q^2-1,q/2)$, поэтому q четно. Если $n=3$, то $s=q^2+q=6$, точечный граф Γ — псевдогеометрический для $pG_3(7,3)$.

Положим $d = (2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2, q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1)$. Тогда

$$d = (2q^{n-3}+q^{n-4}+\ldots+q+1, q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1) = (q^{n-1}-q-1, q^2+q-1),$$

поэтому

$$d = (q^{n-2}-q-2, q^2+q-1) = (q^{n-3}-2q-3, q^2+q-1) = \ldots .$$

Если $n=4$, то $d = (q^2-q-2, q^2+q-1) = (2q+1, q^2+q-1) = (2q+1, q+3)$ делит 5. Если $n=5$, то $d = (q^2-2q-3, q^2+q-1) = (3q+2, q^2+q-1) = (2q+5, 3q+2)$ делит 11.

Положим $e = (2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2, q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+2)$. Тогда

$$e = (2q^{n-3}+q^{n-4}+\ldots+q+1, q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+2) = (q^{n-1}-q-2, q^{n-1}-q^{n-2}+2),$$

поэтому

$$d = (q^{n-1}-q-2, q^{n-2}-q-4) = (q^{n-2}-q-4, q^2+3q-2) = (3q^{n-3}-q-4, q^2+3q-2) = \ldots .$$

Если $n=4$, то $e = (q^2-q-4, q^2+3q-2) = (4q+2, q^2-q-4) = (4q+2, 6q+16)$ делит 26.

Заметим, что $(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2, q-1) = (n-1, q-1)$. Если $n=4$, то $2q+1$ делит $65(3,q-1)$ и $q \in \{2,7,19\}$. Лемма и теорема 2 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hughes D.R.** Extended partial geometries: dual 2-design // Europ. J. Combin. 1990. Vol. 11, no. 5. P. 459–472.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
3. **Махнев А.А.** О графах с μ-подграфами, изоморфными $K_{u\times 2}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2001. Т. 7, № 2. С. 169–178.
4. **Huang T.** On quasi-semisymmetric designs // Finite Geometry and Combin.: Third Intern. Conf. at Deinze. Belgium, 1997. P. 1–3.
5. **Махнев А.А.** О сильно регулярных графах с $k = 2\mu$ и их расширениях // Сиб. мат. журнал. 2002. Т. 43, № 3. С. 609–619.

6. **Hobart S.A., Hughes D.R.** EpGs with minimal μ, II // Geom. Dedicata. 1992. Vol. 42, no. 2. P. 129–138.
7. **Махнев А.А.** Частичные геометрии и их расширения // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, вып. 5(329). С. 25–76.
8. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Характеризация графов знакопеременных и квадратичных форм как накрытий локально грассмановых графов // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 1. С. 20–24.

Махнев Александр Алексеевич
чл.-корр. РАН, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 14.11.2014

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: i_belousov@mail.ru