ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.957+517.988+517.977.56

О КУСОЧНО ПОСТОЯННОЙ АППРОКСИМАЦИИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

А. В. Чернов

Статья посвящена задачам оптимального управления распределенными системами, представимыми функционально-операторным уравнением типа Гаммерштейна в банаховом пространстве, компактно вложенном в лебегово пространство. Рассматривается задача минимизации интегрального функционала на множестве пар "состояние — управление", удовлетворяющих управляемому уравнению указанного типа. Доказывается эквивалентность этой задачи задаче оптимизации, получаемой из исходной путем перехода к описанию управляемой системы с помощью функционально-операторного уравнения В.И.Сумина в лебеговом пространстве. Эта эквивалентная задача оптимизации называется в статье S-двойственной. Для S-двойственной задачи оптимизации исследуется кусочно постоянная аппроксимация по паре "состояние — управление". Для такого способа аппроксимации устанавливаются следующие результаты: 1) сходимость кусочно постоянных аппроксимаций по функционалу и по уравнению для S-двойственной задачи оптимизации; 2) существование глобального решения аппроксимирующей конечномерной задачи математического программирования; 3) сходимость по функционалу решений аппроксимирующей задачи оптимизации к решению исходной задачи. В качестве вспомогательного результата, представляющего самостоятельный интерес, доказывается теорема о тотальном (по всему множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна. В качестве примера сведения управляемой распределенной системы к указанному уравнению рассматривается задача Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения типа диффузии-реакции.

Ключевые слова: кусочно постоянная аппроксимация, оптимальное управление, уравнение типа Гаммерштейна, сходимость по функционалу, тотальное сохранение разрешимости, полулинейное стационарное уравнение диффузии-реакции.

A. V. Chernov. On piecewise constant approximation in distributed optimization problems.

The paper is devoted to optimal control problems for distributed parameter systems representable by functional operator equations of Hammerstein type in a Banach space compactly embedded in a Lebesgue space. The problem of minimizing an integral functional on a set of "state–control" pairs satisfying a control equation of the mentioned type is considered. We prove that this problem is equivalent to an optimization problem obtained from the original one by passing to a description of the control system in terms of V.I. Sumin's functional operator equation in a Lebesgue space. The equivalent optimization problem is called S-dual. For an S-dual optimization problem, we investigate a piecewise constant approximation for the "state–control" pair. For this approximation method, we state the following results: (1) convergence of piecewise constant approximations with respect to the functional and the equation for the S-dual optimization problem; (2) existence of a global solution of an approximating finite-dimensional mathematical programming problem; (3) convergence with respect to the functional of solutions of an approximating optimization problem to a solution of the original problem. As an auxiliary result of independent interest, we prove a theorem on the total (over the whole set of admissible controls) preservation of solvability for a control equation of Hammerstein type. The Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation of diffusion–reaction type is considered as an example of reducing a distributed parameter control system to such an equation.

Keywords: piecewise constant approximation, optimal control, equation of Hammerstein type, convergence by functional, total preservation of solvability, semilinear stationary diffusion–reaction equation.

Введение

При численном решении распределенных оптимизационных задач часто применяют ту или иную конечномерную аппроксимацию таких задач задачами математического программирования (см., например, [1, гл. 3, 4; 2; 3; 4, § 8.11; 5–8]). При этом можно выделить два основных подхода. Первый состоит в конечно-разностной аппроксимации всей управляемой системы и

[1]Работа поддержана финансово МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

по управлению, и по состоянию (см., например, [2;3;5;9]). Для таких аппроксимаций доказывалась сходимость в различных смыслах (по функционалу, по управлению, по норме сопряженных пространств и т. д.). Реализация такого подхода связана с определенными трудностями. Прежде всего, это большая размерность получаемых задач математического программирования. Кроме того, в нелинейном случае приходится учитывать на каждой итерации нелинейную систему ограничений большой размерности, которая получается в результате дискретизации из управляемой системы. Отметим, что в случае линейной управляемой системы соответствующая система ограничений в аппроксимирующей задаче тоже будет линейной, и при ее решении можно использовать эффективные методы линейной алгебры, позволяющие существенно снижать трудоемкость вычислений даже в условиях большой размерности (см., например, [10]). Второй подход заключается в той или иной аппроксимации только лишь управления в предположении, что состояние однозначно зависит от управления, и тем самым функционалы исходной оптимизационной задачи обращаются в обычные функции многих переменных — параметров дискретизации при ограничениях достаточно простого вида относительно этих переменных. Указанный подход известен как *техника параметризации управления* (см. краткий обзор в [11]). К этому подходу можно отнести известные своей эффективностью метод моментов и обобщенный метод моментов (см., например, [4, § 8.11; 1, гл. 3, 4]). К сожалению, в случае, когда единственность решения управляемой *начально-краевой задачи* (НКЗ) не доказана, техника параметризации управления неприменима. В связи с упомянутыми выше трудностями представляется актуальным поиск более эффективных способов аппроксимации. Насколько известно автору, предлагались, в частности, следующие идеи. Первая [12;13] состоит в использовании подвижных (управляемых) сеток, что позволяет ограничиваться не слишком мелким шагом дискретизации, а кроме того, решать задачи с варьируемой областью (подробнее об этом, включая соответствующую библиографию, см. в [13]). Существуют конкретные примеры [12; 14], свидетельствующие об эффективности этой идеи. Однако строгое исследование показывает, что, например, гладкость функций аппроксимирующей задачи удается обеспечить лишь при линейности правой части дифференциального уравнения по управляющей переменной [13]. Другая идея состоит в использовании сплайн-аппроксимации (иначе говоря, метода конечных элементов) для состояния и, скажем, кусочно постоянной аппроксимации для управления (см., например, [8]). Однако здесь приходится следить за непрерывностью стыковки отдельных участков сплайна и решать другие вопросы, относящиеся к сплайн-интерполяции (см., например, [15]). Упомянем, наконец, работу [16], где для сосредоточенной управляемой системы в линейно-квадратичном случае использовалась кусочно постоянная аппроксимация обратной связи по состоянию. Эта работа, хотя и относится к сосредоточенному случаю, приводит нас к следующему вопросу: нельзя ли представить состояние как результат действия некоторого сглаживающего оператора G на состояние z некоторой другой управляемой системы, каким-то образом связанной с исходной управляемой системой и такой, что для функции z кусочно постоянная аппроксимация совершенно естественна подобно тому, как она естественна для управления u в лебеговом пространстве? Такой подход позволил бы произвести кусочно постоянную аппроксимацию исходной управляемой системы по паре (z, u). При этом за счет эффекта сглаживания не было бы необходимости брать шаг дискретизации слишком мелким, не говоря уже о том, что не нужно было бы следить за соблюдением непрерывной стыковки, учитывать большую нелинейную систему ограничений на параметры и т. д. Чтобы более конкретно пояснить суть предлагаемого подхода, рассмотрим в качестве примера управляемую задачу Дирихле для полулинейного стационарного уравнения типа диффузии-реакции:

$$\mathcal{L}[x](t) \equiv -\mathrm{div}\,\big(A\nabla x\big) + bx = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad u \in \mathcal{D}; \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{0.1}$$

Здесь $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — заданная область, ограниченная и строго липшицевая (для этого достаточно выпуклости, см. [17, с. 30–31]), $n \geq 2$; $\mathcal{D} \equiv \big\{u \in L_r^s(\Pi)\colon u_i(t) \in [\alpha_i; \beta_i]$ для п.в. $t \in \Pi$, $i = \overline{1, s}\,\big\}$ — множество допустимых управлений, $r > 2$; $A = A(.) = \{a_{ij}(.)\}_{i,j=1}^n \in L_\infty^{n\times n}(\Pi)$ — матричная функция, при некотором $\sigma > 0$ удовлетворяющая условию: $A(t)\xi{\cdot}\xi \geq \sigma\,|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п.в.

$t \in \Pi$ ("$\cdot$" означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$); множество всех таких матричных функций будем обозначать $\mathcal{A}(\sigma)$; $b \in L_\infty(\Pi)$, $b \geq 0$. Что касается правой части $f(t, y, u) : \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, будем предполагать, что она измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по переменным $\{y; u\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s$ и такова, что $f\big(., y, u\big) \in L_2(\Pi)$ $\forall y \in L_q(\Pi)$, $u \in L_r^s(\Pi)$; $s \in \mathbb{N}$, $2 < q < 2n/(n-2)$.

Уравнение (0.1) известно как стационарное уравнение типа диффузии-реакции. Здесь для краткости изложения мы рассматриваем случай одного уравнения, однако все построения легко обобщаются на случай системы уравнений вида (0.1). Система стационарных уравнений диффузии-реакции имеет важное прикладное значение и потому является объектом пристального изучения (см., например, [18, § 2]), в том числе с позиций теории оптимального управления [19; 20]. Чтобы определить понятие решения задачи (0.1), рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t), \quad t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{0.2}$$

Решение задачи (0.2) естественно понимать в обобщенном смысле, а именно как функцию $x \in H_0^1(\Pi)$, удовлетворяющую для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$ интегральному тождеству

$$B[x, \omega] = \int\limits_\Pi z(t)\,\omega(t)\,dt; \quad B[x, \omega] \equiv \int\limits_\Pi \big[A\nabla x \cdot \nabla\omega + bx\omega\big]\,dt.$$

Пользуясь теоремой Лакса — Мильграма, можно показать (см. разд. 8), что для каждого $z \in L_2(\Pi)$ задача (0.2) имеет единственное решение; обозначим его $x = G[z]$. Тем самым, определен линейный оператор $G : L_2(\Pi) \to H_0^1(\Pi)$. Более того, этот оператор оказывается также и ограниченным. Соответственно, решение исходной задачи (0.1) можно понимать как решение функционально-операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$x = G\big[f(., x, u)\big], \quad x \in \mathcal{H}(\Pi) \equiv W_2^1(\Pi). \tag{0.3}$$

По теореме вложения Соболева пространство $\mathcal{H} = H^1(\Pi) = W_2^1(\Pi)$ вложено в $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$ ограниченно (т. е. $\exists\, C > 0\colon \|x\|_{L_q} \leq C\,\|x\|_{W_2^1}$ $\forall x \in W_2^1$) и, более того, компактно. Отсюда ясно, что данное нами определение решения корректно в силу условий на функцию f и того, что $H_0^1 \subset \mathcal{H}$. Фактически решение задачи (0.1) понимается в смысле интегрального тождества

$$B[x, \omega] = \int\limits_\Pi f\big(t, x(t), u(t)\big)\,\omega(t)\,dt \quad \forall \omega \in H_0^1(\Pi).$$

Будем считать теперь, что целью управления является минимизация интегрального функционала вида $J[x, u] = \int_\Pi F\big(t, x(t), u(t)\big)\,dt$ на множестве пар $(x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (0.3); функция F удовлетворяет такого же типа условиям, как функция f (с заменой L_2 на L_1). Соотнесем уравнению (0.3) уравнение типа предложенного В. И. Суминым для описания управляемых начально-краевых задач [21–23]:

$$z = f\big(., G[z], u\big), \quad z \in L_2(\Pi). \tag{0.4}$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала $I[z, u] = J\big[G[z], u\big]$ на парах $(z, u) \in L_2 \times \mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (0.4). Такую задачу минимизации мы называем S-двойственной по отношению к исходной. В данной статье, в частности, устанавливается эквивалентность исходной и S-двойственной задач оптимизации. В свою очередь, для S-двойственной задачи, в отличие от исходной задачи оптимизации, вполне естественной является кусочно постоянная аппроксимация по паре "состояние — управление" (z, u). Например, если считать, что конечномерные векторы ξ, η представляют параметры дискретизации, $z\{\xi\}$, $u\{\eta\}$ — кусочно постоянные аппроксимации функций z, u соответственно, то (с учетом релаксации с параметром $\delta > 0$)

в качестве аппроксимирующей задачи можно взять конечномерную задачу математического программирования $I\{\xi,\eta\} \equiv I[z\{\xi\}, u\{\eta\}] \to \min$ при ограничении

$$\Psi_1\{\xi,\eta\} \equiv \big\| z\{\xi\} - f\big(.,G[z\{\xi\}],u\{\eta\}\big)\big\|^2_{L_2} \le \delta.$$

Если же известно, что управляемая система $\forall\, u \in \mathcal{D}$ имеет решение $x = x[u]$, $\|x[u]\|_{W_2^1} \le \gamma$, то разумно добавить ограничение $\Psi_2\{\xi,\eta\} \equiv \big\|G\big[z\{\xi\}\big]\big\|^q_{L_q} \le (C\gamma+\delta)^q$. Таким образом, получаем задачу минимизации функции многих переменных всего лишь при двух ограничениях типа неравенства (помимо условий на параметры дискретизации). Если $(\overline{\xi};\overline{\eta})$ — приближенное решение аппроксимирующей задачи, то в качестве приближения к решению исходной задачи естественно взять $(\overline{x},\overline{u}) = (G[z\{\overline{\xi}\}], u\{\overline{\eta}\})$. Важно, что производные функций $I\{\xi,\eta\}$, $\Psi_1\{\xi,\eta\}$ и $\Psi_2\{\xi,\eta\}$ (при соответствующей гладкости функции f) по параметрам $\{\xi,\eta\}$ вычисляются тривиально. Здесь оператор G выступает в качестве сглаживающего оператора. Фактически $G[z]$ — это решение однородной НКЗ, связанной с линейным уравнением (см. (0.2)). Ясно, что решать такую задачу существенно проще, чем исходную нелинейную (0.1). При этом можно использовать, вообще говоря, любой подходящий метод, в частности такой эффективный, как метод конечных элементов, либо (при практической реализации) любой готовый математический пакет. Действительно, это всего лишь отдельная *линейная* подзадача, алгоритмически отделенная от аппроксимирующей задачи математического программирования.

Абстрагируясь от конкретной задачи (0.1), мы рассматриваем далее уравнение вида (0.3) с произвольным линейным ограниченным оператором G, действующим из лебегова пространства m-вектор-функций $\mathcal{Z}^m$ в банахово пространство ℓ-вектор-функций $\mathcal{H}^\ell$, предполагая, что $\mathcal{H}$ компактно вложено в лебегово пространство $\mathcal{X}$. При этом устанавливаются следующие результаты: 1) сходимость кусочно постоянных аппроксимаций по функционалу и по уравнению для S-двойственной задачи оптимизации; 2) существование глобального решения аппроксимирующей конечномерной задачи математического программирования; 3) сходимость по функционалу решений аппроксимирующей задачи оптимизации к решению исходной задачи. В качестве вспомогательного результата, представляющего самостоятельный интерес, доказывается теорема о тотальном (по всему множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна.

Если обратиться к задаче (0.1), достаточно в общих формулировках теорем считать, что $\ell = m = 1$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_2(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_r(\Pi)$; $x = G[z]$ — решение задачи (0.2).

Для удобства читателя приведем список нестандартных обозначений, используемых далее.

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$, $p, q, r \in [1,\infty)$ — заданные числа, $q \ge p$; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество; $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_r(\Pi)$;

$$\mathcal{D} \equiv \big\{u \in \mathcal{U}^s \colon u_i(t) \in [\alpha_i;\beta_i] \text{ для п.в. } t \in \Pi,\ i = \overline{1,s}\,\big\}$$

— множество допустимых управлений. Определим класс $\mathbb{F}(\ell,s,m;\mathcal{X},\mathcal{Z},\mathcal{U})$ всех функций вида $f(t,y,u)\colon \Pi\times\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, каждая из которых измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по переменным $\{y;u\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и такова, что $f\big(.,y,u\big) \in \mathcal{Z}^m$ $\forall y \in \mathcal{X}^\ell(\Pi)$, $u \in \mathcal{U}^s(\Pi)$.

Через $\mathcal{X}^+$ обозначаем конус неотрицательных функций в пространстве $\mathcal{X}$. Для векторов $a, b \in \mathbb{R}^\ell$, $a \le b$ (векторное неравенство понимаем покомпонентно), используем обозначение $[a;b] \equiv [a_1;b_1] \times \dots \times [a_\ell;b_\ell]$. Модуль вектора понимаем как сумму модулей компонент.

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Pi)$ — банахово пространство функций, измеримых на Π, компактно вложенное в $\mathcal{X}(\Pi)$ (т. е. ограниченные множества функций $x \in \mathcal{H}$ относительно компактны в $\mathcal{X}$). Следовательно, пространство $\mathcal{H}^\ell(\Pi)$ компактно вложено в $\mathcal{X}^\ell(\Pi)$. Для определенности будем считать, что константа $C > 0$ обеспечивает оценку $\|x\|_{\mathcal{X}^\ell} \le C\,\|x\|_{\mathcal{H}^\ell}$ $\forall x \in \mathcal{H}^\ell$.

Пусть $\kappa \in \mathbb{N}$ — заданное число, причем множество Π представлено в виде дизъюнктного объединения $\Pi = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\kappa} \Pi_j$. Такое представление будем обозначать π и называть *разбиением* *множества* П. Число $\varkappa$ будем обозначать $|\pi|$. Наибольший диаметр элементов разбиения будем называть *мелкостью разбиения* π и обозначать $\rho(\pi)$. Определим множество

$$\mathbb{V}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)\equiv\Big\{u\in L^s_\infty(\Pi):\,u_i(t)\equiv w_{ij}\in[\alpha_i;\beta_i],\,t\in\Pi_j,\,i=\overline{1,s},\,j=\overline{1,\varkappa}\Big\},\qquad(0.5)$$

понимая его как множество аппроксимаций управления. Положим $\mathbb{W}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ — множество $(s\,\varkappa)$-мерных векторов $w=\big\{w_{11},\ldots,w_{1\varkappa};\ldots;w_{s1},\ldots,w_{s\varkappa}\big\}$ со свойствами: $w_{ij}\in[\alpha_i;\beta_i]$, $i=\overline{1,s}$, $j=\overline{1,\varkappa}$. Формула (0.5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. Аппроксимацию $v\in\mathbb{V}$, отвечающую вектору $w\in\mathbb{W}$, обозначим $v\{w\}$.

1. Постановка задачи оптимизации

Будем рассматривать следующее функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна[2], являющееся удобной формой описания широкого класса управляемых распределенных систем (см. [25–28]), а также пример во введении (более подробно разобранный в разд. 8):

$$x(t)=\theta(t)+G\big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\big](t),\quad t\in\Pi,\quad x\in\mathcal{H}^\ell.\qquad(1.1)$$

Здесь $u\in\mathcal{D}$ — управление; $\theta\in\mathcal{H}^\ell$ — заданный элемент; $G:\mathcal{Z}^m\to\mathcal{H}^\ell$ — заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО); $f\in\mathbb{F}(\ell,s,m;\mathcal{X},\mathcal{Z},\mathcal{U})$ — заданная функция. Относительно ЛОО G предполагаем, что

G) ЛОО $G:\mathcal{Z}^m\to\mathcal{H}^\ell$ имеет положительную мажоранту[3] $G^\sharp:\mathcal{Z}\to\mathcal{H}$.

Относительно уравнения (1.1) предполагаем следующее.

H) Существует функция $\varphi(t,\xi):\Pi\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, измеримая по $t\in\Pi$, непрерывная и не убывающая по $\xi\in\mathbb{R}^+$ и такая, что имеет место оценка $\big|f\big(.,y(.),u(.)\big)\big|\le\varphi\big(.,|y(.)|\big)\in\mathcal{Z}$ $\forall y\in\mathcal{X}^\ell$, $u\in\mathcal{D}$, и кроме того, разрешимо *мажорантное уравнение*

$$x(t)=|\theta(t)|+G^\sharp\big[\varphi\big(.,x(.)\big)\big](t),\quad t\in\Pi,\quad x\in\mathcal{X}^+.\qquad(1.2)$$

Конструктивные достаточные условия разрешимости мажорантного уравнения получены в [26, §4]. Обозначим Ξ — множество всех пар $(x,u)\in\mathcal{H}^\ell\times\mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (1.1). Будем рассматривать целевой функционал вида

$$J[x,u]=\int\limits_\Pi F\big(t,x(t),u(t)\big)\,dt,\quad (x,u)\in\Xi,$$

где $F\in\mathbb{F}(\ell,s,1;\mathcal{X},\widehat{\mathcal{Z}},\mathcal{U})$; $\widehat{\mathcal{Z}}$ — лебегово пространство функций на П с индексом суммируемости из $[1;+\infty)$ и такое, что $\mathcal{X}\subset\widehat{\mathcal{Z}}$. Поставим задачу оптимизации

$$J[x,u]\to\min,\quad (x,u)\in\Xi.\qquad(1.3)$$

2. S-двойственная задача оптимизации

Следующее функционально-операторное уравнение[4] было введено ранее В. И. Суминым и исследовалось им в ряде работ с точки зрения таких вопросов, как устойчивость существования глобальных решений, обоснование сходимости численных методов оптимизации этого

[2]См., например, [24, гл. VI, п.19.2].

[3]То есть $G^\sharp:\mathcal{Z}\to\mathcal{H}$ — ЛОО, $G^\sharp[\mathcal{Z}^+]\subset\mathcal{H}^+$ и $\big|G[z]\big|\le G^\sharp\big[|z|\big]$ для всех $z\in\mathcal{Z}^m$.

[4]При $\theta=0$ и условии вольтерровости линейного ограниченного оператора G, входящего в правую часть и рассматриваемого как оператор $L^m_p(\Pi)\to L^\ell_q(\Pi)$, в связи с чем именовалось как *функциональное вольтеррово уравнение*.

уравнения, получение необходимых условий оптимальности в соответствующих задачах оптимального управления и т. д. (см., например, [21–23]).

$$z(t) = f\big(t, \theta(t) + G[z](t), u(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad z \in \mathcal{Z}^m. \tag{2.1}$$

Определим функционал $I[z,u] = J\big[\theta + G[z], u\big]$, $z \in \mathcal{Z}^m$, $u \in \mathcal{U}^s$. Обозначим Υ — множество всех пар $(z,u) \in \mathcal{Z}^m \times \mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (2.1). Задачу оптимизации

$$I[z,u] \to \min, \quad (z,u) \in \Upsilon, \tag{2.2}$$

назовем S-*двойственной* по отношению к задаче (1.3).

Двойственный характер задачи (2.2) по отношению к задаче (1.3) раскрывается в следующих утверждениях (их доказательства см. в разд. 4).

Теорема 1. *Пусть* $(x,u) \in \Xi$, $z = f(.,x,u)$. *Тогда* $(z,u) \in \Upsilon$.

Теорема 2. *Пусть* $(z,u) \in \Upsilon$, $x = \theta + G[z]$. *Тогда* $(x,u) \in \Xi$.

Теорема 3. *Пусть* $(\overline{x}, \overline{u}) \in \Xi$ *— решение задачи оптимизации* (1.3), *глобальное или локальное*; $\overline{z} = f(., \overline{x}, \overline{u})$. *Тогда* $(\overline{z}, \overline{u})$ *— решение задачи* (2.2), *соответственно глобальное или локальное.*

Теорема 4. *Пусть* $(\overline{z}, \overline{u}) \in \Upsilon$ *— решение задачи оптимизации* (2.2), *глобальное или локальное*; $\overline{x} = \theta + G[\overline{z}]$. *Тогда* $(\overline{x}, \overline{u})$ *— решение задачи* (1.3), *соответственно глобальное или локальное.*

З а м е ч а н и е 1. S-двойственная задача (2.2) существенно удобнее для аппроксимации, так как для уравнения (2.1) совершенно естественно оценивать невязку по норме лебегова пространства $\mathcal{Z}^m$. Поэтому кусочно постоянная аппроксимация для решений уравнения (2.1) естественна. Уравнение (1.1) при сделанных предположениях тоже можно рассматривать в лебеговом пространстве — пространстве $\mathcal{X}^\ell$, и для точных решений в этом нет проблемы. Однако оценивать невязку для уравнения (1.1) в норме пространства $\mathcal{X}^\ell$ было бы неестественно, поскольку из малости невязки в этой норме не следует малость невязки в пространстве $\mathcal{H}^\ell$.

3. Формулировка основных результатов

Следующее утверждение дает достаточные условия тотального сохранения разрешимости уравнения (1.1) (доказательство см. в разд. 5).

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения* **G**), **H**); $\overline{x} \in \mathcal{H}$ *— решение мажорантного уравнения* (1.2), $\overline{x} \geq 0$. *Тогда уравнение* (1.1) *для каждого управления* $u \in \mathcal{D}$ *имеет по крайней мере одно решение* $x \in \mathcal{H}^\ell$ *такое, что* $|x| \leq \overline{x}$, $\|x\|_{\mathcal{H}^\ell} \leq \gamma \equiv \|\theta\|_{\mathcal{H}^\ell} + \|G\|_{\mathcal{Z}^m \to \mathcal{H}^\ell} \|\varphi(., \overline{x})\|_{\mathcal{Z}}$.

Обозначим $\mathcal{H}^\ell_\gamma = \big\{x \in \mathcal{H}^\ell \colon \|x\|_{\mathcal{X}^\ell} \leq C\gamma\big\}$; $\Xi_\gamma \subset \Xi$ — множество всех пар $(x,u) \in \mathcal{H}^\ell_\gamma \times \mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (1.1).

Далее будем предполагать, что $J(x[k], u[k]) \to +\infty$ при $k \to \infty$ для любого выбора последовательности $\{(x[k], u[k])\} \subset \mathcal{H}^\ell \times \mathcal{D}$ такой, что $\|x[k]\|_{\mathcal{H}^\ell} \to \infty$ при $k \to \infty$. Очевидно, что в этом случае множество $\Xi(c,J) = \big\{(x,u) \in \Xi : \ J[x,u] \leq c\big\}$ будет ограничено для любого числа $c \in \mathbb{R}$. Пользуясь теоремой 5 (или любой другой теоремой, обеспечивающей существование хотя бы одной пары $(x,u) \in \Xi$), можно найти число $c \in \mathbb{R}$, при котором оно будет не пусто. Для такого числа c исходная задача оптимизации будет эквивалентна следующей:

$$J[x,u] \to \min, \quad (x,u) \in \Xi(c,J).$$

При этом в силу ограниченности множества $\Xi(c,J)$ найдется число $\gamma>0$ такое, что $\|x\|_{\mathcal{H}^\ell}\le\gamma$ для всех $(x,u)\in\Xi(c,J)$, т. е. $\Xi(c,J)\subset\Xi_\gamma$. С учетом сказанного далее вместо исходной задачи оптимизации будем рассматривать равносильную задачу

$$J[x,u]\to\min,\quad (x,u)\in\Xi_\gamma. \tag{3.1}$$

Абстрагируясь от проведенных рассуждений, будем считать, что выполнено условие

Г) Множество $\Xi_\gamma\ne\varnothing$.

Следующее утверждение устанавливает возможность кусочно постоянной аппроксимации с любой заданной точностью любой пары вида (z,u), где $z=f(.,x,u)$, (x,u) — произвольная пара, удовлетворяющая уравнению (1.1), по уравнению (2.1) и по функционалу. В этом смысле можно говорить о сходимости аппроксимаций. Более того, утверждается, что эта сходимость равномерна на классе пар указанного вида. Доказательство см. в разд. 6.

Теорема 6. *Для любого числа $\varepsilon>0$ существуют числа $\rho_\varepsilon,\lambda_\varepsilon>0$ и параллелепипед $[a;b]\subset\mathbb{R}^m$ такие, что, каковы бы ни были разбиения π и ϖ множества Π мелкостей соответственно $\rho(\pi)<\rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi)<\lambda_\varepsilon$, для любой пары $(x,u)\in\Xi_\gamma$ и соответствующего элемента $z=f(.,x,u)$ найдутся $\xi\in\mathbb{W}\big(\varpi,m,[a;b]\big)$, $\eta\in\mathbb{W}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие аппроксимации $z\{\xi\}\in\mathbb{V}\big(\varpi,m,[a;b]\big)$, $u\{\eta\}\in\mathbb{V}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ такие, что*

$$\big\|z\{\xi\}-f\big(.,\theta+G[z\{\xi\}],u\{\eta\}\big)\big\|_{\mathcal{Z}^m}<\varepsilon, \tag{3.2}$$

$$\big\|\theta+G\big[z\{\xi\}\big]\big\|_{\mathcal{X}^\ell}\le C\gamma+\varepsilon, \tag{3.3}$$

$$\big|I[z,u]-I[z\{\xi\},u\{\eta\}]\big|<\varepsilon. \tag{3.4}$$

З а м е ч а н и е 2. Как видно из доказательства теоремы 6 и формулировки леммы 4 (см. далее), в основе этого доказательства лежит возможность для всякого $\delta>0$ найти число $\lambda[\delta]>0$ и параллелепипед $[a;b]\subset\mathbb{R}^m$ такие, что при любом разбиении ϖ множества Π мелкости $\rho(\varpi)<\lambda[\delta]$ функцию z можно приблизить аппроксимацией $z\{\xi\}\in\mathbb{V}\big(\varpi,m,[a;b]\big)$ с точностью δ: $\|z-z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m}\le\delta$. Если же выполнены предположение **H**) и утверждение теоремы 5, то, как видно из доказательства леммы 4, в качестве такого параллелепипеда $[a;b]$ можно взять декартову степень $[a;b]=[\overline{a};\overline{b}]^m$, где $[\overline{a};\overline{b}]=\big\{\xi\in\mathbb{R}\colon|\xi|\le k_\delta\big\}$, число $k_\delta>0$ определяется из условия $\|\overline{z}-\overline{z}^{(k_\delta)}\|_{\mathcal{Z}}<\delta/2$, а $\overline{z}^{(k_\delta)}$ — это срезка $\big\{\overline{z}(t),\ \text{если } |z(t)|\le k_\delta; 0,\ \text{иначе}\big\}$. То, что такая срезка существует, видно из доказательства леммы 4.

Зафиксируем достаточно малое число $\delta>0$ — точность выполнения ограничений. В соответствии с теоремой 6 *аппроксимирующей задачей* для задачи (3.1) назовем следующую конечномерную задачу математического программирования:

$$I\{\xi,\eta\}\equiv I[z\{\xi\},u\{\eta\}]\to\min \tag{3.5}$$

при ограничениях $\xi\in\mathbb{V}\big(\varpi,m,[a;b]\big)$, $\eta\in\mathbb{V}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$,

$$\Phi_1\{\xi,\eta\}\equiv\big\|z\{\xi\}-f\big(.,\theta+G[z\{\xi\}],u\{\eta\}\big)\big\|^p_{\mathcal{Z}^m}\le\delta, \tag{3.6}$$

$$\Phi_2\{\xi,\eta\}\equiv\big\|\theta+G\big[z\{\xi\}\big]\big\|^q_{\mathcal{X}^\ell}\le(C\gamma+\delta)^q. \tag{3.7}$$

Теорема 7. *Пусть множество $\Xi\ne\varnothing$ и выполнено условие* **Г**). *Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существуют числа ρ_ε, $\lambda_\varepsilon>0$, $\sigma_\varepsilon>0$, а также параллелепипед $[a;b]\subset\mathbb{R}^m$ такие, что для любых разбиений π и ϖ множества Π мелкостей $\rho(\pi)<\rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi)<\lambda_\varepsilon$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Задача* (3.5)–(3.7) *имеет глобальное решение.*

2. *Пусть* $(\overline{\xi},\overline{\eta})$ — *приближенное глобальное решение задачи* (3.5)–(3.7) *с точностью* σ_ε *по функции;* $\overline{z}=z\{\overline{\xi}\}$, $\overline{u}=u\{\overline{\eta}\}$, $\overline{x}=\theta+G[\overline{z}]$. *Тогда* $(\overline{x},\overline{u})$ *есть приближенное глобальное решение задачи* (3.1) *с точностью* ε *по функционалу при точности* δ *выполнения ограничений в смысле*

$$\big\|\overline{x}-\theta-G\big[f(.,\overline{x},\overline{u})\big]\big\|_{\mathcal{H}^\ell}\le\|G\|\,\sqrt[p]{\delta}, \tag{3.8}$$

$$\|\overline{x}\|_{\mathcal{X}^\ell}\le C\gamma+\delta. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7 см. в разд. 7.

4. Доказательство теорем об S-двойственности

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $(x,u)\in\Xi$, т.е. (x,u) — решение уравнения (1.1). Тогда для $z=f(.,x,u)$ имеем $z=f\big(.,\theta+G[f(.,x,u)],u\big)=f\big(.,\theta+G[z],u\big)$, т.е. $(z,u)\in\Upsilon$. Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть $(z,u)\in\Upsilon$, т.е. (z,u) — решение уравнения (2.1). Тогда для $x=\theta+G[z]$ имеем $x=\theta+G\big[f(.,\theta+G[z],u)\big]=\theta+G\big[f(.,x,u)\big]$, т.е. $(x,u)\in\Xi$. Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. В соответствии с формулировкой теоремы рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $(\overline{x},\overline{u})\in\Xi$ — глобальное решение задачи (1.3), $\overline{z}=f(.,\overline{x},\overline{u})$. По теореме 1 $(\overline{z},\overline{u})\in\Upsilon$. Предположим от противного, что пара $(\overline{z},\overline{u})$ не является глобальным решением задачи (2.2). Это означает, что найдется пара $(\widetilde{z},\widetilde{u})\in\Upsilon$, обеспечивающая неравенство $I[\widetilde{z},\widetilde{u}]<I[\overline{z},\overline{u}]$.

Обозначим $\widetilde{x}=\theta+G[\widetilde{z}]$. По теореме 2 $(\widetilde{x},\widetilde{u})\in\Xi$. При этом

$$J[\widetilde{x},\widetilde{u}]=J\big[\theta+G[\widetilde{z}],\widetilde{u}\big]=I[\widetilde{z},\widetilde{u}]<I[\overline{z},\overline{u}]=J\big[\theta+G[\overline{z}],\overline{u}\big]=J\big[\theta+G\big[f(.,\overline{x},\overline{u})\big],\overline{u}\big]=J[\overline{x},\overline{u}].$$

Полученная оценка противоречит условию. Таким образом, наше предположение неверно.

2. Пусть $(\overline{x},\overline{u})\in\Xi$ — локальное решение задачи (1.3), $\overline{z}=f(.,\overline{x},\overline{u})$. Согласно теореме 1 $(\overline{z},\overline{u})\in\Upsilon$. Предположим от противного, что пара $(\overline{z},\overline{u})$ не является локальным решением задачи (2.2). Это означает, что найдется последовательность пар $(\widetilde{z}_k,\widetilde{u}_k)\in\Upsilon$,

$$\|\widetilde{z}_k-\overline{z}\|_{\mathcal{Z}^m}\to 0,\quad \|\widetilde{u}_k-\overline{u}\|_{\mathcal{U}^s}\to 0\quad\text{при}\quad k\to\infty,$$

обеспечивающих неравенство $I[\widetilde{z}_k,\widetilde{u}_k]<I[\overline{z},\overline{u}]$. Обозначим $\widetilde{x}_k=\theta+G[\widetilde{z}_k]$. По теореме 2 $(\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k)\in\Xi$. Учитывая, что пара $(\overline{x},\overline{u})$ является решением уравнения (1.1), можем записать $\|\widetilde{x}_k-\overline{x}\|_{\mathcal{H}^\ell}=\big\|\theta+G[\widetilde{z}_k]-\theta-G\big[f(.,\overline{x},\overline{u})\big]\big\|_{\mathcal{H}^\ell}=\big\|G\big[\widetilde{z}_k-\overline{z}\big]\big\|_{\mathcal{H}^\ell}$. Тогда в силу ограниченности оператора G $\|\widetilde{x}_k-\overline{x}\|_{\mathcal{H}^\ell}\to 0$ при $k\to\infty$. При этом аналогично предыдущему пункту устанавливается неравенство $J[\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k]<J[\overline{x},\overline{u}]$, которое противоречит локальной оптимальности пары $(\overline{x},\overline{u})$. Таким образом, наше предположение неверно. Теорема 3 доказана.

Для доказательства сохранения локальной оптимальности в теореме 4 нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть функция* $g(t,x):\Pi\times\mathbb{R}^\nu\to\mathbb{R}$ *такова, что* $g\big(.,x_1(.),\dots,x_\nu(.)\big)\in Z$ *для всех* $x_j\in X_j$, $j=\overline{1,\nu}$, *где* $X_j=X_j(\Pi)$, $j=\overline{1,\nu}$, $Z=Z(\Pi)$ — *лебеговы пространства с индексами суммируемости из* $[1;+\infty)$; $X=X_1\times\ldots\times X_\nu$. *Тогда оператор* $\mathcal{G}:X\to Z$, *определяемый формулой* $\mathcal{G}[x]=g\big(.,x(.)\big)$, *является непрерывным и ограниченным.*

Для $\nu=1$ лемма 1 доказана в [29, §I.2, теорема 2.1, с. 31; теорема 2.2, с. 35]. Ее справедливость для $\nu>1$ следует из анализа доказательств [29, там же].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. В соответствии с формулировкой теоремы рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $(\overline{z},\overline{u})\in\Upsilon$ – глобальное решение задачи (2.2), $\overline{x}=\theta+G[\overline{z}]$. Согласно теореме 2 $(\overline{x},\overline{u})\in\Xi$. Предположим от противного, что пара $(\overline{x},\overline{u})$ не является глобальным решением задачи (1.3). Это означает, что найдется пара $(\widetilde{x},\widetilde{u})\in\Xi$, обеспечивающая неравенство

$$J[\widetilde{x},\widetilde{u}]<J[\overline{x},\overline{u}]=J\big[\theta+G[\overline{z}],\overline{u}\big]=I[\overline{z},\overline{u}].$$

Обозначим $\widetilde{z}=f\big(.,\widetilde{x},\widetilde{u}\big)$. По теореме 1 $(\widetilde{z},\widetilde{u})\in\Upsilon$. При этом

$$J[\widetilde{x},\widetilde{u}]=J\big[\theta+G[f(.,\widetilde{x},\widetilde{u})],\widetilde{u}\big]=J\big[\theta+G[\widetilde{z}],\widetilde{u}\big]=I[\widetilde{z},\widetilde{u}].$$

Таким образом, $I[\widetilde{z},\widetilde{u}]<I[\overline{z},\overline{u}]$. Полученная оценка противоречит условию. Стало быть, наше предположение неверно.

2. Пусть $(\overline{z},\overline{u})\in\Upsilon$ — локальное решение задачи (2.2), $\overline{x}=\theta+G[\overline{z}]$. Согласно теореме 2 $(\overline{x},\overline{u})\in\Xi$. Предположим от противного, что пара $(\overline{x},\overline{u})$ не является локальным решением задачи (1.3). Это означает, что найдется последовательность пар $(\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k)\in\Xi$,

$$\|\widetilde{x}_k-\overline{x}\|_{\mathcal{X}^\ell}\le C\,\|\widetilde{x}_k-\overline{x}\|_{\mathcal{H}^\ell}\to 0,\quad \|\widetilde{u}_k-\overline{u}\|_{\mathcal{U}^s}\to 0\quad\text{при}\quad k\to\infty,$$

обеспечивающих неравенство $J[\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k]<J[\overline{x},\overline{u}]$.

Обозначим $\widetilde{z}_k=f\big(.,\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k\big)$. По теореме 1 $(\widetilde{z}_k,\widetilde{u}_k)\in\Upsilon$. Учитывая, что $(\overline{z},\overline{u})$ является решением уравнения (2.1), можем записать

$$\|\widetilde{z}_k-\overline{z}\|=\big\|f\big(.,\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k\big)-f\big(.,\theta+G[\overline{z}],\overline{u}\big)\big\|=\big\|f\big(.,\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k\big)-f\big(.,\overline{x},\overline{u}\big)\big\|,$$

где $\|\,.\,\|=\|\,.\,\|_{\mathcal{Z}^m}$. Тогда согласно лемме 1 $\|\widetilde{z}_k-\overline{z}\|_{\mathcal{Z}^m}\to 0$ при $k\to\infty$. При этом аналогично предыдущему пункту получаем неравенство $I[\widetilde{z}_k,\widetilde{u}_k]<I[\overline{z},\overline{u}]$, что противоречит локальной оптимальности пары $(\overline{z},\overline{u})$. Поэтому наше предположение неверно. Теорема 4 доказана.

5. Доказательство теоремы о тотальном сохранении разрешимости

Следующее утверждение известно как теорема Шаудера [30, гл. XVI, § 3, п. 3.3, с.627].

Лемма 2. *Пусть X — нормированное пространство, Ω — выпуклое замкнутое множество в нем, $F:\Omega\to\Omega$ — непрерывное отображение. Если множество $F(\Omega)$ относительно компактно в X, то отображение F имеет неподвижные точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5. Воспользуемся леммой 2. Зафиксируем произвольно $u\in\mathcal{D}$ и определим оператор $F_u:\mathcal{X}^\ell\to\mathcal{X}^\ell$ с помощью формулы $F_u[x]=\theta+G\big[f(.,x,u)\big]$, $x\in\mathcal{X}^\ell$. Отметим, что по лемме 1 оператор F_u непрерывен. Учитывая, что $\mathcal{H}^\ell\subset\mathcal{X}^\ell$, уравнение (1.1) равносильно следующему:

$$x=F_u[x],\quad x\in\mathcal{X}^\ell. \tag{5.1}$$

Определим множество $\Omega=\big\{x\in\mathcal{X}^\ell\colon |x|\le\overline{x}\big\}$. Множество Ω не пусто, поскольку решение мажорантного уравнения (1.2) неотрицательно: $\overline{x}\ge 0$, т. е. $0_{\mathcal{X}^\ell}\in\Omega$. Выпуклость и замкнутость множества Ω очевидны. Множество значений $F_u[\Omega]$ ограничено в $\mathcal{H}^\ell$:

$$\|F_u[x]\|_{\mathcal{H}^\ell}=\big\|\theta+G[f(.,x,u)]\big\|_{\mathcal{H}^\ell}\le\|\theta\|_{\mathcal{H}^\ell}+\|G\|_{\mathcal{Z}^m\to\mathcal{H}^\ell}\,\|f(.,x,u)\|_{\mathcal{Z}^m},$$

и по идеальности пространства $\mathcal{Z}$, условию **H**) и монотонности по ξ функции $\varphi(t,\xi)$ имеем

$$\|f(.,x,u)\|_{\mathcal{Z}^m}=\big\||f(.,x,u)|\big\|_{\mathcal{Z}}\le\|\varphi(.,|x|)\|_{\mathcal{Z}}\le\|\varphi(.,\overline{x})\|_{\mathcal{Z}}$$

для всех $x\in\Omega$. Тогда в силу компактности вложения $\mathcal{H}^\ell\subset\mathcal{X}^\ell$ множество $F_u[\Omega]$ относительно компактно в $\mathcal{X}^\ell$. Остается проверить, что оператор F_u не выводит из Ω. Зафиксируем произвольно $x\in\mathcal{X}^\ell$ и положим $z=f(.,x,u)$, $y=F_u[x]$. Согласно условиям **G**), **H**) ясно, что

$$|y|=\big|\theta+G[f(.,x,u)]\big|\le|\theta|+G^\sharp\big[|f(.,x,u)|\big]\le|\theta|+G^\sharp[\varphi(.,|x|)].$$

Используя определение множества Ω и монотонность функции $\varphi(t,\xi)$ по $\xi\ge 0$, а также условие **H**), получаем $\big|F_u[x]\big|=|y|\le|\theta|+G^\sharp[\varphi(.,\overline{x})]=\overline{x}$. Таким образом, $F_u:\Omega\to\Omega$ для всех $u\in\mathcal{D}$. Пользуясь леммой 2, заключаем, что оператор F_u имеет неподвижные точки на Ω, т. е. уравнение (5.1) имеет решение $x_u\in\Omega$ для всех $u\in\mathcal{D}$. Теорема 5 доказана.

6. Доказательство теоремы о равномерной сходимости аппроксимаций

Прежде всего, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Пусть элемент $u \in \mathcal{D}$ произвольно фиксирован. Тогда для любого числа $\delta > 0$ существует число $\rho[\delta] > 0$ такое, что, каково бы ни было разбиение π множества Π мелкости $\rho(\pi) < \rho[\delta]$, найдутся $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ и соответствующая ему аппроксимация $u\{\eta\} \in \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ такие, что $\big\|u - u\{\eta\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s} < \delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\widehat{u} = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. В соответствии с теоремой Н. Н. Лузина и с абсолютной непрерывностью интеграла Лебега существует компакт $\Pi_0 \subset \Pi$ такой, что $2\|\widehat{u}\|^r_{\mathcal{U}(\Pi\setminus\Pi_0)} < \delta/2$, и на Π_0 каждая из функций $u_i(t)$, $i = \overline{1,s}$, непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна. Таким образом, существует число $\rho[\delta] > 0$ такое, что

$$\max_{i=\overline{1,s}} \big|u_i(t) - u_i(\tau)\big|^r < \frac{\delta}{2s^r \operatorname{mes}\Pi} \quad \forall t, \tau \in \Pi_0, \quad |t - \tau| \le \rho[\delta].$$

Пусть разбиение π вида $\Pi = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\kappa} \Pi_j$ имеет мелкость $\rho(\pi) < \rho[\delta]$. Обозначим $Q_j = \overline{\Pi_0 \cap \Pi_j}$, $\eta_{ij} = \max\limits_{t\in Q_j} u_i(t)$, $i = \overline{1,s}$, $j = \overline{1,\kappa}$. Тогда вектор $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$, и по построению

$$\max_{t\in Q_j} |u_i(t) - \eta_{ij}|^r < \frac{\delta}{2s^r \operatorname{mes}\Pi}, \quad i = \overline{1,s}, \quad j = \overline{1,\kappa}.$$

Таким образом,

$$\big\|u - u\{\eta\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s} = \big\|u - u\{\eta\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s(\Pi\setminus\Pi_0)} + \big\|u - u\{\eta\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s(\Pi_0)}$$

$$\le 2\big\|\widehat{u}\big\|^r_{\mathcal{U}(\Pi\setminus\Pi_0)} + s^r \sum_{j=1}^{\kappa} \max_{t\in Q_j} \max_{i=\overline{1,s}} |u_i(t) - \eta_{ij}|^r \operatorname{mes} Q_j < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2\operatorname{mes}\Pi} \sum_{j=1}^{\kappa} \operatorname{mes} Q_j \le \delta.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть элемент $z \in \mathcal{Z}^m$ произвольно фиксирован. Тогда для любого числа $\delta > 0$ существуют число $\lambda[\delta] > 0$ и параллелепипед $[a;b] \subset \mathbb{R}^m$ такие, что, каково бы ни было разбиение ϖ множества Π мелкости $\rho(\varpi) < \lambda[\delta]$, найдутся $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$ и соответствующая ему аппроксимация $z\{\xi\} \in \mathbb{V}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$ такие, что $\|z - z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$z^{(k)}(t) = \begin{cases} z(t), & \text{если } |z(t)| \le k, \\ 0, & \text{если } |z(t)| > k, \end{cases} \qquad t \in \Pi.$$

Обозначим $Q_k = \big\{t \in \Pi\colon z(t) = z^{(k)}(t)\big\}$, $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что система множеств $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ упорядочена по вложению и при этом $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = \Pi$. Поэтому $\operatorname{mes}(\Pi \setminus Q_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\big\|z - z^{(k)}\big\|^p_{\mathcal{Z}^m} = \big\|z - z^{(k)}\big\|^p_{\mathcal{Z}^m(\Pi\setminus Q_k)} = \big\|z\big\|^p_{\mathcal{Z}^m(\Pi\setminus Q_k)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$ найдется номер $k_\delta \in \mathbb{N}$ такой, что $\big\|z - z^{(k)}\big\|^p_{\mathcal{Z}^m} < \delta/2$ $\forall k \ge k_\delta$. Считая число $\delta > 0$ произвольно фиксированным, выберем любой параллелепипед $[a;b] \subset \mathbb{R}^m$, содержащий множество $\big\{\xi \in \mathbb{R}^m\colon |\xi| \le k_\delta\big\}$. По построению функция $Z_\delta = z^{(k_\delta)}$ принимает все свои значения в $[a;b]$. Совершенно аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 3, устанавливается, что существует число $\lambda[\delta] > 0$ такое, что, каково бы ни было разбиение ϖ множества Π мелкости $\rho(\varpi) < \lambda[\delta]$, найдутся $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$ и соответствующая ему аппроксимация $z\{\xi\} \in \mathbb{V}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, обеспечивающие оценку $\|Z_\delta - z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \delta/2$. Таким образом,

$$\|z - z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \|z - Z_\delta\|^p_{\mathcal{Z}^m} + \|Z_\delta - z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. По лемме 1 множество $\mathcal{Q} = \big\{J[x,u] :\ (x,u) \in \Xi_\gamma\big\}$ ограничено, а следовательно, предкомпактно в пространстве $\mathbb{R}$. Стало быть, существует конечная $(\varepsilon/2)$-сеть $\mathcal{Q}_\varepsilon = \big\{q_j,\ j = \overline{1,M}\big\} \subset \mathcal{Q}$ для множества $\mathcal{Q}$ в пространстве $\mathbb{R}$. Тем самым, для каждого $j = \overline{1,M}$ найдется пара $(x^{(j)}, u^{(j)}) \in \Xi_\gamma$ такая, что $q_j = J[x^{(j)}, u^{(j)}]$. Обозначим $z^{(j)} = f\big(.,x^{(j)},u^{(j)}\big)$, $j = \overline{1,M}$. Заметим, что

$$q_j = J[x^{(j)}, u^{(j)}] = J\big[\theta + f\big(.,x^{(j)},u^{(j)}\big), u^{(j)}\big],$$

так как $(x^{(j)}, u^{(j)})$ является решением уравнения (1.1). Иначе говоря,

$$q_j = J\big[\theta + G[z^{(j)}], u^{(j)}\big] = I[z^{(j)}, u^{(j)}].$$

Кроме того, согласно определению множества Ξ_γ

$$\big\|\theta + G[z^{(j)}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} = \big\|\theta + G\big[f\big(.,x^{(j)},u^{(j)}\big)\big]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} = \big\|x^{(j)}\big\|_{\mathcal{X}^\ell} \le C\gamma.$$

Согласно лемме 1 оператор $\mathcal{N} : \mathcal{Z}^m \times \mathcal{U}^s \to \mathcal{Z}^m$, определяемый формулой

$$\mathcal{N}[z,u] = z - f\big(.,\theta + G[z], u\big), \quad z \in \mathcal{Z}^m, \quad u \in \mathcal{U}^s,$$

непрерывен. Непрерывны также и функционал $I[z,u] : \mathcal{Z}^m \times \mathcal{U}^s \to \mathbb{R}$, и оператор $G : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$. Поэтому найдется число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\big\|\mathcal{N}[z,w] - \mathcal{N}[z^{(j)},u^{(j)}]\big\|_{\mathcal{Z}^m} < \varepsilon, \quad \big|I[z,w] - I[z^{(j)},u^{(j)}]\big| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \big\|G[z] - G[z^{(j)}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} < \varepsilon$$

для всех $j = \overline{1,M}$ и $z \in \mathcal{Z}^m$, $w \in \mathcal{U}^s$, удовлетворяющих условиям

$$\|z - z^{(j)}\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \delta_\varepsilon, \quad \|w - u^{(j)}\|^r_{\mathcal{U}^s} \le \delta_\varepsilon.$$

Согласно леммам 3 и 4 существуют числа $\rho_\varepsilon = \rho[\delta_\varepsilon]$, $\lambda_\varepsilon = \lambda[\delta_\varepsilon]$ и параллелепипед $[a;b] \subset \mathbb{R}^m$ такие, что каковы бы ни были разбиения π и ϖ множества Π мелкостей $\rho(\pi) < \rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi) < \lambda_\varepsilon$ для $z^{(j)}$, $u^{(j)}$ найдутся $\xi^{(j)} \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta^{(j)} \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие аппроксимации $z\{\xi^{(j)}\} \in \mathbb{V}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $u\{\eta^{(j)}\} \in \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ такие, что

$$\big\|z^{(j)} - z\{\xi^{(j)}\}\big\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \delta_\varepsilon, \quad \big\|u^{(j)} - u\{\eta^{(j)}\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s} \le \delta_\varepsilon, \quad j = \overline{1,M}.$$

Возьмем любую пару $(x,u) \in \Xi_\gamma$. Найдем индекс $j \in \overline{1,M}$ такой, что $\big|J[x,u] - J[x^{(j)},u^{(j)}]\big| < \varepsilon/2$. Обозначим $z = f(.,x,u)$. Так как (x,u) есть решение уравнения (1.1), можем записать

$$I[z,u] = J\big[\theta + G[z], u\big] = J\big[\theta + G\big[f(.,x,u)\big], u\big] = J[x,u].$$

Таким образом, $\big|I[z,u] - I[z^{(j)},u^{(j)}]\big| = \big|J[x,u] - J[x^{(j)},u^{(j)}]\big| < \varepsilon/2$.

Заметим, что в силу теоремы 1 $\mathcal{N}[z^{(j)},u^{(j)}] = 0$, так как $(x^{(j)},u^{(j)}) \in \Xi_\gamma \subset \Xi$. С учетом этого рассмотрим

$$\big\|\mathcal{N}[z\{\xi^{(j)}\}, u\{\eta^{(j)}\}]\big\|_{\mathcal{Z}^m} = \big\|\mathcal{N}[z\{\xi^{(j)}\}, u\{\eta^{(j)}\}] - \mathcal{N}[z^{(j)},u^{(j)}]\big\|_{\mathcal{Z}^m} < \varepsilon.$$

Это означает, что выполнено (3.2). При этом

$$\big\|\theta + G[z\{\xi^{(j)}\}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} = \big\|\theta + G[z^{(j)}] + G[z\{\xi^{(j)}\}] - G[z^{(j)}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell}$$

$$\le \big\|\theta + G[z^{(j)}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} + \big\|G\big[z\{\xi^{(j)}\} - z^{(j)}\big]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} \le C\gamma + \varepsilon,$$

т. е. выполняется (3.3). Кроме того,

$$\big|I[z,u] - I[z\{\xi^{(j)}\}, u\{\eta^{(j)}\}]\big| \le \big|I[z,u] - I[z^{(j)}, u^{(j)}]\big| + \big|I[z^{(j)}, u^{(j)}] - I[z\{\xi^{(j)}\}, u\{\eta^{(j)}\}]\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. выполняется (3.4). Теорема 6 доказана.

7. Доказательство теоремы о сходимости решения аппроксимирующей задачи к решению исходной задачи

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. Поскольку $\Xi \ne \varnothing$ и выполнено условие $\mathbf{\Gamma}$), то ясно, что $\Xi_\gamma \ne \varnothing$. Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$. Из теоремы 6 следует, что существуют числа $\rho_\varepsilon, \lambda_\varepsilon > 0$ и параллелепипед $[a;b] \subset \mathbb{R}^m$ такие, что для любых разбиений π и ϖ множества Π мелкостей $\rho(\pi) < \rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi) < \lambda_\varepsilon$ любой пары $(x,u) \in \Xi_\gamma$ и соответствующего $z = f(.,x,u)$ найдутся векторы $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие им аппроксимации $z\{\xi\} \in \mathbb{V}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $u\{\eta\} \in \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ такие, что $\big|I[z,u] - I[z\{\xi\}, u\{\eta\}]\big| < \varepsilon/2$,

$$\big\|z\{\xi\} - f\big(.,\theta + G[z\{\xi\}], u\{\eta\}\big)\big\|^p_{\mathcal{Z}^m} < \delta, \quad \big\|\theta + G[z\{\xi\}]\big\|^q_{\mathcal{X}^\ell} \le (C\gamma + \delta)^q.$$

Отсюда ясно, что допустимое множество в задаче (3.5)–(3.7) не пусто. Согласно лемме 1 функционал $I[z,u]$ непрерывен по $(z,u) \in \mathcal{Z}^m \times \mathcal{U}^s$. И очевидно, что зависимость аппроксимаций $z\{\xi\}$, $u\{\eta\}$ от векторов $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ соответственно в метриках пространств $\mathcal{Z}^m$ и $\mathcal{U}^s$ непрерывна, причем множества $\mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$ и $\mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ являются компактами. Отсюда и из теоремы Вейерштрасса получаем, что справедливо утверждение 1.

Докажем утверждение 2. Пусть теперь $(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ — приближенное глобальное решение задачи (3.5)–(3.7) с точностью $\sigma_\varepsilon = \varepsilon/2$ по функции; $\overline{z} = z\{\overline{\xi}\}$, $\overline{u} = u\{\overline{\eta}\}$, $\overline{x} = \theta + G[\overline{z}]$.

Это означает, во-первых, что при $\xi = \overline{\xi}$, $\eta = \overline{\eta}$ выполнено (3.6), откуда

$$\big\|\overline{x} - \theta - G\big[f(.,\overline{x},\overline{u}]\big\|_{\mathcal{H}^\ell} = \big\|G\big[\overline{z} - f(.,\overline{x},\overline{u}]\big\|_{\mathcal{H}^\ell} = \big\|G\big[\overline{z} - f(.,\theta + G[\overline{z}],\overline{u}]\big\|_{\mathcal{H}^\ell} \le \|G\| \sqrt[p]{\delta},$$

т. е. выполнено (3.8). Во-вторых, при $\xi = \overline{\xi}$, $\eta = \overline{\eta}$ выполнено (3.7), откуда

$$\|\overline{x}\|_{\mathcal{X}^\ell} = \big\|\theta + G[\overline{z}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} \le C\,\gamma + \delta,$$

т. е. выполнено соотношение (3.9). И, в-третьих, $I[z\{\xi\}, u\{\eta\}] - I[\overline{z}, \overline{u}] \ge -\varepsilon/2$ для всех векторов $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$, удовлетворяющих условиям (3.6), (3.7). Выберем теперь произвольно пару $(x,u) \in \Xi_\gamma$ и обозначим $z = f(.,x,u)$. Как уже было сказано, найдутся векторы $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие им аппроксимации $z\{\xi\} \in \mathbb{V}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $u\{\eta\} \in \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$, удовлетворяющие (3.6), (3.7) и такие, что имеет место неравенство $\big|I[z,u] - I[z\{\xi\}, u\{\eta\}]\big| < \varepsilon/2$. Таким образом,

$$J[x,u] - J[\overline{x},\overline{u}] = J\big[\theta + G\big[f(.,x,u)\big], u\big] - J\big[\theta + G[\overline{z}], \overline{u}\big]$$

$$= J\big[\theta + G[z], u\big] - J\big[\theta + G[\overline{z}], \overline{u}\big] = I[z,u] - I[\overline{z},\overline{u}]$$

$$= I[z,u] - I[z\{\xi\}, u\{\eta\}] + I[z\{\xi\}, u\{\eta\}] - I[\overline{z},\overline{u}] \ge -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon.$$

Теорема 7 доказана.

8. Пример: задача Дирихле для стационарного уравнения типа диффузии-реакции

Обратимся к задаче (0.1), обсуждавшейся во введении. Чтобы строго обосновать необходимые нам свойства оператора $G[z]$, прежде всего вспомним *неравенство Пуанкаре — Фридрихса*: существует константа $R_\Pi = R(\mathrm{mes}\,\Pi)^{1/n}$, где $R>0$ зависит лишь от n, такая, что для любой функции $x\in H_0^1(\Pi)$ справедлива оценка $\|x\|_{L_2(\Pi)}\le R_\Pi\|\nabla x\|_{L_2^n(\Pi)}$. Пользуясь этим неравенством, нетрудно сконструировать положительную константу μ такую, что

$$\|\nabla x\|_{L_2^n(\Pi)}\ge\sqrt{\mu}\,\|x\|_{W_2^1(\Pi)}\quad\forall\, x\in H_0^1(\Pi). \tag{8.1}$$

Однако сделать это можно разными способами. Далее для простоты изложения эту константу $\mu>0$ будем считать заданной. Сведем задачу (0.1) к уравнению вида (1.1) и проверим выполнение предположений, сделанных нами относительно этого уравнения. Для этого нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений. Первое из них известно как теорема вложения Соболева — Кондрашова (см., например, [17, гл. II, теорема 2.2]).

Лемма 5. *Для всех ограниченных строго липшицевых областей $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ (а также конечных сумм таких областей) ограниченные множества функций $x\in W_p^1(\Pi)$ относительно компактны*[5] *в $L_q(\Pi)$ для всех $q<pn/(n-p)$ при $p\le n$.*

Следующее утверждение — это теорема Лакса — Мильграма [31, § 5.8, теорема 5.8, с.84].

Лемма 6. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство; $B: H\times H\to\mathbb{R}$ — билинейная форма, которая является ограниченной и коэрцитивной, т. е. существуют константы γ_1, $\gamma_2>0$ такие, что $\big|B[x,y]\big|\le\gamma_2\|x\|\,\|y\|$, $B(x,x)\ge\gamma_1\|x\|^2$ $\forall x,y\in H$. Тогда для любого $\psi\in H^*$ существует единственный элемент $x\in H$ такой, что $B[x,.]=\psi$.*

Следующее утверждение известно как *принцип максимума* для эллиптических уравнений (см., например, [32, гл. 2, теорема 4.1], а также [31, теорема 8.1]).

Лемма 7. *Для любых $A\in\mathcal{A}(\sigma)$ и $b\in L_\infty^+(\Pi)$ при условии, что $B[x,\omega]\ge 0$ $\forall\omega\in\mathbf{C}_0^1(\Pi)$, $\omega\ge 0$, имеем $\inf\limits_{\Pi}x\ge\inf\limits_{\partial\Pi}x^-$, где $x^-=\min\{x,0\}$.*

Лемма 8. *Для любых $A\in\mathcal{A}(\sigma)$, $b\in L_\infty^+(\Pi)$, $z\in L_2^+(\Pi)$ всякое обобщенное решение задачи* (0.2) *неотрицательно*: $x\ge 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $x\in H_0^1(\Pi)$ — обобщенное решение задачи (0.2). Это означает, что

$$B[x,\omega]=\int\limits_\Pi z(t)\omega(t)\,dt$$

для всех $\omega\in H_0^1(\Pi)$. Для любого $\omega\in\mathbf{C}_0^1(\Pi)$, $\omega\ge 0$, отсюда, в частности, получаем $B[x,\omega]\ge 0$. После этого остается воспользоваться леммой 7. Лемма доказана.

Теперь для произвольно фиксированного $z\in\mathcal{Z}=L_2(\Pi)$ рассмотрим вспомогательную задачу (0.2). Так же, как и раньше, элемент $x\in H_0^1(\Pi)$ называем обобщенным решением задачи (0.2), если и только если для каждого $\omega\in H_0^1(\Pi)$ выполняется тождество

$$B[x,\omega]=\int\limits_\Pi z(t)\omega(t)\,dt.$$

[5] В [17, гл. II, теорема 2.2] речь идет о компактности. Однако там используется устаревшая терминология: на самом деле имеется в виду относительная секвенциальная компактность, а она в случае метрического пространства равносильна относительной компактности (см. [30, § I.5, следствие 2 теоремы 2, с. 45]).

На пространстве $H_0^1(\Pi)$ с помощью формулы $\psi[\omega]=\displaystyle\int_\Pi z(t)\omega(t)\,dt$ определим линейный непрерывный функционал $\psi\in H^*$, $H=H_0^1(\Pi)$. Пользуясь определением класса $\mathcal{A}(\sigma)$, а также неравенствами Коши — Буняковского и Гельдера, нетрудно показать, что билинейная форма $B[x,y]$ является ограниченной. Пользуясь определением класса $\mathcal{A}(\sigma)$, неотрицательностью функции $b\in L_\infty^+(\Pi)$ и неравенством (8.1) для произвольного $x\in H$ можем оценить

$$B[x,x]=\int_\Pi\big[A\nabla x\cdot\nabla x+bx^2\big]\,dt\geq\sigma\|\nabla x\|^2_{L_2^n}\geq\sigma_1\|x\|^2_{W_2^1},\quad \sigma_1=\sigma\mu.$$

Это означает, что билинейная форма $B[x,y]$ коэрцитивна. Таким образом, согласно теореме Лакса — Мильграма (лемме 6) при данном (произвольно фиксированном) $z\in L_2(\Pi)$ существует единственное решение $x\in H_0^1(\Pi)$, которое мы обозначим $G[z]$. Тем самым определен оператор $G:L_2(\Pi)\to H_0^1(\Pi)\subset\mathcal{H}(\Pi)$. Ясно, что это линейный оператор. Кроме того, он является также и ограниченным. Действительно по доказанному имеем

$$\sigma_1\big\|G[z]\big\|^2_{W_2^1}\leq B\big[G[z],G[z]\big]\leq\int_\Pi|z(t)|\,|G[z](t)|\,dt\leq\|z\|_{L_2}\,\|G[z]\|_{L_2}\leq\|z\|_{L_2}\,\|G[z]\|_{W_2^1},$$

откуда $\big\|G[z]\big\|_{W_2^1}\leq\sigma_1^{-1}\,\|z\|_{L_2}$. При этом задача (0.1) становится равносильной уравнению (0.3) вида (1.1). Кроме того, в соответствии с леммой 5 имеет место компактное вложение $\mathcal{H}\subset\mathcal{X}$.

Согласно лемме 8 оператор G является положительным в смысле $G[z_1]\leq G[z_2]$ для всех z_1, $z_2\in L_2(\Pi)$, $z_1\leq z_2$. Таким образом, в качестве мажоранты $G^\sharp$ можно взять $G^\sharp=G$, и условие **G**) выполняется. Мажорантное уравнение (1.2) из условия **H**) равносильно задаче

$$\mathcal{L}[x](t)=\varphi\big(t,x(t)\big),\quad t\in\Pi,\quad x\Big|_{\partial\Pi}=0;\quad x\in H_0^1(\Pi),\quad x\geq 0. \tag{8.2}$$

Условие **H**) можно понимать как условие относительно функции f и считать выполненным. Тем самым в соответствии с теоремой 1 будет выполнено и условие **Г**). Таким образом, все предположения выполняются. Следовательно, справедливы утверждения теорем 5–7 при $\ell=m=1$, $\mathcal{X}=L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z}=L_2(\Pi)$, $\mathcal{U}=L_r(\Pi)$; $\theta=0$; при $G[z]$, понимаемом как решение задачи (0.2); $G^\sharp=G$ и при заменах (1.1) $\to$ (0.3) или (0.1) (что одно и то же), (2.1) $\to$ (0.4).

А именно, имеют место следующие утверждения.

Теорема 8. *Пусть существует функция $\varphi(t,\xi):\Pi\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, измеримая по $t\in\Pi$, непрерывная и не убывающая по $\xi\in\mathbb{R}^+$ и такая, что $\big|f\big(.,y(.),u(.)\big)\big|\leq\varphi\big(.,|y(.)|\big)\in L_2(\Pi)$ для всех $y\in L_q(\Pi)$, $u\in\mathcal{D}$, и, кроме того, мажорантная задача* (8.2) *имеет решение $x=\widehat{x}$. Тогда при некотором $\gamma>0$ задача* (0.1) *для каждого управления $u\in\mathcal{D}$ имеет по крайней мере одно решение $x\in H_0^1(\Pi)$ такое, что $|x|\leq\widehat{x}$, $\|x\|_{W_2^1}\leq\gamma$.*

Обозначим $\mathcal{P}_\gamma$ — множество всех пар $(x,u)\in H_0^1(\Pi)\times\mathcal{D}$, удовлетворяющих системе (0.1) и таких, что $\|x\|_{W_2^1}\leq\gamma$.

Теорема 9. *Для любого числа $\varepsilon>0$ существуют числа $\rho_\varepsilon,\lambda_\varepsilon>0$ и отрезок $[a;b]\subset\mathbb{R}$ такие, что, каковы бы ни были разбиения π и ϖ множества Π мелкостей соответственно $\rho(\pi)<\rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi)<\lambda_\varepsilon$, для любой пары $(x,u)\in\mathcal{P}_\gamma$ и соответствующего элемента $z=f(.,x,u)$ найдутся векторы $\xi\in\mathbb{W}\big(\varpi,1,[a;b]\big)$, $\eta\in\mathbb{W}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие им аппроксимации $z\{\xi\}\in\mathbb{V}\big(\varpi,1,[a;b]\big)$, $u\{\eta\}\in\mathbb{V}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ такие, что*

$$\big\|z\{\xi\}-f\big(.,G[z\{\xi\}],u\{\eta\}\big)\big\|_{L_2}<\varepsilon,\qquad\big\|G\big[z\{\xi\}\big]\big\|_{L_q}\leq C\gamma+\varepsilon,\qquad\big|I[z,u]-I[z\{\xi\},u\{\eta\}]\big|<\varepsilon,$$

где $G[z]$ понимается как решение задачи (0.2).

Для заданного $\delta > 0$ (точности выполнения ограничений) аппроксимирующая задача оптимизации ставится следующим образом (см. введение):

$$I\{\xi,\eta\} \to \min,\ \ \xi \in \mathbb{V}\big(\varpi, 1, [a;b]\big),\ \ \eta \in \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big),\ \ \Psi_1\{\xi,\eta\} \le \delta,\ \ \Psi_2\{\xi,\eta\} \le (C\gamma+\delta)^q. \quad (8.3)$$

Теорема 10. *Пусть выполнены предположения теоремы* 8. *Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* ρ_ε, $\lambda_\varepsilon > 0$, $\sigma_\varepsilon > 0$, *а также отрезок* $[a;b] \subset \mathbb{R}$ *такие, что для любых разбиений* π *и* ϖ *множества* Π *мелкостей* $\rho(\pi) < \rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi) < \lambda_\varepsilon$ *справедливы следующие утверждения:* 1) *задача* (8.3) *имеет глобальное решение*; 2) *пусть* $(\overline{\xi},\overline{\eta})$ — *приближенное глобальное решение задачи* (8.3) *с точностью* σ_ε *по функции*; $\overline{z} = z\{\overline{\xi}\}$, $\overline{u} = u\{\overline{\eta}\}$, $\overline{x} = G[\overline{z}]$. *Тогда* $(\overline{x},\overline{u})$ *есть приближенное глобальное решение задачи* $J[x,u] \to \min$, $(x,u) \in \mathcal{P}_\gamma$, *с точностью* ε *по функционалу при точности* δ *выполнения ограничений в смысле*

$$\big\|\overline{x} - G\big[f(.,\overline{x},\overline{u})\big]\big\|_{W_2^1} \le \|G\|\ \sqrt[p]{\delta}, \quad \|\overline{x}\|_{L_q} \le C\gamma + \delta,$$

где $G[z]$ *понимается как решение задачи* (0.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М.** Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1989. 142 с.
2. **Потапов М.М., Разгулин А.В.** Разностные методы в задачах оптимального управления стационарным самовоздействием световых пучков // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 8. С. 1157–1169.
3. **Ишмухаметов А.З.** Условия устойчивости и аппроксимации в задачах оптимального управления гиперболическими системами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 1. С. 12–28.
4. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
5. **Потапов М.М.** Разностная аппроксимация задач дирихле-наблюдения слабых решений волнового уравнения с краевыми условиями III рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 8. С. 1323–1339.
6. **Tröltzsch F.** Semidiscrete Ritz–Galerkin approximations of nonlinear parabolic boundary control problems — strong convergence of optimal controls // Appl. Math. Optimization. 1994. Vol. 29, no. 3. P. 309–329.
7. **Chryssovergchi I.** Mixed discretization-optimization methods for relaxed optimal control of nonlinear parabolic systems // Proc. of the 6th WSEAS International Conf. on Simulation, Modelling and Optimization. Lisbon, 2006. P. 41–47.
8. **Fu H.** A characteristic finite element method for optimal control problems governed by convection-diffusion equations // J. Comput. Appl. Math. 2010. Vol. 235, no. 3. P. 825–836.
9. **Цепелев И.А.** Аппроксимация негладких решений ретроспективной задачи для модели конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 281–290.
10. **Исаев В.И., Шапеев В.П.** Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 41–60.
11. **Чернов А.В.** О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 12. С. 2029–2043.
12. **Golubev Yu.F., Seregin I.A., Khayrullin R.Z.** The floating nodes method // Sov. J. Comput. Syst. Sci. 1992. Vol. 30, no. 2. P. 71–76.
13. **Чернов А.В.** О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса — Дарбу на варьируемой области // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 305–321.
14. **Чернов А.В.** О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 6(1). С. 107–114.
15. **Волков Ю.С., Субботин Ю.Н.** 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.
16. **Su Laiping, Abe Kenichi.** Optimal control for linear periodic systems by using multirate piecewise constant sampled state feedback // Int. J. Syst. Sci. 1993. Vol. 24, no. 2. P. 355–371.

17. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
18. **Воробьев А.Х.** Диффузионные задачи в химической кинетике. М.: Изд-во МГУ, 2003. 98 с.
19. **Tröltzsch F.** Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications. Providence: American mathematical society, 2010. 399 p. (Graduate Studies in Mathematics; vol. 112.)
20. **Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.** Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 1. С. 20–46.
21. **Сумин В.И.** Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1056–1059.
22. **Сумин В.И.** Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 1. С. 3–21.
23. **Сумин В.И.** Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. I. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 1992. 110 с.
24. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
25. **Чернов А.В.** Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
26. **Чернов А.В.** О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
27. **Чернов А.В.** О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1400–1414.
28. **Чернов А.В.** Об управляемости нелинейных распределенных систем на множестве конечномерных аппроксимаций управления // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 83–98.
29. **Красносельский М.А.** Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956. 392 с.
30. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
31. **Гилбарг Д., Трудингер Н.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
32. **Карчевский М.М., Павлова М.Ф.** Уравнения математической физики. Дополнительные главы. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2012. 228 с.

Чернов Андрей Владимирович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Нижегородский государственный университет
Нижегородский государственный технический университет
e-mail: chavnn@mail.ru

Поступила 25.06.2014