ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.624

СХЕМА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ РЕШЕНИЯ [1]

Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина

Рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии. Для этой задачи разрабатывается новый подход к построению разностных схем, решения которых сходятся в равномерной норме равномерно относительно возмущающего параметра ε, $\varepsilon \in (0,1]$ (т. е. ε-равномерно) с порядком точности значительно выше максимального достижимого для метода Ричардсона на кусочно-равномерных сетках. Главное в этом подходе — использование равномерных сеток для решения сеточных подзадач для регулярной и сингулярной компонент сеточного решения. На основе техники асимптотических конструкций строится базовая схема метода декомпозиции решения, решение которой сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$, где $N+1$ — число узлов в используемых равномерных сетках. Техника экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках применяется к базовой схеме метода декомпозиции решения. В результате получается схема Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности, решение которой сходится ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная краевая задача, обыкновенное дифференциальное уравнение реакции-диффузии, декомпозиция сеточного решения, техника асимптотических конструкций, разностная схема метода декомпозиции решения, равномерные сетки, ε-равномерная сходимость, равномерная норма, техника экстраполяции Ричардсона, разностная схема высокого порядка точности.

G. I. Shishkin, L. P. Shishkina. Difference scheme of highest accuracy order for a singularly perturbed reaction–diffusion equation based on the solution decomposition method.

A Dirichlet problem is considered for a singularly perturbed ordinary differential reaction–diffusion equation. For this problem, a new approach is developed in order to construct difference schemes whose solutions converge in the maximum norm uniformly with respect to the perturbation parameter ε, $\varepsilon \in (0,1]$ (i.e., ε-uniformly) with order of accuracy significantly greater than the achievable accuracy order for the Richardson method on piecewise-uniform grids. Important in this approach is the use of uniform grids for solving grid subproblems for regular and singular components of the grid solution. Using the asymptotic construction technique, a basic difference scheme of the solution decomposition method is constructed that converges ε-uniformly in the maximum norm at the rate $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$, where $N+1$ is the number of nodes in the uniform grids used. The Richardson extrapolation technique on three embedded grids is applied to the basic scheme of the solution decomposition method. As a result, we have constructed the Richardson scheme of the solution decomposition method with highest accuracy order. The solution of this scheme converges ε-uniformly in the maximum norm at the rate $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$.

Keywords: singularly perturbed boundary value problem, ordinary differential reaction–diffusion equation, decomposition of a discrete solution, asymptotic construction technique, difference scheme of the solution decomposition method, uniform grids, ε-uniform convergence, maximum norm, Richardson extrapolation technique, difference scheme of highest accuracy order.

Посвящается памяти академика А. М. Ильина

1. Введение

В последнее время для сингулярно возмущенных задач на основе схем на кусочно-равномерных сетках с использованием техники Ричардсона (технику Ричардсона для регулярных задач см. в [1]) построены ε-равномерно сходящиеся схемы повышенного порядка точности (см., например, [2–8], а также [9, гл. 10], и библиографию там). Однако использование неравномерных сеток вызывает затруднения при построении схем высокого порядка точности.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00618).

Так, метод Ричардсона в случае параболического уравнения реакции-диффузии не позволяет строить схемы с порядком точности по x выше третьего (см. [7]), а в случае эллиптического уравнения конвекции-диффузии — с порядком точности выше второго (см. [8]).

В статье [10] разработан новый подход к построению специальных схем на основе техники асимптотических конструкций — метод декомпозиции сеточного решения. Главное в этом подходе — использование классических аппроксимаций задач для регулярной и сингулярной компонент решения на равномерных сетках. В отличие от известных подходов к построению ε-равномерно сходящихся разностных схем — метода подгонки (приводящего к схемам Ильина/Аллена — Саусвелла [11; 12]) и метода специальных сеток, сгущающихся в погранслое (использующего классические схемы на сетках Бахвалова и/или Шишкина [13–15]), — в новом подходе сеточные подзадачи решаются на соответствующих равномерных сетках, причем коэффициенты сеточных уравнений не зависят от явного вида сингулярной компоненты решения. В [10] для задачи Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии впервые построена схема метода декомпозиции решения, сходящаяся ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$, где $N+1$ — число узлов в используемых сетках. В этой же работе — с использованием техники Ричардсона — построена улучшенная схема метода декомпозиции решения, сходящаяся ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-4}\ln^4 N\right)$.

Отметим, что для сингулярно возмущенных задач схемы, сходящиеся ε-равномерно с порядком выше четвертого, в литературе не известны. В настоящей работе метод декомпозиции сеточного решения впервые применяется для построения аппроксимации краевой задачи реакции-диффузии, сходящейся ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$. Построение сеточных аппроксимаций решения высокого порядка точности потребовало модификации метода экстраполяции Ричардсона и техники декомпозиции сеточных решений, используемых ранее в [10]. Существенным является использование трех вложенных сеток в методе экстраполяции Ричардсона, а также построение улучшенных разложений для регулярной компоненты решения. Предлагаемый новый вариант разностной схемы допускает построение разностных схем для числа вложенных сеток больше трех (при построении схем, сходящихся с порядком, близким к восьмому и выше) и, в отличие от работы [10], не требует использования сеточных конструкций, область определения которых выходит за область определения краевой задачи.

О содержании работы. Постановка краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии и цель исследования сформулированы в разд. 2. В разд. 3 приводится стандартная разностная схема на равномерной сетке. В разд. 4 описывается метод экстраполяции Ричардсона, используемый для повышения точности решений стандартной разностной схемы на равномерной сетке. В разд. 5 строится базовая разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенной задачи. Регулярная и сингулярная компоненты рассматриваются на равномерных сетках. Схема метода декомпозиции решения сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$ — такой же скоростью, как стандартная схема на кусочно-равномерной сетке. Здесь $N+1$ — число узлов используемых сеток; заметим, что число узлов сеток, на которых рассматриваются сеточные аппроксимации регулярной и сингулярных компонент в окрестности левой и правой границ области, одинаково. Разностная схема высокого порядка точности — схема Ричардсона метода декомпозиции решения, сходящаяся ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$, — строится в разд. 6.

2. Постановка задачи. Цель работы

На множестве $\overline{D}$

$$\overline{D} = D \cup \Gamma, \quad D = (0, d), \tag{2.1}$$

рассмотрим задачу Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии[1]

$$L_{(2.2)}\, u(x) \equiv \left\{\varepsilon^2\, a(x) \frac{d^2}{dx^2} - c(x)\right\} u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.2}$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 и Γ_2 — левая и правая части границы Γ; функции $a(x)$, $c(x)$, $f(x)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{D}$, причем[2]

$$a_0 \le a(x) \le a^0, \quad c_0 \le c(x) \le c^0, \quad x \in \overline{D}; \quad a_0,\, c_0 > 0;$$
$$|f(x)| \le M, \quad x \in \overline{D}; \quad |\varphi(x)| \le M, \quad x \in \Gamma;$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. При малых значениях параметра ε в окрестности множества Γ появляется пограничный слой.

Цель настоящей работы — для краевой задачи (2.2), (2.1) построить схему высокого порядка точности — схему, сходящуюся ε-равномерно в равномерной норме с шестым порядком точности (с точностью до логарифмического сомножителя) — на основе техники декомпозиции сеточного решения и техники экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках.

3. Разностная схема на равномерной сетке

Рассмотрим разностную схему, строящуюся на основе классической аппроксимации задачи (2.2), (2.1) на равномерной сетке. На множестве $\overline{D}$ введем равномерную сетку

$$\overline{D}_h \tag{3.1}$$

с шагом $h = d\, N^{-1}$, где $N + 1$ — число узлов сетки $\overline{D}_h$.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем разностной схемой [16]:

$$\Lambda_{(3.2)}\, z(x) \equiv \left\{\varepsilon^2\, a(x)\, \delta_{\overline{x}\widehat{x}} - c(x)\right\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \tag{3.2}$$

Здесь $D_h = D \cap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x)$ — центральная разностная производная второго порядка на равномерной сетке, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x) = 2\, h^{-1}\, [\delta_x\, z(x) - \delta_{\overline{x}}\, z(x)]$; $\delta_x\, z(x)$ и $\delta_{\overline{x}}\, z(x)$ — разностные (вперед и назад) производные первого порядка, $\delta_x\, z(x) = h^{-1}\, (x^{i+1} - x^i)$, $\delta_{\overline{x}}\, z(x) = h^{-1}\, (x^i - x^{i-1})$, $x = x^i \in D_h$. Схема (3.2), (3.1) монотонна [16] ε-равномерно. Для нее справедлив принцип максимума. При достаточно гладких данных задачи, обеспечивающих включение $u \in C^K(\overline{D})$, $K > 0$, для решения краевой задачи выполняется априорная оценка (см., например, [17, гл. I, § 3; 9, гл. 2])

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\, u(x)\right| \le M \varepsilon^{-k}, \quad x \in \overline{D}, \quad k \le K, \tag{3.3}$$

где $K = 4$. С учетом этой оценки на основе принципа максимума получается оценка

$$|u(x) - z(x)| \le M\, \left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-2}\, N^{-2}, \quad x \in \overline{D}_h. \tag{3.4}$$

Таким образом, схема (3.2), (3.1) сходится при условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon), \quad N = N_{(3.1)}. \tag{3.5}$$

[1] Запись $L_{(j.k)}$ $\left(\overline{D}_{(j.k)}, M_{(j.k)}\right)$ означает, что этот оператор (область, постоянная) введен в формуле $(j.k)$.

[2] Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

4. Экстраполяция Ричардсона на основе классической схемы (3.2), (3.1)

Опишем модифицированный метод экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках, используемый для повышения точности решений стандартной разностной схемы (3.2) на равномерной сетке (3.1). Отметим, что техника экстраполяции Ричардсона из [10] оказывается непригодной для повышения точности решения схемы при использовании сеточных решений на вложенных сетках, когда число вложенных сеток больше двух.

4.1. На множестве $\overline{D}$ строим равномерные сетки

$$\overline{D}_h^q, \quad q = 1, 2, 3. \tag{4.1a}$$

Здесь $\overline{D}_h^1$ есть $\overline{D}_{h(3.1)}$, $\overline{D}_h^2$ и $\overline{D}_h^3$ — "прореженные" сетки. Шаг h^2 сетки $\overline{D}_h^2$ (на отрезке $\overline{D}$) в k раз больше, чем шаг h^1 сетки $\overline{D}_h^1$, а шаг h^3 сетки $\overline{D}_h^3$ в k^2 раз больше, чем шаг h^1; $k^{-1} N + 1$ и $k^{-2} N + 1$ — число узлов сеток $\overline{D}_h^2$ и $\overline{D}_h^3$ соответственно; имеем $h^1 = dN^{-1}$, $h^2 = kdN^{-1}$, $h^3 = k^2 dN^{-1}$. Пусть

$$\overline{D}_h^0 = \overline{D}_h^1 \bigcap \overline{D}_h^2 \bigcap \overline{D}_h^3. \tag{4.1b}$$

При k целом ($k \geq 2$) $\overline{D}_h^0 = \overline{D}_h^3$, а при k нецелом $\overline{D}_h^0 \neq \overline{D}_h^3$.

Пусть функции $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1,\ 2,\ 3,$ — решения разностных схем

$$\begin{aligned} \Lambda_{(3.2)} z^q(x) &= f(x), \quad x \in D_h^q, \\ z^q(x) &= \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h^q, \quad q = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.2a}$$

Решения $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1, 2, 3$, допускают разложения относительно величины N^{-2}, где функция $u(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение краевой задачи — есть главный член. Рассматривая линейную комбинацию сеточных решений $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1, 2, 3$, получим на $\overline{D}_h^0$ более точное решение, чем $z^q(x)$, $q = 1, 2, 3$. Полагаем

$$z^0(x) = \gamma_1 \, z^1(x) + \gamma_2 \, z^2(x) + \gamma_3 \, z^3(x), \quad x \in \overline{D}_h^0. \tag{4.2b}$$

Здесь

$$\gamma_q = \gamma_q(k), \quad q = 1, 2, 3, \quad \gamma_1 = k^6 (k^6 - k^4 - k^2 + 1)^{-1},$$
$$\gamma_2 = -(k^4 + k^2)(k^6 - k^4 - k^2 + 1)^{-1}, \quad \gamma_3 = (k^6 - k^4 - k^2 + 1)^{-1}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1.$$

Так, например, при $k = 2$ имеем

$$z^0(x) = 45^{-1} (64 \, z^1(x) - 20 \, z^2(x) + \, z^3(x)), \quad x \in \overline{D}_h^0. \tag{4.3}$$

Будем говорить, что функция $z^0(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$ (функция $z^0_{(4.3)}(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$ при $k = 2$) есть решение разностной схемы (4.2), (4.1), т. е. схемы, строящейся на основе метода экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках или, короче, схемы Ричардсона. Функции $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1, 2, 3$, назовем компонентами решения схемы Ричардсона. Коэффициенты $\gamma_q = \gamma_q(k)$, $q = 1, 2, 3$, в (4.2b) выбираются таким образом, чтобы функция $z^0(x)$ в разложении (4.4) по величине N^{-1} (по эффективному шагу) не содержала функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ (см. разложение (4.4) ниже).

4.2. Для обоснования сходимости схемы (4.2), (4.1) применяется техника, подобная использованной в [2–4; 6; 9]. Предполагаем, что для решения краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется априорная оценка (3.3) при $K = 8$.

Рассмотрим разложения функций $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1, 2, 3$, по величине N^{-1}:

$$z^q(x) = u(x) + 12^{-1} d^2 k^{2(q-1)} N^{-2} u_1(x) + 360^{-1} d^4 k^{4(q-1)} N^{-4} u_2(x) + v^q(x), \tag{4.4}$$

$$x \in \overline{D}_h^q, \quad q = 1, 2, 3,$$

где $v^q(x)$ — остаточный член. Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ — решения задач

$$L_{(2.2)}\, u_1(x) = -\varepsilon^2\, a(x)\, \frac{d^4}{dx^4}\, u(x), \quad x \in D, \quad u_1(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{4.5a}$$

$$L_{(2.2)} u_2(x) = -2.5\, \varepsilon^2 a(x) \frac{d^4}{dx^4} u_1(x) - \varepsilon^2 a(x) \frac{d^6}{dx^6}\, u(x), \quad x \in D, \quad u_2(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Здесь $u(x) = u_{\{(2.2),\,(2.1)\}}(x)$, $x \in \overline{D}$.

При построении разложения (4.4) используется разложение для второй центральной разностной производной функции $u(x)$, $u \in C^8(\overline{D})$:

$$\delta_{x\,\overline{x}} u(x) = \frac{d^2}{dx^2}\, u(x) + \; 12^{-1}\, h^2 \frac{d^4}{dx^4}\, u(x) + 360^{-1}\, h^4 \frac{d^6}{dx^6}\, u(x) + 20160^{-1}\, h^6 \frac{d^8}{dx^8}\, u(\widetilde{x}),$$

где $x \in D_h^u$, $x - h \le \widetilde{x} \le x + h$, а также подобные разложения второй разностной производной для функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

Компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются достаточно гладкими на $\overline{D}$. Для функций $u_{1(4.5)}(x)$, $u_{2(4.5)}(x)$, $x \in \overline{D}$, справедливы оценки

$$\Big| \frac{d^k}{dx^k} u_1(x) \Big| \le M\, \varepsilon^{-2-k}, \quad \Big| \frac{d^k}{dx^k} u_2(x) \Big| \le M\, \varepsilon^{-4-k}, \quad x \in \overline{D}. \tag{4.6}$$

Применив оператор $\Lambda_{(3.2)}$ к разложению (4.4), принимая во внимание оценку (3.4) для решения $u(x)$ и оценку (4.6) для компонент $u_1(x)$, $u_2(x)$, находим оценку для функции $v^q(x)$:

$$|v^q(x)| \le M\, \varepsilon^{-6} N^{-6}, \quad x \in \overline{D}_h^q, \quad q = 1, 2, 3. \tag{4.7}$$

С учетом разложения (4.4) и оценки (4.7) находим оценку решения схемы Ричардсона:

$$|u(x) - z^0(x)| \le M\, \varepsilon^{-6} N^{-6}, \quad x \in \overline{D}_h^0. \tag{4.8}$$

Решение схемы Ричардсона (4.2), (4.1) сходится к решению $u(x)$ краевой задачи при условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon), \quad N = N_{(4.1)}. \tag{4.9}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для решения краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется оценка* (3.3) *при* $K = 8$. *Тогда решение* $z^0(x)$ *схемы Ричардсона* (4.2), (4.1) *сходится к решению* $u(x)$ *краевой задачи при условии* (4.9). *Для сеточного решения выполняется оценка* (4.8).

З а м е ч а н и е 1. Схема Ричардсона (4.2), (4.1) сходится при условии (4.9), подобном условию (3.5) для сходимости стандартной схемы (3.2), (3.1), однако схема Ричардсона сходится с порядком скорости сходимости $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-6}\, N^{-6}\right)$, а стандартная схема — лишь с порядком $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-2}\, N^{-2}\right)$.

5. Базовая схема метода декомпозиции сеточного решения для задачи (2.2), (2.1)

На основе техники асимптотических конструкций построим ε-равномерно сходящуюся разностную схему метода декомпозиции сеточного решения, в котором сеточные регулярная и сингулярная компоненты решения вычисляются на равномерных сетках. Будем использовать ее как базовую при построении схемы высокого порядка точности в разд. 6.

5.1. Рассмотрим простейшую декомпозицию решения сингулярно возмущенной краевой задачи (2.2), (2.1). Решение этой задачи представим в виде суммы регулярной и сингулярной компонент решения

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{5.1a}$$

Поскольку нам предстоит строить ε-равномерно сходящуюся схему высокого порядка точности в разд. 6, нам потребуются оценки производных регулярной компоненты решения $U(x)$, ε-равномерно ограниченные до более высокого порядка по сравнению с оценками теоремы 4 в статье [10], мы рассматриваем разложение регулярной компоненты в виде суммы *с большим числом членов*, чем это было в статье [10] (см. формулу (5.1b) в [10]):

$$U(x) = U_0(x) + \varepsilon^2\, U_1(x) + \varepsilon^4\, U_2(x) + v_U(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{5.2}$$

Функции $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$ и $v_U(x)$ в (5.2) — решения следующих задач:

$$L_{(5.3)}\, U_0(x) \;=\; f(x), \qquad x \in \overline{D}; \tag{5.3a}$$

$$L_{(5.3)}\, U_1(x) \;=\; -a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\, U_0(x), \qquad x \in \overline{D}; \tag{5.3b}$$

$$L_{(5.3)}\, U_2(x) \;=\; -a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\, U_1(x), \qquad x \in \overline{D};$$

$$L_{(2.2)}\, v_U(x) \;=\; -\varepsilon^6 a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\, U_2(x), \quad x \in D, \quad v_U(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{5.3c}$$

Здесь $L_{(5.3)} = L_{(2.2)}|_{\varepsilon=0} \equiv -c(x)$, $x \in \overline{D}$.

Отсюда следует, что в представлении (5.2) регулярной компоненты $U(x)$ главные члены $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$ определяются соотношениями

$$U_0(x) = -\, c^{-1}(x)\, f(x), \quad U_1(x) = -\, c^{-1}(x)\, a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,(c^{-1}(x)\, f(x)), \tag{5.4a}$$

$$U_2(x) = -\, c^{-1}(x)\, a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big[c^{-1}(x)\, a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,(c^{-1}(x)\, f(x))\Big], \quad x \in \overline{D},$$

остаточный член $v_U(x)$ — решение задачи

$$L_{(2.2)} v_U(x) = \varepsilon^6 a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big\{c^{-1}(x)\, a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big[c^{-1}(x)\, a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,(c^{-1}(x)\, f(x))\Big]\Big\}, \tag{5.4b}$$

$$x \in D, \quad v_U(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Сингулярная компонента $V(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение задачи

$$L_{(2.2)}\, V(x) = 0, \quad x \in D, \quad V(x) = \varphi_V(x), \quad x \in \Gamma, \tag{5.5a}$$

где

$$\varphi_V(x) = \varphi(x) - U(x), \quad x \in \Gamma, \quad U(x) = U_{(5.2)}(x), \quad x \in \overline{D}.$$

Функцию $V(x)$ представим в виде суммы функций

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{5.1c}$$

где функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ — решения задач

$$\begin{aligned} L_{(2.2)}\, V_j(x) &= 0, && x \in D, \\ V_j(x) &= \varphi_V(x), && x \in \Gamma_j, \\ V_j(x) &= 0, && x \in \Gamma \setminus \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.5b}$$

Таким образом, для решения задачи (2.2), (2.1) получено представление (5.1a,c), (5.2), компоненты которого являются решением задачи $\{(5.3),\ (5.5)\}$, эквивалентной задаче $\{(5.4),\ (5.5)\}$.

Будем предполагать, что для данных краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется условие Теоремы 10 из [10] при $l_0 \ge 8$, $n = 2$. Тогда для компонент из представления (5.1a,c) получаются оценки, подобные оценкам (5.4) из [10]:

$$\left.\begin{aligned} &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,U(x)\Big| \le M\,[1+\varepsilon^{6-k}] \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,V_1(x)\Big| \le M\,\varepsilon^{-k}\,\exp(-m\,\varepsilon^{-1}\,x) \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,V_2(x)\Big| \le M\,\varepsilon^{-k}\,\exp(-m\,\varepsilon^{-1}\,(d-x)) \end{aligned}\right\}, \quad x \in \overline{D}, \quad k \le K, \tag{5.6}$$

а для компонент из (5.2) — следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned} &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,U_0(x)\Big| \le M, && k \le K+4 \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,U_1(x)\Big| \le M, && k \le K+2 \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,U_2(x)\Big| \le M, && k \le K \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,v_U(x)\Big| \le M\,\varepsilon^{4-k}, && k \le K \end{aligned}\right\}, \quad x \in \overline{D}, \tag{5.7}$$

где m — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min_{\overline{D}}^{1/2}\ \big[a^{-1}(x)\,c(x)\big];\ \ K = 8$.

Теорема 2. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется условие теоремы* 10 *из* [10] *при* $l_0 \ge 8$, $n = 2$. *Тогда для компонент из представлений* (5.1a,c) *и* (5.2) *справедливы оценки* (5.6) *и* (5.7) *соответственно, где* $K = 8$.

5.2. Для краевой задачи (2.2), (2.1) с использованием декомпозиции (5.2) регулярной компоненты $U(x)$ построим разностную схему метода декомпозиции решения — асимптотических конструкций, подобных рассматриваемым в [9, гл. 10]. При значениях параметра, близких к единице, краевую задачу аппроксимируем стандартной разностной схемой, а при малых значениях ε используем сеточные аппроксимации дифференциальных подзадач для регулярной и сингулярной компонент решения на подходящих равномерных сетках.

При не слишком малых значениях параметра ε, а именно при условии

$$\varepsilon \ge \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = m\,l^{-1}\,d\,\ln^{-1} N, \tag{5.8}$$

где $m = m_{(5.7)}$, $l = 6$, задачу (2.2), (2.1) будем аппроксимировать стандартной разностной схемой (3.2) на *равномерной сетке* (3.1); $N = N_{(3.1)}$.

При достаточно малых значениях параметра ε, а именно при условии

$$\varepsilon < \varepsilon_0(N), \tag{5.9}$$

главный член $U_0(x)$ регулярной компоненты $U(x)$, а также компоненты $U_1(x)$ и $U_2(x)$ из представления (5.2) выписываются в явном виде (см. (5.4a)). Краевую задачу (5.4b) для остаточного члена $v_U(x)$ будем аппроксимировать схемой на *равномерной сетке* (3.1), а краевые задачи для сингулярных компонент $V_j(x)$ из (5.5b) — схемами на *равномерных сетках*, строящихся на подобластях $\overline{D}_j^{\,\sigma}$ из $\overline{D}$, примыкающих к границам Γ_j, $j = 1, 2$, где

$$\overline{D}_j^{\,\sigma} = D_j^\sigma \bigcup \Gamma_j^\sigma, \quad j = 1, 2, \quad D_1^\sigma = (0, \sigma), \quad D_2^\sigma = (d-\sigma, d), \tag{5.10a}$$

$$\sigma = \sigma(\varepsilon,\ N,\ l) = \min\big[d,\ m^{-1}\,l\,\varepsilon\,\ln N\big]\,; \tag{5.10b}$$

здесь $m = m_{(5.12)}$, $l = l_{(5.8)}$, $N = N_{(5.8)}$, $\varepsilon = \varepsilon_{(5.9)}$.

5.2.1. Рассмотрим построение разностной схемы при условии (5.9).

Краевую задачу (5.4b) для остаточного члена $v_U(x)$ аппроксимируем стандартной разностной схемой на равномерной сетке (3.1):

$$\Lambda_{(3.2)}\, z_{v_U} = \varepsilon^6 a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big\{c^{-1}(x)\,a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big[c^{-1}(x)\,a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,(c^{-1}(x)\,f(x))\Big]\Big\}, \tag{5.11}$$

$$x \in D_h, \quad z^q_{v_U}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h.$$

Находим сеточную регулярную компоненту $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h$:

$$z_U(x) = U_0(x) + \varepsilon^2\, U_1(x) + \varepsilon^4\, U_2(x) + z_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D}_h, \tag{5.12}$$

аппроксимирующую регулярную компоненту $U(x)$ из (5.2).

Через $\overline{z}_U(x)$, $x \in \overline{D}$, обозначим интерполянт — линейный интерполянт, строящийся по значениям $z_U(x)$ в узлах сетки $\overline{D}_h$ на элементарных интервалах разбиения множества $\overline{D}$, порождаемых сеткой $\overline{D}_h$.

Функцию $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h$, а также ее интерполянт $\overline{z}_U(x), x \in \overline{D}$, назовем решениями (сеточным и континуальным) разностной схемы $\{\{(5.11), (3.1);(5.12)\}; (5.9)\}$, аппроксимирующей дифференциальную задачу (5.4) при условии (5.9) (будем говорить — дифференциальную задачу $\{(5.4); (5.9)\}$).

Имея регулярную компоненту $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h$, построим сеточную аппроксимацию краевых задач $\{(5.5a), (5.5b), (2.1)\}$ для сингулярной компоненты $V(x)$ и ее составляющих $V_j(x)$. На множестве $\overline{D}^{\sigma}_{j\,(5.10)}$ введем равномерную сетку

$$\overline{D}^{\sigma}_{j\,h} = \overline{D}^{\sigma u}_{j\,h}, \quad j = 1, 2, \tag{5.13}$$

где $\overline{D}^{\sigma u}_{j\,h}$ — сетка на $\overline{D}^{\sigma}_{j\,(5.10)}$ с шагом $h^\sigma = \sigma N^{-1}$, $N+1$ — число узлов сетки $\overline{D}^{\sigma u}_{j\,h}$, $N = N_{(3.1)}$; $\overline{D}^{\sigma}_{j\,h} = D^{\sigma}_{j\,h} \cup \Gamma^{\sigma}_{j\,h}$. На сетке $\overline{D}^{\sigma}_{j\,h}$ решаем сеточную задачу

$$\begin{aligned} \Lambda_{(3.2)} z_{V_j}(x) &= 0, \quad x \in D^{\sigma}_{j\,h}, \\ z_{V_j}(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x) - \overline{z}_U(x), & x \in \Gamma^{\sigma}_{j\,h} \cap \Gamma \\ 0, & x \in \Gamma^{\sigma}_{j\,h} \setminus \Gamma \end{array} \right\}, \quad x \in \Gamma^{\sigma}_{j\,h}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.14}$$

По функции $z_{V_j}(x)$, $x \in \overline{D}^{\sigma}_{j\,h}$, построим интерполянт $\overline{z}_{V_j}(x)$, $x \in \overline{D}^{\sigma}_j$. Функции $z_{V_j}(x)$ и $\overline{z}_{V_j}(x)$ вне множества $\overline{D}^{\sigma}_j$ считаем равными нулю. Полагаем

$$\overline{z}_V(x) = \overline{z}_{V_1}(x) + \overline{z}_{V_2}(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{5.15}$$

Функцию $\overline{z}_{V\,(5.15)}(x)$, $x \in \overline{D}$, назовем решением (континуальным) разностной схемы $\{(5.14), (5.13); (5.9)\}$, аппроксимирующей краевую задачу (5.5a), (2.1) при условии (5.9) (будем говорить — краевую задачу $\{(5.5), (2.1); (5.9)\}$). Функцию

$$\overline{z}_{u(5.16a)}(x) = \overline{z}_U(x) + \overline{z}_V(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \textit{при условии} \quad (5.9), \tag{5.16a}$$

где $\overline{z}_U(x) = \overline{z}_{U\,(5.12)}(x)$, $\overline{z}_V(x) = \overline{z}_{V\,(5.15)}(x)$, $x \in \overline{D}$, назовем решением (континуальным) разностной схемы $\{\{(5.11), (3.1); (5.14)\ (5.13)\}; (5.9)\}$, аппроксимирующей краевую задачу (2.2), (2.1) при условии (5.9) (будем говорить — краевую задачу $\{(2.2), (2.1); (5.9)\}$). Функции

$$U_0(x), U_1(x), U_2(x), \quad x \in \overline{D}; \quad z_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D}_h; \quad z_{V_j}(x), \quad x \in \overline{D}^{\sigma}_{jh}, \quad j = 1, 2,$$

определяющие решение $\overline{z}_{u(5.16a)}(x)$, $x \in \overline{D}$, назовем компонентами этого решения.

5.2.2. В случае условия (5.8) решаем разностную схему (3.2), (3.1); интерполянт

$$\overline{z}_{u(5.16\mathrm{b})}(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \textit{при условии} \quad (5.8), \tag{5.16b}$$

строящийся по решению $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$ схемы (3.2), (3.1), назовем решением разностной схемы $\{(3.2),\ (3.1);\ (5.8)\}$, аппроксимирующей краевую задачу (2.2), (2.1) при условии (5.8) (будем говорить — краевую задачу $\{(2.2),\ (2.1);\ (5.8)\}$).

5.2.3. Строим функцию $\overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$,

$$\overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a})}(x) & \textit{при условии} & (5.9) \\ \overline{z}_{u(5.16\mathrm{b})}(x) & \textit{при условии} & (5.8) \end{array} \right\}, \quad x \in \overline{D},$$

аппроксимирующую решение задачи (2.2), (2.1). Эту функцию $\overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$, а также функции $\overline{z}_{U\,(5.12)}(x)$, $\overline{z}_V(x) = \overline{z}_{V\,(5.15)}(x)$, $x \in \overline{D}$, назовем соответственно решением (континуальным) и компонентами (континуальными) решения разностной схемы $\{\{(3.2),\ (3.1)\};\ \{(5.11),\ (3.1);\ (5.14),\ (5.13)\}\}$, которую назовем *базовой схемой метода декомпозиции решения.*

Базовая схема метода декомпозиции решения монотонна ε-равномерно. Например, в случае условия (5.9) справедлив следующий вариант теоремы сравнения.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (5.9), *и пусть для функций* ${U_0}^k(x)$, $x \in \overline{D}$, $z^k_{v_U}(x)$, $x \in \overline{D}_h$, *и* $z^k_{V_j}(x)$, $x \in \overline{D}^{\sigma}_{j\,h}$, $j = 1, 2$, *при* $k = 1, 2$, *являющихся компонентами решения* $\overline{z}^k_{u(5.16\mathrm{a})}(x)$, $x \in \overline{D}$, *выполняются условия*

$$\Lambda_{(3.2)} z^1_{v_U}(x) \le \Lambda_{(3.2)} z^2_{v_U}(x), \quad x \in D_h, \qquad z^1_{v_U}(x) \ge z^2_{v_U}(x), \qquad x \in \Gamma_h;$$

$$\Lambda_{(3.2)} z^1_{V_j}(x) \le \Lambda_{(3.2)} z^2_{V_j}(x), \qquad x \in D^{\sigma}_{j\,h}, \quad z^1_{V_j}(x) \ge q z^2_{V_j}(x), \quad x \in \Gamma^{\sigma}_{j\,h}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$z^1_{v_U}(x) \ge z^2_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D_h}; \quad z^1_{V_j}(x) \ge z^2_{V_j}(x), \quad x \in \overline{D}^{\sigma}_{j\,h}, \quad j = 1, 2.$$

5.3. Оценим ошибку $u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$, предполагая выполненным условие теоремы 2, обеспечивающее включения U, $V \in C^6(\overline{D})$, $U_0 \in C^8(\overline{D})$, U_1, U_2, $v_U \in C^6(\overline{D})$, где $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $v_U(x)$ — компоненты из разложения (5.2), а также справедливость априорных оценок (5.6), (5.7).

С учетом априорных оценок компонент $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $v_U(x)$ и $V_j(x)$, а также с использованием теоремы сравнения находим оценки для $v_U(x) - \overline{z}_{v_U}(x)$ и $V_j(x) - \overline{z}_{V_j}(x)$. Из этих оценок получаем оценку $u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a})}(x)$ при условии (5.9).

Оценивая $u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{b})}(x)$ при условии (5.8), используем оценку (3.4), где $\varepsilon > \varepsilon_0(N)$.

Для решения базовой разностной схемы метода декомпозиции решения получается оценка

$$|u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)| \le M\, N^{-2} \min{}^2\, [\varepsilon^{-1}, \ln N], \quad x \in \overline{D}, \tag{5.17}$$

а также ε-равномерная оценка

$$|u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)| \le M\, N^{-2} \ln^2 N, \quad x \in \overline{D}. \tag{5.18}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется условие теоремы* 2. *Тогда решение базовой разностной схемы метода декомпозиции решения* $\{\{(3.2), (3.1)\}; \{(5.11), (3.1); (5.14), (5.13)\}\}$ *сходится со скоростью* $\mathcal{O}\left(N^{-2} \ln^2 N\right)$ ε*-равномерно. Для решения этой разностной схемы справедливы оценки* (5.17), (5.18).

З а м е ч а н и е 2. Оценки (5.17), (5.18) в случае схемы метода декомпозиции решения такие же, как оценки для схемы на кусочно-равномерной сетке [9].

6. Экстраполяция Ричардсона для базовой схемы метода декомпозиции сеточного решения

Базовая схема $\{\{(3.2),(3.1)\};\{(5.11),(3.1);(5.14),(5.13)\}\}$ метода декомпозиции решения сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$. Использование метода экстраполяции Ричардсона позволяет повысить порядок ε-равномерной скорости сходимости этой базовой схемы. Построим схему метода декомпозиции, сходящуюся ε-равномерно с шестым порядком с точностью до логарифмического сомножителя.

Для повышения порядка ε-равномерной скорости сходимости схемы метода декомпозиции сеточного решения применяем технику экстраполяции Ричардсона к сеточным решениям разностных схем, аппроксимирующих краевую задачу (5.4b) для остаточного члена $v_U(x)$, и краевую задачу (5.5b) для сингулярных компонент $V_j(x)$; сеточные решения рассматриваются на трех вложенных сетках. Как и при построении базовой схемы метода декомпозиции сеточного решения, построение схем высокого порядка точности рассматриваем в двух случаях:

при условии (5.8) — при не слишком малых значениях параметра ε;
при условии (5.9) — при достаточно малых значениях параметра ε.

6.1. Строим схемы высокого порядка точности при условии (5.9).

6.1.1. Используя метод экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках, построим сеточную аппроксимацию компоненты $v_{U\,(5.2)}(x)$ — решения краевой задачи (5.4b) — и в соответствии с соотношением (5.2) найдем сеточную аппроксимацию регулярной компоненты $U_{(5.2)}(x)$. На множестве $\overline{D}$ строим три вложенные сетки

$$\overline{D}_h^q = \overline{D}^q_{h\,(4.1)}, \quad q=1,2,3; \quad \overline{D}_h^0 = \overline{D}^0_{h\,(4.1)}. \tag{6.1}$$

Краевую задачу (5.4b), эквивалентную задаче (5.3c), (2.1), аппроксимируем разностной схемой на сетках $\overline{D}_h^q$:

$$\Lambda_{(3.2)}\, z^q_{v_U}(x) = \varepsilon^6 a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big\{c^{-1}(x)\,a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big[c^{-1}(x)\,a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,(c^{-1}(x)\,f(x))\Big]\Big\}, \tag{6.2}$$
$$x\in D_h^q, \quad z^q_{v_U}(x)=0, \quad x\in\Gamma_h^q, \quad q=1,2,3.$$

На множестве $\overline{D}_h^0$ определим функцию $z^0_{v_U}(x)$:

$$z^0_{v_U}(x) = \gamma_1\, z^1_{v_U}(x) + \gamma_2\, z^2_{v_U}(x) + \gamma_3\, z^3_{v_U}(x), \quad x\in\overline{D}_h^0, \tag{6.3}$$

где $\gamma_q = \gamma_{q\,(4.2)}(k)$. Функция $z^0_{v_U\,(6.3)}(x)$, $x\in\overline{D}_h^0$, есть улучшенная сеточная аппроксимация остаточного члена $v_{U\,(5.2)}(x)$, $x\in\overline{D}$, построенная с использованием техники Ричардсона.

По функции $z^0_{v_U}(x)$, $x\in\overline{D}_h^0$, строим ее интерполянт (улучшенную континуальную аппроксимацию остаточного члена $v_{U\,(5.2)}(x)$)

$$\widetilde{z}^{\,0}_{v_U}(x), \quad x\in\overline{D}, \tag{6.4}$$

— 6-точечный (пятой степени) интерполянт Ньютона [18], строящийся на элементарных интервалах разбиения множества $\overline{D}$ (порождаемых узлами сетки $\overline{D}_h^0$). Интерполянт строится на элементарном интервале разбиения, являющемся центральным для 6-точечного шаблона, все узлы этого шаблона не выходят за множество $\overline{D}$. В том случае, когда какие-то узлы такого шаблона принадлежат границе Γ, интерполянт с центрального элементарного интервала разбиения продолжается до границы Γ. Полагаем

$$U^{(imp)}(x) = U_0(x) + \varepsilon^2\, U_1(x) + \varepsilon^4\, U_2(x) + \widetilde{z}^{\,0}_{v_U}(x), \quad x\in\overline{D}, \tag{6.5}$$

где $U_i(x) = U_{i(5.4a)}(x)$, $i = 0, 1, 2$, $\widetilde{z}^{\,0}_{v_U}(x) = \widetilde{z}^{\,0}_{v_U\,(6.4)}(x)$.

Функция $U^{(imp)}(x)$, $x \in \overline{D}$, есть континуальная аппроксимация функции $U_{(5.2)}(x)$, $x \in \overline{D}$, построенная с использованием техники Ричардсона на основе улучшенной компоненты $\widetilde{z}^{\,0}_{v_U\,(6.4)}(x)$, $x \in \overline{D}$.

6.1.2. Используя технику Ричардсона, построим сеточную аппроксимацию сингулярной компоненты $V(x)$, $x \in \overline{D}$. На $\overline{D}$ введем множества $\overline{D}^{\,\sigma}_j$:

$$\overline{D}^{\,\sigma}_j = \overline{D}^{\,\sigma}_{j\,(5.10)} = D^{\sigma}_j \bigcup \Gamma^{\sigma}_j, \quad j = 1, 2, \quad \sigma = \sigma_{(5.10)}(\varepsilon,\, N,\, l). \tag{6.6}$$

На множествах $\overline{D}^{\,\sigma}_j$ строим вложенные сетки (подобно сеткам $\overline{D}^{\,q}_{h\,(6.1)}$, $\overline{D}^{\,0}_{h\,(6.1)}$)

$$\overline{D}^{\,\sigma q}_{j\,h} = \overline{D}^{\,\sigma q}_{j\,h\,(6.7)}, \quad q = 1, 2, 3; \tag{6.7}$$

$$\overline{D}^{\,\sigma 0}_{j\,h} = \overline{D}^{\,\sigma 0}_{j\,h\,(6.7)} = \overline{D}^{\,\sigma 1}_{j\,h} \bigcap \overline{D}^{\,\sigma 2}_{j\,h} \bigcap \overline{D}^{\,\sigma 3}_{j\,h}, \quad j = 1, 2,$$

где $\overline{D}^{\,\sigma 1}_{j\,h}$, $j = 1, 2$, — “основные” сетки; $\overline{D}^{\,\sigma 2}_{j\,h}$, $\overline{D}^{\,\sigma 3}_{j\,h}$, $j = 1, 2$ — “прореженные” сетки; $N_{(6.6)} + 1$ — число узлов “основных” сеток.

Краевую задачу (5.5b), (2.1) аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{aligned} \Lambda_{(3.2)} z^q_{V_j}(x) &= 0, \quad x \in D^{\sigma q}_{j\,h}, \\ z^q_{V_j}(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} \varphi^{(imp)}_V(x), & x \in \Gamma^{\sigma\,q}_{j\,h} \bigcap \Gamma \\ 0, & x \in \Gamma^{\sigma q}_{j\,h} \setminus \Gamma \end{array} \right\}, \quad x \in \Gamma^{\sigma\,q}_{j\,h}, \quad q = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{6.8}$$

где

$$\varphi^{(imp)}_V(x) = \varphi(x) - U^{(imp)}(x), \quad x \in \Gamma, \quad U^{(imp)}(x) = U^{(imp)}_{(6.5)}(x), \quad x \in \overline{D},$$

$\varphi^{(imp)}_V(x)$ — граничное значение улучшенной сеточной аппроксимации сингулярной компоненты $V(x)$, $x \in \overline{D}$.

На множестве $\overline{D}^{\,\sigma\,0}_{j\,h}$ определим функцию $z^0_{V_j}(x)$

$$z^0_{V_j}(x) = \gamma_1\, z^1_{V_j}(x) + \gamma_2\, z^2_{V_j}(x) + \gamma_3\, z^3_{V_j}(x), \quad x \in \overline{D}^{\,\sigma 0}_{j\,h}, \quad j = 1, 2, \tag{6.9}$$

где $\gamma_q = \gamma_{q\,(4.2)}$, $q = 1, 2, 3$. Функция $z^0_{V_j}(x)$, $x \in \overline{D}^{\,\sigma 0}_{j\,h}$, есть сеточная аппроксимация функции $V_j(x)$, построенная с использованием техники Ричардсона.

На множестве $\overline{D}^{\,\sigma}_j$ построим ее интерполянт (подобно интерполянту $\widetilde{z}^{\,0}_{v_U\,(6.4)}(x)$, $x \in \overline{D}$)

$$\widetilde{z}^{\,0}_{V_j}(x), \quad x \in \overline{D}^{\,\sigma}_j, \quad j = 1, 2;$$

вне множества $\overline{D}^{\,\sigma}_j$ функции $z^0_{V_j}(x)$ и $\widetilde{z}^{\,0}_{V_j}(x)$ полагаем равными нулю.

Обоснование представлений (6.3) и (6.9) для функций $z^0_{v_U}(x)$ и $z^0_{V_j}(x)$ вытекает из разложений компонент $z^q_{v_U}(x)$ и $z^q_{V_j}(x)$ в ряд по степеням N^{-1} с главными членами разложений $v_U(x)$ и $V_j(x)$ соответственно (подобных разложению (4.4) для функции $z^q_{(4.2)}(x)$ с главным членом разложения $u(x)$).

Определим функцию $\widetilde{z}^{\,0}_V(x)$ на $\overline{D}$ соотношением

$$\widetilde{z}^{\,0}_V(x) = \widetilde{z}^{\,0}_{V_1}(x) + \widetilde{z}^{\,0}_{V_2}(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{6.10}$$

Функцию

$$\widetilde{z}_{u(6.11a)}(x) = U^{(imp)}_{(6.5)}(x) + \widetilde{z}^{\,0}_{V\,(6.10)}(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \textit{при условии} \quad (5.9) \tag{6.11a}$$

назовем решением разностной схемы $\{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}; (5.9)\}$ — схемы Ричардсона, аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.2), (2.1) при условии (5.9).

6.2. Пусть выполняется условие (5.8). В этом случае решаем разностную схему Ричардсона (4.2), (4.1); интерполянт

$$\widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{b})}(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \textit{при условии} \quad (5.8), \tag{6.11b}$$

строящийся по решению схемы (4.2), (4.1), назовем решением разностной схемы $\{(4.2), (4.1); (5.8)\}$, аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.2), (2.1) при условии (5.8).

6.3. Строим функцию $\widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$,

$$\widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{a,b})}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{a})}(x) & \textit{при условии} \ \ (5.9) \\ \widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{b})}(x) & \textit{при условии} \ \ (5.8) \end{array} \right\}, \quad x \in \overline{D},$$

которая аппроксимирует решение краевой задачи (2.2), (2.1). Эту функцию назовем континуальным решением разностной схемы Ричардсона высокого порядка точности $\{\{(4.2), (4.1)\}; \{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}\}\}$, — схемы Ричардсона метода декомпозиции сеточного решения, строящейся на основе улучшенной регулярной компоненты $U_{(5.2)}(x)$ или, короче, схемы Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности.

6.4. Оценим ошибку $u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$, предполагая выполненным условие теоремы 2, обеспечивающее включения $U,\, V \in C^6(\overline{D})$, $U_0 \in C^8(\overline{D})$, U_1, U_2, $v_U \in C^6(\overline{D})$, где $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $v_U(x)$ — компоненты из разложения (5.2), а также справедливость априорных оценок (5.6), (5.7).

При условии (5.9) с учетом априорных оценок компонент $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $v_U(x)$ и $V_j(x)$ (теорема 2), подобно выводу оценки (4.8), находим оценки для $U(x) - U^{(imp)}_{(6.5)}(x)$ и $V(x) - \widetilde{z}^{\,0}_{V\,(6.10)}(x)$. Из этих оценок получаем оценку $u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{a})}(x)$.

Оценивая $u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{b})}(x)$ при условии (5.8), используем оценку (4.8), где $\varepsilon > \varepsilon_0(N)$.

В результате для решения схемы Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности $\{\{(4.2), (4.1)\}; \{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}\}\}$ получается оценка

$$|u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{a,b})}(x)| \le M\, N^{-6} \min{}^6\, [\varepsilon^{-1}, \ln N], \quad x \in \overline{D}, \tag{6.12}$$

а также ε-равномерная оценка

$$|u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{a,b})}(x)| \le M\, N^{-6} \ln^6 N, \quad x \in \overline{D}. \tag{6.13}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть для компонент решения краевой задачи* (2.2), (2.1) *из представлений* (5.1a,c), (5.2) *выполняются оценки* (5.6), (5.7) *теоремы* 2 *при* $K = 8$. *Тогда решение схемы Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности* $\{\{(4.2), (4.1)\}; \{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}\}\}$ сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6} \ln^6 N\right)$. Для решения разностной схемы справедливы оценки (6.12), (6.13).

Следствием утверждений теорем 2 и 5 является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется условие Теоремы* 2. *Тогда решение схемы Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности* $\{\{(4.2), (4.1)\}; \{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}\}\}$ сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6} \ln^6 N\right)$. Для решения разностной схемы справедливы оценки (6.12), (6.13).

7. Выводы

1. Для задачи Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии построена *базовая разностная схема метода декомпозиции сеточного решения*, в которой регулярная и сингулярная компоненты решения краевой задачи аппроксимируются на равномерных сетках. Решение этой схемы сходится ε-равномерно *в равномерной норме* со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$ (см. оценку (5.18) и утверждение теоремы 4 в разд. 5).

2. Исходя из базовой схемы метода декомпозиции решения с использованием экстраполяции Ричардсона на основе трех вложенных сеток построена *схема Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности*, решение которой сходится ε-равномерно *в равномерной норме* со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$ (см. оценку (6.13) и утверждение теоремы 6 в разд. 6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. **Хемкер П.В., Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Декомпозиция метода Ричардсона высокого порядка точности для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Журн. вычисл. математки и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 328–336.
3. **Shishkina L.P.** The Richardson method of high-order accuracy in t for a semilinear singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation on a strip // Proc. of the internat. conf. on comput. math. (ICCM'2004). Part 2. Novosibirsk: ICM&MG Publisher, 2004. P. 927–931.
4. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Метод Ричардсона высокого порядка точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 7. С. 980–989.
5. **Shishkin G.I.** Robust novel high-order accurate numerical methods for Singularly perturbed convection-diffusion problems // Math. Modelling and Analysis. 2005. Vol. 10, № 4. P. 393–412.
6. **Шишкин Г.И.** Метод Ричардсона повышения точности решений сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с конвекцией // Изв. вузов. Сер. математическая. 2006. № 2. С. 57–71.
7. **Шишкин Г.И.** Схема Ричардсона для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии с разрывным начальным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1416–1436.
8. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Схема Ричардсона повышенного порядка точности для семилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 458–478.
9. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference methods for singular perturbation problems. Boca Raton: Chapman & HAll/CRC, 2009. 408 p. (Ser. Monographs & Surveys in Pure & Applied Math; vol. 140.)
10. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Улучшенная разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного (обыкновенного дифференциального) уравнения реакции-диффузии // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 255–271.
11. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.
12. **Allen D.N., Southwell R.V.** Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of viscous fluid past a fixed cylinder // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955. Vol. 8, № 2. P. 129–145.
13. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
14. **Miller J.J.H., O'Riordan E.** Necessity of fitted operators and Shishkin meshes for resolving thin layer phenomena // CWI Quarterly. 1997. Vol. 10, № 3&4. P. 207–213.
15. **Шишкин Г.И.** Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 7. С. 963–977.
16. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.

17. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992. 233 с.
18. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 632 с.

Шишкин Григорий Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Поступила 15.12.2014

Шишкина Лидия Павловна
ведущий математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Lida@convex.ru