ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.97+539.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТРЕЩИН В ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ[1]

В. В. Щербаков, О. И. Криворотько

Рассматривается задача оптимального управления для уравнений квазистатического деформирования линейного вязкоупругого тела. В теле имеется трещина, смещения противоположных берегов которой ограничены условием непроникания. Установлена непрерывная зависимость решения задачи равновесия от формы трещины. В частности, доказано существование такой формы, при которой раскрытие трещины будет минимальным.

Ключевые слова: вязкоупругость, трещина, условие непроникания, оптимальное управление, метод фиктивных областей.

V. V. Shcherbakov, O. I. Krivirot'ko. Optimal shapes of cracks in a viscoelastic body.

We consider an optimal control problem for equations describing the quasistatic deformation of a linear viscoelastic body. There is a crack in the body, and displacements of opposite faces of the crack are constrained by the nonpenetration condition. The continuous dependence of the solution to the equilibrium problem on the shape of the crack is established. In particular, we prove the existence of a shape for which the crack opening is minimal.

Keywords: viscoelasticity, crack, nonpenetration condition, optimal control, fictitious domain method.

Введение

В работе рассматривается задача оптимального управления для краевой задачи о квазистатическом деформировании линейного вязкоупругого тела с трещиной [1]. Требуется минимизировать функционал, характеризующий раскрытие трещины. В качестве переменной, для которой ищется оптимальное значение выступает форма трещины. При этом для каждой фиксированной формы смещения точек противоположных берегов трещины ограничены условием непроникания. Результаты, полученные в этом направлении математической теории трещин для моделей упругого и неупругого деформирования твердых тел, можно найти в [2] и [3] соответственно.

Вопрос о зависимости решений задач теории упругости в областях с разрезами (трещинами) от параметра при возмущении формы области изучался в [4–10]. Для более сложных уравнений состояния этот вопрос исследован в меньшей степени. Отметим лишь работу [11], где обсуждались асимптотические свойства решения задачи теории ползучести с условием непроникания. В отличие от работ [5; 7; 8], посвященных доказательству существования оптимальных форм трещин, в настоящей работе рассматриваются не только трещины, концы которых лежат внутри деформируемого тела, но и трещины, выходящие на внешнюю границу, в том числе, под нулевым углом.

1. Трещина с концами, лежащими внутри области

1.1. Задача равновесия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$. Выберем произвольную функцию $\psi \in H_0^2(0,1)$ и для малого параметра $\delta \in [0, \delta_0]$ определим кривую $\overline{\Gamma}_\delta \subset \Omega$:

$$\Gamma_\delta = \{\, (x,y) \mid y = \delta\psi(x),\ x \in (0,1) \,\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00017 и 14-01-31182).

Считаем, что Γ_δ можно продолжить по обе стороны от ее концов до пересечения с $\partial\Omega$ под ненулевыми углами. В соответствии с вектором единичной нормали

$$\nu^\delta = (\nu_1^\delta, \nu_2^\delta) = (-\delta\psi_{,x}, 1)/\sqrt{1 + (\delta\psi_{,x})^2}$$

будем различать положительный Γ_δ^+ и отрицательный Γ_δ^- берега кривой Γ_δ (индекс после запятой означает производную по соответствующей координате). В наших рассуждениях область $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_\delta$ отвечает телу в недеформированном естественном состоянии, кривая Γ_δ — трещине. Геометрическая интерпретация представлена на рис. 1.

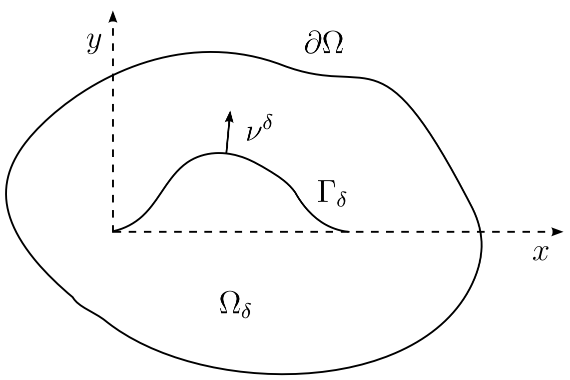

Рис. 1. Область Ω_δ с трещиной Γ_δ.

Рассмотрим квазистатическую задачу о неупругом деформировании тела Ω_δ. Предположим, что в момент времени $t \in (0, T)$, $T = \text{const} > 0$, компоненты тензора напряжений $\sigma(t) = \{\sigma_{ij}(t)\}$ и тензора деформаций $\varepsilon(u(t)) = \{\varepsilon_{ij}(u(t))\}$ связаны линейными уравнениями состояния

$$\sigma_{ij}(t) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u(t)) + \int\limits_0^t a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u(\tau))\,d\tau, \quad i, j, k, l = 1, 2. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже принято правило суммирования по повторяющимся индексам. Деформации считаются малыми, так что компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij}(u(t)) = (1/2)(u_{i,x_j}(t) + u_{j,x_i}(t)), \quad i, j = 1, 2, \quad x_1 = x,\ x_2 = y.$$

Коэффициенты тензора модулей упругости $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, не зависят от t и подчинены стандартным требованиям симметричности и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} = \text{const},$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0|\xi|^2, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Уравнения состояния (1.1) соответствуют так называемым вязкоупругим материалам с долговременной памятью, для которых напряжения в момент времени t зависят от значений деформаций во все моменты времени из промежутка $[0, t]$ (см. [12]). В дальнейшем нам будет удобно использовать следующее обозначение:

$$w(t, x, y) = u(t, x, y) + \int\limits_0^t u(\tau, x, y)\,d\tau,$$

с учетом которого, (1.1) можно переписать в виде $\sigma_{ij}(t) = a_{ijkl}\varepsilon_{ij}(w(t)),\ i,j,k,l = 1,2$. Краевая задача о равновесии линейного вязкоупругого тела с трещиной формулируется следующим образом. В цилиндре $\Omega_\delta \times (0,T)$ требуется найти функции u^δ, $\sigma^\delta = \{\sigma^\delta_{ij}\}$, $i,j = 1,2$, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma^\delta = f \quad \text{в} \quad \Omega_\delta \times (0,T), \tag{1.2}$$

$$\sigma^\delta = A\varepsilon(w^\delta) \quad \text{в} \quad \Omega_\delta \times (0,T), \tag{1.3}$$

$$u^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.4}$$

$$[u^\delta]\nu^\delta \geqslant 0, \quad [\sigma^\delta_{\nu^\delta}] = 0, \quad \sigma^\delta_{\nu^\delta} \cdot [u^\delta]\nu^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\delta \times (0,T), \tag{1.5}$$

$$\sigma^\delta_{\nu^\delta} \leqslant 0, \quad \sigma^\delta_{\tau^\delta} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^\pm_\delta \times (0,T). \tag{1.6}$$

Здесь $f = (f_1, f_2)$ — вектор внешних массовых сил, $\sigma^\delta_{\nu^\delta} = \sigma^\delta_{ij}\nu^\delta_j\nu^\delta_i$ — нормальная компонента вектора напряжений, $\sigma^\delta_{\tau^\delta} = \sigma^\delta\nu^\delta - \sigma^\delta_{\nu^\delta}\cdot\nu^\delta$ — вектор касательных напряжений, $\tau^\delta = (-\nu^\delta_2, \nu^\delta_1)$. В зависимости от контекста, скобки $[v] = v^+ - v^-$ означают скачок функции v либо на кривой Γ_δ, либо на поверхности $\Gamma_\delta \times (0,T)$. Краевые условия (1.5), (1.6) обеспечивают взаимное непроникание берегов трещины Γ_δ в отсутствии трения.

Перейдем к понятию обобщенного решения для задачи (1.2)–(1.6). Пусть $H^1(\Omega_\delta)$ — пространство функций С. Л. Соболева, суммируемых с квадратом вместе со своими первыми обобщенными производными в Ω_δ, $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)$ — его подпространство, состоящее из всех функций обращающихся в нуль на внешней границе $\partial\Omega$. Введем множество кинематически допустимых полей перемещений

$$K^\delta(\Omega_\delta) = \{\, u \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta) \mid [u]\nu^\delta \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma_\delta \,\},$$

пусть также

$$\mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta) = \big\{\, u \in L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)) \mid u(t) \in K^\delta(\Omega_\delta) \ \text{ на } \ (0,T)\big\}.$$

Обозначим через $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)^*$ топологически сопряженное к $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)$ пространство. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathfrak{L}_\delta : L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)) \to L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)^*)$, действующий по формуле

$$\mathfrak{L}_\delta(u)(\bar u) = \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar u)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt, \quad \bar u \in L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)),$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega_\delta}$ означают скалярное произведение в $L^2(\Omega_\delta)$. Будем говорить, следуя [1], что элемент $u^\delta \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$ является обобщенным решением задачи (1.2)–(1.6) для заданной функции $f \in L^2(0,T; L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$, если он удовлетворяет следующему вариационному неравенству:

$$u^\delta \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \quad \mathfrak{L}_\delta(u^\delta)(\bar u - u^\delta) \geqslant \int_0^T \langle f, \bar u - u^\delta\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \ \text{ для всех } \ \bar u \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta). \tag{1.7}$$

Существование (единственного) обобщенного решения u^δ вытекает из абстрактной теории вариационных задач [13], поскольку оператор $\mathfrak{L}_\delta$ обладает свойством псевдомонотонности, а также является коэрцитивным на $\mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$. Неравенство (1.7) можно представить в виде

$$u^\delta \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \quad \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w^\delta), \varepsilon_{ij}(\bar u - u^\delta)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \geqslant \int_0^T \langle f, \bar u - u^\delta\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \ \text{ для всех } \ \bar u \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \tag{1.8}$$

где $\sigma_{ij}(\omega^\delta) = \sigma^\delta_{ij}, i,j = 1,2$, определяется из (1.3).

1.2. Вариация формы трещины

Вплоть до настоящего момента значение параметра δ, отвечающего за форму трещины Γ_δ, было фиксированным. Далее мы допускаем возможность изменения δ. Наша ближайшая цель — исследовать поведение последовательности решений $\{u^\delta\}$, $\delta \in [0, \delta_0]$, вариационного неравенства вида (1.8) при $\delta \to 0$. Выберем произвольную срезающую функцию $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, равную единице в малой выпуклой окрестности множества $\bigcup_{\delta\in[0,\delta_0]} \Gamma_\delta$, и зададим взаимно однозначное преобразование независимых переменных

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y - \delta\psi(x)\theta(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_\delta, \quad (\tilde{x},\tilde{y}) \in \Omega_0, \tag{1.9}$$

с положительным якобианом $J_\delta = 1 - \delta\psi\theta_{,y}$. Для того, чтобы преобразование (1.9) было корректно определено, будем полагать, что функция ψ продолжена нулем вне интервала $(0,1)$. Заметим, что для произвольной функции $v \in L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta))$ справедливы формулы пересчета первых производных: $v_{,x} = \tilde{v}_{,\tilde{x}} - \delta\tilde{v}_{,\tilde{y}}(\psi\theta)_{,x}$, $v_{,y} = \tilde{v}_{,\tilde{y}}(1 - \delta\psi\theta_{,y})$, где $\tilde{v} = \tilde{v}(t,\tilde{x},\tilde{y}) = v(t,x,y)$. Пусть $u_\delta(t,\tilde{x},\tilde{y}) = u^\delta(t,x,y)$. В (1.8) произведем замену области интегрирования Ω_δ на Ω_0 в соответствии с (1.9). В результате получим следующее вариационное неравенство:

$$u_\delta \in \mathcal{K}_\delta(\Omega_0), \quad \int_0^T \langle J_\delta^{-1}\sigma_{ij}(w_\delta), \varepsilon_{ij}(\bar{u}_\delta - u_\delta)\rangle_{\Omega_0}\, dt - \int_0^T \langle J_\delta^{-1} f_\delta, \bar{u}_\delta - u_\delta\rangle_{\Omega_0}\, dt$$

$$\geqslant \delta \int_0^T \int_{\Omega_0} J_\delta^{-1} G(\tilde{x},\tilde{y},\delta, D^\alpha_{\tilde{x},\tilde{y}} w_\delta, D^\alpha_{\tilde{x},\tilde{y}}\bar{u}_\delta, D^\alpha_{x,y}(\psi\theta))\, d\Omega_0\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u}_\delta \in \mathcal{K}_\delta(\Omega_0). \tag{1.10}$$

Здесь $f_\delta(\tilde{x},\tilde{y}) = f(x,y)$; множество допустимых перемещений определяется следующим образом:

$$K_\delta(\Omega_0) = \{\, u \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0) \mid [u]\nu^\delta \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0 \,\},$$
$$\mathcal{K}_\delta(\Omega_0) = \big\{\, u \in L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0)) \mid u(t) \in K_\delta(\Omega_0) \ \text{ на } \ (0,T)\big\}.$$

Функция G зависит от своих аргументов, $|\alpha| \leqslant 1$, причем для равномерно ограниченных по δ в пространстве $L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0))$ последовательностей $\{u_\delta\}$, $\{\bar{u}_\delta\}$ при $\delta \to 0$ имеет место сходимость

$$\delta \int_0^T \int_{\Omega_0} J_\delta^{-1} G\big(\tilde{x},\tilde{y},\delta, D^\alpha_{\tilde{x},\tilde{y}} w_\delta, D^\alpha_{\tilde{x},\tilde{y}}\bar{u}_\delta, D^\alpha_{x,y}(\psi\theta)\big)\, d\Omega_0\, dt \to 0.$$

Перейдем к обоснованию предельного перехода в (1.10) при $\delta \to 0$. Подстановка $\bar{u}_\delta = 0$ в качестве пробной функции в (1.10) влечет равномерную по δ, $\delta \in [0,\delta_0]$, оценку

$$\|u_\delta\|_{L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0))} \leqslant c.$$

Можно считать, что из последовательности $\{u_\delta\}$ выбрана подпоследовательность с прежним обозначением, для которой при $\delta \to 0$

$$u_\delta \to u \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0)), \tag{1.11}$$

$$\int_0^t u_\delta\, d\tau \to \int_0^t u\, d\tau \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0)). \tag{1.12}$$

Отметим, что $K^0(\Omega_0) = K_0(\Omega_0)$, значит $\mathcal{K}^0(\Omega_0) = \mathcal{K}_0(\Omega_0)$. Установим следующее вспомогательное утверждение: для любого элемента $\bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega_0)$ можно построить последовательность пробных функций $\{\bar{u}_\delta\} \in \{\mathcal{K}_\delta(\Omega_0)\}$ так, что при $\delta \to 0$

$$\bar{u}_\delta \to \bar{u} \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0)). \tag{1.13}$$

Действительно, для произвольного $\bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega_0)$ всеми необходимыми свойствами обладает последовательность $\{\bar{u}_\delta\}$ с общим членом $\bar{u}_\delta = \bar{u} + \delta(0, \psi_{,x}\theta\bar{u}_1)$. Проверим, что выполнено неравенство $[\bar{u}_\delta]\nu^\delta \geqslant 0$ на $\Gamma_0 \times (0,T)$. Поскольку $\bar{u}$ является элеметом $\mathcal{K}_0(\Omega_0)$, то величина $[\bar{u}_2]$ неотрицательна на $\Gamma_0 \times (0,T)$, и мы получаем требуемое неравенство:

$$[\bar{u}_\delta]\nu^\delta = \frac{[\bar{u}_1](-\delta\psi_{,x}) + [\bar{u}_2] + [\bar{u}_1]\delta\psi_{,x}}{\sqrt{1+(\delta\psi_{,x})^2}} = \frac{[\bar{u}_2]}{\sqrt{1+(\delta\psi_{,x})^2}} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T).$$

Сильная сходимость (1.13) очевидна.

На основании сходимостей (1.11), (1.12) и (1.13) осуществим переход к пределу при $\delta \to 0$ в (1.10), что дает

$$u \in \mathcal{K}_0(\Omega_0), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u}-u)\rangle_{\Omega_0}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u}-u\rangle_{\Omega_0}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega_0). \tag{1.14}$$

В силу единственности решения вариационного неравенства (1.14) имеем $u = u^0$, где u^0 — решение задачи (1.8), соответствующее $\delta = 0$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть u^δ — решение задачи* (1.8). *Тогда при $\delta \to 0$ последовательность $\{u_\delta\}$ слабо сходится к u^0 в пространстве $L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0))$.*

1.3. Задача оптимального управления

Опираясь на полученный результат, покажем, как можно доказать существование оптимальных форм трещины. Пусть $\Psi_{\rm ad} \subset H_0^2(0,1)$ — непустое выпуклое замкнутое и ограниченное множество допустимых форм трещины. Мы предполагаем, что для всех $\psi \in \Psi_{\rm ad}$ замыкание графика $\Gamma_\psi = \{\, (x,y) \mid y = \psi(x),\ x \in (0,1)\,\}$ лежит в области Ω. Среди элементов множества $\Psi_{\rm ad}$ требуется выбрать тот, при котором раскрытие трещины будет минимальным. Говоря другими словами, необходимо решить задачу оптимального управления

$$\mathcal{J}(\psi) = \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_\psi} \Big|[u^\psi]\Big|\, d\Gamma_\psi dt \to \inf_{\psi \in \Psi_{\rm ad}}. \tag{1.15}$$

З а м е ч а н и е 1. Точные значения и оценки функционалов типа $\mathcal{J}$ широко применяются при изучении вопросов деформирования и разрушения тел с трещинами (см., например, [14]).

Теорема 2. *Существует решение задачи оптимального управления* (1.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\{\psi^n\} \in \Psi_{\rm ad}$, $n \in \mathbb{N}$, минимизирующую последовательность, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}(\psi^n) = \inf\limits_{\psi\in\Psi_{\rm ad}} \mathcal{J}(\psi)$. Выбирая, в случае необходимости, подпоследовательность, предполагаем, что при $n \to \infty$

$$\psi^n \to \psi \quad \text{слабо в} \quad H_0^2(0,1) \quad \text{и сильно в} \quad C^1([0,1]), \quad \psi \in \Psi_{\rm ad}.$$

Включение $\psi \in \Psi_{\rm ad}$ является следствием слабой замкнутости множества $\Psi_{\rm ad}$, а сильная сходимость вытекает из компактности вложения $H_0^2(0,1)$ в $C^1([0,1])$. В силу равномерной сходимости $\{\psi^n_{,x}\}$ к $\psi_{,x}$ можно считать, что $|\psi^n_{,x} - \psi_{,x}| < 1/n$ на $(0,1)$.

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ можно найти единственное решение вариационного неравенства

$$u^n \in \mathcal{K}^n(\Omega_n), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w^n), \varepsilon_{ij}(\bar{u}-u^n)\rangle_{\Omega_n}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u}-u^n\rangle_{\Omega_n}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}^n(\Omega_n),$$

и вычислить значение целевого функционала

$$\mathcal{J}(\psi^n) = \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_{\psi^n}} |[u^n]| \, d\Gamma_{\psi^n} dt. \tag{1.16}$$

Здесь кривая Γ_{ψ^n}, область $\Omega_n = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_{\psi^n}$, множество $\mathcal{K}^n(\Omega_n)$ соответствуют графику функции $y = \psi^n(x)$.

Сделаем замену переменных

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y - \frac{1}{n}\varphi_n(x)\theta(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_n, \quad (\tilde{x},\tilde{y}) \in \Omega_\psi, \tag{1.17}$$

со срезающей функцией $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\theta = 1$ в малой выпуклой окрестности множества $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{\psi^n}$, и $\varphi_n = n(\psi^n - \psi)$. Мы предполагаем, что функции ψ, ψ^n тривиально продолжены вне интервала $(0,1)$.

Дальнейшие рассуждения, в целом, аналогичны приведенным выше и используют факт равномерной ограниченности последовательности $\{\varphi_n\}$ в пространстве $C^1([0,1])$. Как и в подразделе 2.1, доказывается, что при $n \to \infty$ имеем $u_n \to u$ слабо в $L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\psi))$, где $u_n(\tilde{x},\tilde{y}) = u^n(x,y)$, $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \Omega_\psi$, $(x,y) \in \Omega_n$, а предельная функция u соответствует функции ψ. В частности, при $n \to \infty$

$$[u_n] \to [u] \quad \text{слабо в} \quad L^1(0,T; L^1(\Gamma_\psi)). \tag{1.18}$$

В (1.16) можно выполнить замену области интегрирования с Γ_{ψ^n} на Γ_ψ согласно (1.17) и на основе (1.18) установить необходимую сходимость $\mathcal{J}(\psi^n) \to \mathcal{J}(\psi)$ при $n \to \infty$. Это и означает, что функция $\psi \in \Psi_{\rm ad}$ — искомое решение задачи оптимального управления (1.15). Теорема доказана.

2. Трещина с концом, выходящим на внешнюю границу

2.1. Задача равновесия

Усложним геометрию задачи: предположим, что один из концов трещины выходит на внешнюю границу области. Для определенности будем считать, что Γ_δ касается внешней границы $\partial\Omega$ в точке $(0,0)$ (см. рис. 2), а правый конец Γ_δ можно продолжить до пересечения с $\partial\Omega$ под ненулевым углом.

В рассматриваемой ситуации постановка задачи равновесия совпадает с (1.2)–(1.6), а ее обобщенная формулировка — с (1.8). Ранее мы предполагали, что трещина не выходит на

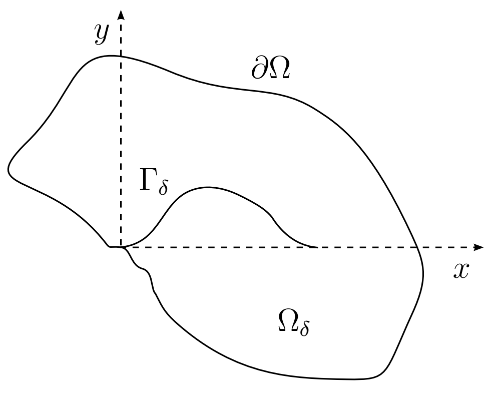

Рис. 2. Трещина Γ_δ, выходящая на $\partial\Omega$ под нулевым углом.

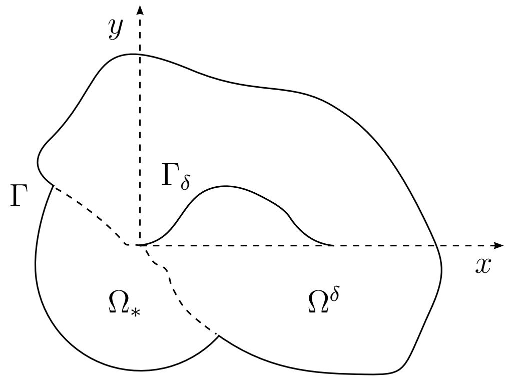

Рис. 3. Расширенная область Ω^δ с фиктивной областью Ω_*.

внешнюю границу области — условия на геометрию области с разрезом (трещиной) позволили применить первое неравенство Корна для доказательства коэрцитивности оператора $\mathfrak{L}_\delta$ на множестве $\mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$. Если же угол между кривыми Γ_δ и $\partial\Omega$ нулевой, то неравенство Корна, вообще говоря, может не выполняться. Поэтому для обоснования разрешимости вариационного неравенства (1.8) необходимо привлекать дополнительные аргументы. Ниже, опираясь на метод фиктивных областей, мы изложим эти аргументы.

Метод фиктивных областей для задач теории упругости с условием непроникания впервые предложен в [15]. В случае областей, границы которых содержат нулевые углы, можно обратиться к [16]. Применение метода фиктивных областей к задаче Синьорини для вязкоупругого тела с уравнением состояния вида (1.1) обсуждалось в [17].

Теорема 3. *Существует единственное решение задачи* (1.8).

Доказательство. Добавим фиктивную область Ω_* с липшицевой границей $\partial\Omega_*$ так, как указано на рис. 3. Внешнюю границу расширенной области $\Omega^\delta = \Omega_\delta \cup \Omega_* \cup \operatorname{int}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_*)$ обозначим через Γ и будем считать, что она удовлетворяет условию Липшица. Для положительного параметра λ введем тензор $A^\lambda = \{a^\lambda_{ijkl}\}$, $i,j,k,l = 1,2$,

$$a^\lambda_{ijkl} = \begin{cases} a_{ijkl} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} \quad \text{в} \quad \Omega_*, \end{cases}$$

и сформулируем в цилиндре $\Omega^\delta \times (0,T)$ следующее семейство задач. Найти функции u^λ, $\sigma^\lambda = \{\sigma^\lambda_{ij}\}, i,j, = 1,2$, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma^\lambda = f \quad \text{в} \quad \Omega^\delta \times (0,T), \tag{2.1}$$

$$\sigma^\lambda = A^\lambda \varepsilon(w^\lambda) \quad \text{в} \quad \Omega^\delta \times (0,T), \tag{2.2}$$

$$u^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,T), \tag{2.3}$$

$$[u^\lambda]\nu^\delta \geqslant 0, \quad [\sigma^\lambda_{\nu^\delta}] = 0, \quad \sigma^\lambda_{\nu^\delta} \cdot [u^\lambda]\nu^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\delta \times (0,T), \tag{2.4}$$

$$\sigma^\lambda_{\nu^\delta} \leqslant 0, \quad \sigma^\lambda_{\tau^\delta} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^\pm_\delta \times (0,T). \tag{2.5}$$

Задача (2.1)–(2.5) разрешима при каждом $\lambda > 0$. Действительно, пусть подпространство $H^1_\Gamma(\Omega^\delta)$ состоит из всех функций, принадлежащих $H^1(\Omega^\delta)$ и обращающихся в нуль на Γ. Определим множество кинематически допустимых полей перемещений

$$K(\Omega^\delta) = \{\, u \in H^1_\Gamma(\Omega^\delta) \mid [u]\nu^\delta \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\delta \,\},$$

пусть также

$$\mathcal{K}(\Omega^\delta) = \{\, u \in L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^\delta)) \mid u(t) \in K(\Omega^\delta) \quad \text{на} \quad (0,T) \,\}.$$

Так как в области Ω^δ первое неравенство Корна выполняется, то вариационное неравенство

$$u^\lambda \in \mathcal{K}(\Omega^\delta), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(\bar u - u^\lambda)\rangle_{\Omega^\delta}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar u - u^\lambda\rangle_{\Omega^\delta}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar u \in \mathcal{K}(\Omega^\delta). \tag{2.6}$$

имеет единственное решение.

Покажем, как перейти к пределу при $\lambda \to 0$. Последовательно выбирая пробные функции $\bar u = 0$, $\bar u = 2u^\lambda$ в (2.6) и сравнивая полученные неравенства, приходим к равенству

$$\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_*}\, dt = \int\limits_0^T \langle f, u^\lambda\rangle_{\Omega^\delta}\, dt.$$

Из последнего соотношения выводим оценки

$$\|u^\lambda\|_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^\delta))} \leqslant c, \qquad \|u^\lambda\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega_*))} \leqslant c\lambda$$

с постоянной c, равномерной по $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Не ограничивая общности, можно считать, что при $\lambda \to 0$ имеют место сходимости

$$u^\lambda \to u \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^\delta)),$$

$$\int\limits_0^t u^\lambda\, d\tau \to \int\limits_0^t u\, d\tau \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^\delta)),$$

$$u^\lambda \to 0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T; H^1(\Omega_*)).$$

Выберем $\bar u \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$, продолжим ее нулем $\Omega_* \times (0,T)$ и подставим полученную таким образом функцию в (2.6) в качестве пробной функции. В результате получим

$$\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(\bar u)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_*}\, dt$$
$$- \int\limits_0^T \langle f, u^\lambda\rangle_{\Omega_*}\, dt + \int\limits_0^T \langle f, \bar u - u^\lambda\rangle_{\Omega_\delta}\, dt. \tag{2.7}$$

Принимая во внимание неравенство

$$\liminf_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_*}\, dt \geqslant 0,$$

перейдем к нижнему пределу при $\lambda \to 0$ в правой и левой частях (2.7):

$$\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar u - u)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar u - u\rangle_{\Omega_\delta}\, dt. \tag{2.8}$$

Поскольку справедливо включение $u^\lambda \in \mathcal{K}(\Omega^\delta)$, то ограничение предельной функции u на область $\Omega_\delta \times (0,T)$ принадлежит множеству $\mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$. Таким образом, соотношение (2.8) может быть записано в виде вариационного неравенства

$$u \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar u - u)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar u - u\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar u \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \tag{2.9}$$

которое с точностью до обозначений совпадает с (1.8).

Решение задачи (2.9) будет единственным. Следствием предположения о существовании двух различных решений $u^1, u^2 \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$ является равенство

$$\int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(u) \rangle_{\Omega_\delta} \, dt = 0$$

с функцией w, соответствующей $u = u^1 - u^2$. В силу однородных краевых условий для функции u на $\partial\Omega \times (0,T)$ заключаем, что $u = 0$ в $\Omega_\delta \times (0,T)$, что и требовалось доказать.

2.2. Вариация формы трещины

Для того чтобы установить непрерывную зависимость решения от формы трещины, поступим следующим образом. В цилиндре $\Omega^\delta \times (0,T)$ рассмотрим семейство задач (ср. с (2.6)), зависящих от параметров $\delta \in [0, \delta_0]$, $\lambda > 0$:

$$u^{\delta\lambda} \in \mathcal{K}(\Omega^\delta), \quad \int_0^T \langle \sigma^\lambda_{ij}(w^{\delta\lambda}), \varepsilon_{ij}(\bar{u} - u^{\delta\lambda}) \rangle_{\Omega^\delta} \, dt \geqslant \int_0^T \langle f, \bar{u} - u^{\delta\lambda} \rangle_{\Omega^\delta} \, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}(\Omega^\delta). \tag{2.10}$$

Ранее мы показали, что для фиксированных значений параметров задача (2.10) однозначно разрешима. На следующем этапе получим априорные оценки решения, на основе которых осуществим последовательно предельные переходы при $\delta \to 0$, $\lambda \to 0$.

Пусть η — бесконечно гладкая финитная в области $\Omega \cup \Omega_* \cup \mathrm{int}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_*)$ функция, равная единице в малой выпуклой окрестности множества $\bigcup_{\delta \in [0,\delta_0]} \Gamma_\delta$. Используя замену переменных

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y - \delta\psi(x)\eta(x,y), \quad (x,y) \in \Omega^\delta, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega^0, \tag{2.11}$$

с положительным якобианом $J_\delta = 1 - \delta\psi\eta_{,y}$, отобразим взаимно однозначно область Ω^δ на Ω^0. Поставим в соответствие функции $u^{\delta\lambda}(t,x,y)$ функцию $u^\lambda_\delta(t,\tilde{x},\tilde{y})$ по правилу $u^\lambda_\delta(t,\tilde{x},\tilde{y}) = u^{\delta\lambda}(t,x,y)$. В результате замены переменных (2.11) вариационное неравенство (2.10) будет рассматриваться на множестве

$$\mathcal{K}_\delta(\Omega^0) = \big\{ u \in L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)) \mid u(t) \in K_\delta(\Omega^0) \ \text{ на } \ (0,T) \big\},$$

где

$$K_\delta(\Omega^0) = \big\{ u \in H^1_\Gamma(\Omega^0) \mid [u]\nu^\delta \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0 \big\}.$$

Равномерная по δ, $\delta \in [0, \delta_1]$, $\delta_1 \leqslant \delta_0$, оценка решения u^λ_δ имеет вид $\|u^\lambda_\delta\|_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^0))} \leqslant c$. Пусть подпоследовательность, обозначаемая прежним образом $\{u^\lambda_\delta\}$, такова, что для каждого фиксированного λ при $\delta \to 0$

$$u^\lambda_\delta \to u^\lambda \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)), \tag{2.12}$$

$$\int_0^t u^\lambda_\delta \, d\tau \to \int_0^t u^\lambda \, d\tau \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)). \tag{2.13}$$

Для любой функции $\bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega^0)$ можно указать последовательность пробных функций $\{\bar{u}_\delta\} \in \{\mathcal{K}_\delta(\Omega^0)\}$, обладающую тем свойством, что при $\delta \to 0$

$$\bar{u}_\delta \to \bar{u} \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)). \tag{2.14}$$

Сходимости (2.12)–(2.14) позволяют перейти к пределу при $\delta \to 0$ в вариационном неравенстве (2.10), записанном в переменных $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega^0$. Предельная функция u^λ удовлетворяет вариационному неравенству

$$u^\lambda \in \mathcal{K}_0(\Omega^0), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(\bar{u} - u^\lambda)\rangle_{\Omega^0}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u} - u^\lambda\rangle_{\Omega^0}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega^0),$$

и, как следствие, равномерным по $\lambda \in (0, \lambda_1]$ оценкам

$$\|u^\lambda\|_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^0))} \leqslant c, \quad \|u^\lambda\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega_*))} \leqslant c\lambda.$$

Тогда без потери общности можно считать, что при $\lambda \to 0$ имеют место сходимости

$$u^\lambda \to u \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^0)),$$

$$\int\limits_0^t u^\lambda\, d\tau \to \int\limits_0^t u\, d\tau \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^0)).$$

$$u^\lambda \to 0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega_*)).$$

Таким образом, сужение предельной функции u на исходный цилиндр $\Omega_\delta \times (0,T)$ является решением вариационного неравенства

$$u \in \mathcal{K}_0(\Omega_0), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u} - u)\rangle_{\Omega_0}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u} - u\rangle_{\Omega_0}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega_0).$$

Последнее, в свою очередь, означает, что сужение функции u соответствует прямолинейному графику Γ_0 и, значит, совпадает с u^0 — решением задачи (1.8) при $\delta = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Представленное доказательство, очевидно, сохраняет силу и в случае, когда угол между кривыми Γ_δ и $\partial\Omega$ в точке $(0,0)$ будет ненулевым.

З а м е ч а н и е 3. Другой подход к задаче о вариации формы трещины, выходящей на границу под ненулевым углом, может быть основан на использовании в (1.9) срезающей функции специального вида (см. [18]).

2.3. Задача оптимального управления

Обсудим вкратце вопрос о выборе экстремальных форм для трещины, один конец которой выходит на внешнюю границу области Ω. Именно, предположим, что для каждого $\psi \in \Psi_{\mathrm{ad}}$ график $\Gamma_\psi = \{(x,y) \mid y = \psi(x),\ x \in (0,1)\}$ выходит на границу $\partial\Omega$ в точке $(0,0)$. Здесь множество Ψ_{ad} выбирается так же, как и в подразд. 1.3. Применяя схему рассуждений из подразд. 1.3 и 2.2, можно получить следующий результат.

Теорема 4. *Существует решение задачи оптимального управления* (1.15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Khludnev A.M.** On equilibrium problem for a plate having a crack under the creep condition // Control and Cybern. 1996. Vol. 25, no. 5. P. 1015–1030.
2. **Хлуднев А.М.** Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
3. **Khludnev A.M., Kovtunenko V.A.** Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000. 408 p.

4. **Kovtunenko V.A.** Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations // Z. Angew. Math. Phys. 2003. Vol. 54, no. 3. P. 410–423.
5. **Рудой Е.М.** Выбор оптимальной формы поверхностных трещин в трехмерных телах // Вестн. НГУ. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 2. С. 76–87.
6. **Рудой Е.М.** Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 113–127.
7. **Вторушин Е.В.** Управление формой трещины в упругом теле при условии возможного контакта берегов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 20–30.
8. **Лазарев Н.П.** Существование экстремальной формы трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко // Вестн. НГУ. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 49–62.
9. **Лазарев Н.П.** Формула Гриффитса для пластины Тимошенко с криволинейной трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 98–108.
10. **Lazarev N.P., Rudoy E.M.** Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. 2014. Vol. 94, no. 9. P. 730–739.
11. **Арутюнян Н.Х., Шойхет Б.А.** Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 3. С. 31–48.
12. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
13. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
14. **Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.** Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
15. **Hoffmann K.-H., Khludnev A.M.** Fictitious domain method for the Signorini problem in a linear elasticity // Adv. Math. Sci. Appl. 2004. Vol. 14, no. 2. P. 465–481.
16. **Алексеев Г.В., Хлуднев А.М.** Трещина в упругом теле, выходящая на границу под нулевым углом // Вестн. НГУ. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 15–29.
17. **Попова Т.С.** Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, вып. 1. С. 87–106.
18. **Хлуднев А.М.** Об экстремальных формах разрезов в пластине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 1. С. 170–176.

Щербаков Виктор Викторович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: sherbakov87@gmail.com

Поступила 17.09.2014

Кривотько Ольга Игоревна
младший науч. сотрудник
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
e-mail: krivorotko.olya@mail.ru