ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ π-ЗАМКНУТЫ. I [1]

В. А. Белоногов

Изучаются конечные простые неабелевы группы G, которые при некотором множестве простых чисел π имеют лишь π-замкнутые максимальные подгруппы, хотя сами не являются π-замкнутыми (свойство $(*)$ для (G,π)). В статье найден некоторый список $\mathcal{L}$ конечных простых групп, в котором содержится любая группа G с указанным выше свойством (для некоторого π), и доказывается, что $2\notin\pi$ для любой пары (G,π) с этим свойством (теорема 1). Кроме того, для каждой спорадической простой группы G из $\mathcal{L}$ указаны все множества π простых чисел такие, что пара (G,π) имеет свойство $(*)$ (теорема 2). Доказательство использует результаты автора о контроле простого спектра конечных простых групп.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, π-замкнутая группа, максимальная подгруппа, контроль простого спектра группы.

V. A. Belonogov. Finite simple groups in which all maximal subgroups are π-closed. I.

Finite simple nonabelian groups G that are not π-closed for some set of primes π but have π-closed maximal subgroups (property $(*)$ for (G,π)) are studied. We give a list $\mathcal{L}$ of finite simple groups that contains any group G with the above property (for some π). It is proved that $2\notin\pi$ for any pair (G,π) with property $(*)$ (Theorem 1). In addition, we specify for any sporadic simple group G from $\mathcal{L}$ all sets of primes π such that the pair (G,π) has property $(*)$ (Theorem 2). The proof uses the author's results on the control of prime spectra of finite simple groups.

Keywords: finite group, simple group, π-closed group, maximal subgroup, control of prime spectrum of a group.

Введение

Одно из важных направлений в развитии теории конечных групп составляют исследования групп G, все собственные подгруппы которых обладают некоторым теоретико-групповым свойством Σ, в то время как сама группа G свойством Σ не обладает. Такие группы G называют *минимальными не* Σ*-группами*. Начало этому направлению положила работа Г. Миллера и Х. Морено 1903 г. [1], в которой было определено строение конечных минимальных не абелевых групп. Эти группы называются *группами Миллера — Морено*. Второй очень важный шаг в этом направлении был сделан О. Ю. Шмидтом в работе 1924 г. [2], где получено описание конечных минимальных не нильпотентных групп. Такие группы называются в настоящее время *группами Шмидта*. Ещё можно упомянуть работы Б. Хупперта [3], К. Дёрка [4], А. И. Старостина [5], Л. А. Шеметкова [6, гл. VI] и многие другие.

Пусть π — произвольное множество простых чисел. Очень широкими обобщениями понятия нильпотентной группы являются понятие π*-разложимой* (или (π,π')-разложимой) группы, т. е. группы, являющейся прямым произведением π-группы и π'-группы, и понятие π*-замкнутой* группы, т. е. группы, имеющей нормальную π-холлову подгруппу. Из [7, теорема 1] и [8, теорема] следует описание конечных не π-разложимых групп, все собственные подгруппы которых π-разложимы. Оказалось, что множество всех таких групп совпадает с множеством всех групп Шмидта. Новое доказательство этого факта получено в [9, предложение 1]).

Следующим естественным шагом в этом направлении является изучение пар (G,π) таких, что

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469) и Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5).

$(*)$ *G есть конечная не π-замкнутая группа, все собственные подгруппы которой π-замкнуты.*

Поскольку подгруппы π-замкнутой группы π-замкнуты, то, формулируя эту задачу, в $(*)$ вместо "собственные", можно написать "максимальные".

Как показано в [10, теорема 1′], справедливо следующее (отмеченное без доказательства в [7, конец § 1]) предложение.

Предложение 1. Для любых G и π со свойством $(*)$ либо $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа, либо G — группа Шмидта.

В частности, конечная разрешимая не π-замкнутая группа, все максимальные подгруппы которой π-замкнуты, является группой Шмидта (при любом заданном π).

Согласно предложению 1 отмеченная выше задача описания пар (G,π) со свойством $(*)$ практически сводится к случаю простых неабелевых групп G.

В настоящей статье получены следующие две теоремы. Доказательство теоремы 1 использует классификацию конечных простых групп [11].

Теорема 1. *Пусть G — конечная простая группа и π — множество простых чисел. Предположим, что группа G не π-замкнута, а все её максимальные подгруппы π-замкнуты. Тогда*

(I) $2 \notin \pi$;

(II) *G есть группа одного из следующих типов* (*всюду q есть степень некоторого простого числа*):

(1) $G \simeq A_p$, *где p — простое число и* $p \geq 5$;
(2) $G \simeq PSL_2(q)$, *где* $q > 5$;
(3) $G \simeq PSL_r(q)$, *где r — нечётное простое число*;
(4) $G \simeq PSU_r(q)$, *где r — нечётное простое число*;
(5) $G \simeq Sz(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geq 8$;
(6) $G \simeq {}^2G_2(q)$, *где* $q = 3^{2n+1} \geq 27$;
(7) $G \simeq {}^3D_4(q)$;
(8) $G \simeq {}^2F_4(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geq 8$;
(9) $G \simeq E_8(q)$;
(10) *G изоморфна одной из групп $M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi'_{24}$ и F_2.*

В частности, согласно утверждению (I), если в конечной простой неабелевой группе G все максимальные подгруппы π-замкнуты и $2 \in \pi$, то G есть π-группа.

Дальнейшей естественной задачей является определение для каждой группы G из пунктов (1)–(10) множества всех множеств π, для которых выполнено условие теоремы 1. Здесь мы приведём её решение лишь для групп пункта (10).

Теорема 2. *Пусть G — конечная спорадическая простая группа и π — подмножество из $\pi(G)$. Следующие утверждения равносильны*:

(A) *группа G не π-замкнута, а все её максимальные подгруппы π-замкнуты*;
(B) *выполнено одно из условий*:
(1) $G \simeq M_{23}$ *и* $\pi = \{23\}$;
(2) $G \simeq J_1$ *и* $\pi = \{19\}$;
(3) $G \simeq J_4$ *и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \{29, 43\}$;
(4) $G \simeq Ly$ *и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \{37, 67\}$;
(5) $G \simeq Fi'_{24}$ *и* $\pi = \{29\}$;
(6) $G \simeq F_2$ *и* $\pi = \{47\}$.

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие. *Пусть G — конечная спорадическая простая группа и p — простое число, делящее $|G|$. Следующие утверждения равносильны*:

(A) *все максимальные подгруппы группы G p-замкнуты*;
(B) *выполнено одно из условий*:

(1) $G \simeq M_{23}$ *и* $p = 23$;
(2) $G \simeq J_1$ *и* $p = 19$;
(3) $G \simeq J_4$ *и* $p \in \{29, 43\}$;
(4) $G \simeq Ly$ *и* $p \in \{37, 67\}$;
(5) $G \simeq Fi'_{24}$ *и* $p = 29$;
(6) $G \simeq F_2$ *и* $p = 47$.

Метод доказательства теоремы 1 основан на результатах статьи автора [9] (см. предложения 1.1–1.3 ниже), где используется введённое в ней понятие контроля простого спектра группы.

Пусть G — конечная группа. Множество $\pi(G)$ всех простых делителей её порядка будем называть (следуя фольклору) *простым спектром* группы G. Скажем, что секции $H_1, \dots, H_m$ группы G *контролируют простой спектр группы* G (или *контролируют* $\pi(G)$), если

$$\pi(H_1) \cup \ldots \cup \pi(H_m) = \pi(G).$$

В этой ситуации можно сказать также, что множество $\{H_1, \dots, H_m\}$ *контролирует* $\pi(G)$.

Доказательство теорем 1 и 2 во многом подобно доказательству, применённому автором в недавней работе [12] при описании конечных групп, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы, т. е. конечных групп, каждая максимальная подгруппа которых либо π-разложима, либо является группой Шмидта.

Используемые далее обозначения в основном стандартны (см., например, [13–16]). В частности, *секция* группы G есть гомоморфный образ некоторой её подгруппы; *собственная секция* группы G есть секция группы G, отличная от G; если π есть множество простых чисел, то π' есть множество всех простых чисел, не содержащихся в π; π-холлова подгруппа группы G — это π-подгруппа из G, индекс которой в G есть π'-число (т. е. не делится на простые числа из π); группа, имеющая нормальную π-холлову подгруппу, называется π-замкнутой. Через Z_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n.

Используются также следующие несколько видоизменённые обозначения из Атласа [16, с. XX]. Запись $G \doteq A.B$ (читается “G имеет тип $A.B$” или “G есть группа типа $A.B$”) означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т. е. G есть расширение A с помощью B). В случае расщепляемого расширения вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$ (в частности, в настоящей статье) или знак : (в Атласе [16] и многих других работах). Запись $G \doteq A_1.A_2. \dots .A_n$ при $n \geq 3$ означает, что $G \doteq (\dots((A_1.A_2).A_3). \dots .A_{n-1}).A_n$ и при любом $i \leq n$ группа G имеет нормальную подгруппу $N_i \doteq A_1.A_2. \dots .A_i$.

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи сделано в [17].

1. Предварительные результаты

Далее мы будем использовать следующие результаты из [9, теоремы 1–3] о контроле простого спектра конечной простой группы.

Предложение 1.1 [9, теорема 1]. *Пусть* G *— конечная знакопеременная или классическая простая группа. Тогда существует пара секций* X *и* Y *собственных подгрупп из* G *такая, что* $\pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$ (*допускается равенство* $X = Y$). *Более того, секции* X *и* Y *можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой, группой Фробениуса или* (*в одном случае*) *диэдральной группой. Ниже указаны примеры таких секций* X, Y *в* G:

(1) *если* $G \simeq A_n$, *где* $n \geq 5$, *то*
  (а) *при непростом* n $X = Y \simeq A_{n-1}$;
  (б) *при простом* n $X \simeq A_{n-1}$ *и* $Y \simeq N_G(P) \doteq P \leftthreetimes Z_{(n-1)/2}$, *где* $|P| = n$ (*группа Фробениуса*);

(2) *если* $G \simeq PSL_n(q)$, *где* $n \geq 2$ *и* $(n, q) \notin \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,9),(4,2)\}$, *то*

(а) *при* $n = 2$ $X \simeq D_{2(q+1)/(2,q+1)}$, $Y \doteq Z_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/(2,q-1)}$ (*группа Фробениуса*);

(б) *при непростом* $n \geq 3$ $X \simeq PSL_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSL_m(q^r)$, *где* $n = mr$ *и* r — *простое число*;

(в) *при простом* $n \geq 3$ $X \simeq PSL_{n-1}(q)$ *и* $Y \doteq Z_{t/(t,q-1)} \leftthreetimes Z_n$, *где* $t = (q^n - 1)/(q - 1)$ (*группа Фробениуса*);

(3) *если* $G \simeq PSU_n(q)$, *где* $n \geq 3$ *и* $(n, q) \neq (3, 2)$, *то*

(а) *при чётном* n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSL_{n/2}(q^2)$;

(б) *при нечётном непростом* n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSU_m(q^r)$, *где* $n = mr$ *и* r — *простое число*;

(в) *при нечётном простом* n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \doteq Z_{t/(t,q+1)} \leftthreetimes Z_n$, *где* $t = (q^n+1)/(q+1)$ (*группа Фробениуса*);

(4) *если* $G \simeq PSp_{2n}(q)$, *где* $n \geq 2$ *и* $(n, q) \neq (2, 2)$, *то*
$X \simeq PSp_{2n-2}(q)$ *и* $Y \simeq PSp_2(q^n)$;
при $n = 2$ $\pi(G) = \pi(Y)$;

(5) *если* $G \simeq P\Omega_{2n+1}(q)$, *где* $n \geq 3$ *и* q *нечётно, то*
$X \simeq P\Omega^+_{2n}(q)$ *и* $Y \simeq P\Omega^-_{2n}(q)$;
при чётном n $\pi(G) = \pi(Y)$;

(6) *если* $G \simeq P\Omega^+_{2n}(q)$, *где* $n \geq 4$, *то* $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$ *и* $Y \simeq PSL_n(q)$;
при чётном n $\pi(G) = \pi(X)$;

(7) *если* $G \simeq P\Omega^-_{2n}(q)$, *где* $n \geq 4$, *то*

(а) *при нечётном* n $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$, $Y \simeq PSU_n(q)$;

(б) *при чётном* $n = 2m$ $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$, $Y \simeq P\Omega^-_{2m}(q^2)$.

Предложение 1.2 [9, теорема 2]. *Пусть* G — *конечная простая исключительная группа лиева типа. Тогда существует пятёрка секций* X, Y, Z, V, W *собственных подгрупп группы* G (*среди которых могут быть равные*) *такая, что* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$. *Более того, эти секции можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой или группой Фробениуса. Ниже указаны примеры таких секций в* G:

(1) *если* $G \simeq Sz(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ (*все* — *группы Фробениуса*); $c(G) = 3$;

(2) *если* $G \simeq G_2(q)$ *с* $q > 2$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq SL_3(q)$ *и* $Y \simeq SU_3(q)$; $c(G) = 2$ *при* $q > 3$ *и* $c(G_2(3)) = 1$;

(3) *если* $G \simeq {}^2G_2(q)$ *с* $q = 3^{2n+1} \geq 27$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq PSL_2(q)$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ (Y, Z — *группы Фробениуса*); $c(G) = 3$;

(4) *если* $G \simeq {}^3D_4(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq SL_2(q^3)$ (*или* $G_2(q)$) *и* $Y \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$ (*группа Фробениуса*); $c(G) = 2$;

(5) *если* $G \simeq F_4(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq \Omega_9(q)$ *и* $Y \simeq {}^3D_4(q)$;

(6) *если* $G \simeq {}^2F_4(q)$ *с* $q = 2^{2n+1} \geq 8$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, *где* $X \simeq Sz(q)$ (*или* $Sp_4(q)$), $Y \simeq SU_3(q)$, $Z \doteq Z_{q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ *и* $V \doteq Z_{q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ (Z, V — *группы Фробениуса*); $c(G) = 4$;

(6а) *если* $G \simeq {}^2F_4(2)'$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq PSL_2(25)$;

(7) *если* $G = E_6(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSL_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^+_{10}(q)$;

(8) *если* $G \simeq {}^2E_6(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^-_{10}(q)$;

(9) *если* $G \simeq E_7(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq E_6(q)$, $Y \simeq {}^2E_6(q)$, $Z \simeq PSL_2(q^7)$;

(10) *если* $G \simeq E_8(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, *где* $X \simeq E_7(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^4)$, $Z \simeq PSU_5(q^2)$, $V \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{30}$ *и* $W \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{30}$, *где* $a = q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1$ *и* $b = q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1$ (V, W — *группы Фробениуса*).

Предложение 1.3 [9, теорема 3]. *Пусть G — спорадическая простая группа. Тогда справедливы следующие утверждения, где X, Y, Z, V, W есть некоторые секции собственных подгрупп группы G:*

(1) *если $G \simeq M_{11}$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq PSL_2(11)$;*

(2) *если $G \simeq M_{12}$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{11}$;*

(3) *если $G \simeq M_{22}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_2(11)$ и $Y \simeq A_7$;*

(4) *если $G \simeq M_{23}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq M_{22}$ (или A_7) и $Y \doteq Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$ (группа Фробениуса);*

(5) *если $G \simeq M_{24}$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{23}$;*

(6) *если $G \simeq J_1$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq PSL_2(11)$, $Y \doteq Z_7 \leftthreetimes Z_6$ и $Z \doteq Z_{19} \leftthreetimes Z_6$ (Y и Z — группы Фробениуса);*

(7) *если $G \simeq J_2$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_2(7)$ и $Y \simeq A_5$;*

(8) *если $G \simeq J_3$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_2(17)$ и $Y \simeq PSL_2(19)$;*

(9) *если $G \simeq J_4$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, где $X \simeq L_2(23)$ (или M_{24}), $Y \simeq PSL_2(32)$ (или $PSL_5(2)$), $Z \simeq PSU_3(11)$, $V \doteq Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}$ и $W \doteq Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}$ (V и W — группы Фробениуса);*

(10) *если $G \simeq HS$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{22}$;*

(11) *если $G \simeq He$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSp_4(4)$ и $Y \simeq A_7$;*

(12) *если $G \simeq Mc$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{22}$;*

(13) *если $G \simeq Suz$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq G_2(4)$, $Y \simeq M_{11}$ (или $Z_{11} \leftthreetimes Z_{10}$);*

(14) *если $G \simeq Ly$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq G_2(5)$, $Y \doteq Z_{37} \leftthreetimes Z_{18}$ и $Z \doteq Z_{67} \leftthreetimes Z_{22}$ (Y и Z — группы Фробениуса);*

(15) *если $G \simeq Ru$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_2(29)$ и $Y \simeq Sz(8)$;*

(16) *если $G \simeq O'N$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq J_1$ и $Y \simeq PSL_2(31)$;*

(17) *если $G \simeq Co_3$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{23}$;*

(18) *если $G \simeq Co_2$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{23}$;*

(19) *если $G \simeq Co_1$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq Co_2$ и $Y \simeq Suz$;*

(20) *если $G \simeq Fi_{22}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq M_{22}$ и $Y \simeq \Omega_7(3)$;*

(21) *если $G \simeq Fi_{23}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq Fi_{22}$, $Y \simeq Sp_8(2)$ и $Z \simeq M_{23}$;*

(22) *если $G \simeq Fi'_{24}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq Fi_{23}$ и $Y \doteq Z_{29} \leftthreetimes Z_{14}$ (группа Фробениуса);*

(23) *если $G \simeq F_5\,(= HN)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq A_{12}$ и $Y \simeq PSU_3(8)$;*

(24) *если $G \simeq F_3\,(= Th)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq PSL_5(2)$, $Y \simeq PSL_2(19)$ и $Z \simeq PSL_3(3)$;*

(25) *если $G \simeq F_2\,(= B)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq Fi_{23}$, $Y \simeq F_3$, $Z \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$ (группа Фробениуса);*

(26) *если $G \simeq F_1\,(= M)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, где $X \simeq F_2$, $Y \simeq PSL_2(59)$, $Z \simeq PSL_2(71)$, $V \simeq \Omega_8^-(3)$ (или $V \doteq Z_{41} \leftthreetimes Z_{40}$ (группа Фробениуса)).*

В каждом из утверждений (1)–(26) выбрано минимальное число секций собственных подгрупп группы G, контролирующих её простой спектр, и каждая из этих секций является либо простой неабелевой группой, либо группой Фробениуса.

Из [18, табл. 8.1] и [13, лемма 15.1.1] непосредственно вытекает следующее утверждение (в каждом из пунктов (1)–(8) после слова "если" записано необходимое и достаточное условие существования указанной максимальной подгруппы, под *классом* понимается класс сопряжённых подгрупп в G).

Предложение 1.4. *Пусть $G = PSL_2(q)$, где $q = p^f$, p — простое число, $f \in \mathbb{N}$, и $d := (2, q-1)$. Тогда любая максимальная подгруппа группы G имеет строение, указанное в следующем списке:*

(1) *$E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/d}$ — группа Фробениуса (существует при всех q, 1 класс);*

(2) *$D_{2(q-1)/d}$, если $q \notin \{5, 7, 9, 11\}$ (1 класс);*

(3) $D_{2(q+1)/d}$, *если* $q \notin \{7, 9\}$ (1 *класс*);

(4) $PSL_2(q_0)$, *если* $q = q_0^r$, *где* $q_0 \mid q$, $q_0 \neq 2$, r *— простое, и* r *нечётно при нечётном* q (1 *класс при каждом* r);

(5) $PGL_2(q_0)$, *если* q *нечётно и* $q = q_0^2$, $q_0 \mid q$ (2 *класса*);

(6) S_4, *если* $q = p \equiv \pm 1 \pmod 8$ (2 *класса*);

(7) A_4, *если* $q = p \equiv \pm 3, 5, \pm 13 \pmod{40}$ (1 *класс*);

(8) A_5, *если* $q = p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ *или* $q = p^2$, *где* $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$ (2 *класса*).

Заметим, что в случаях (5)–(8) число q нечётно.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — конечная простая неабелева группа, причём для некоторого множества π простых чисел все максимальные подгруппы группы G π-замкнуты, а сама группа G не является π-замкнутой. Зафиксируем некоторое такое множество π.

Понятно, что

$$\text{все собственные секции группы } G \ \pi\text{-замкнуты.} \tag{2.1}$$

Поэтому справедлива

Лемма 2.1. *Пусть* K *— собственная секция группы* G. *Если* K *не имеет неединичных нормальных* π*-холловых подгрупп, то* $\pi(K) \subseteq \pi'$. *В частности, простые неабелевы собственные секции группы* G *либо все являются* π*-группами* (*если* $2 \in \pi$), *либо все являются* π'*-группами* (*если* $2 \in \pi'$).

Согласно классификации конечных простых групп [11] G есть либо знакопеременная группа, либо группа лиева типа, либо спорадическая группа. Контроль простого спектра этих групп описан в предложениях 1.1–1.3.

Случай 1. Предположим сначала, что G есть знакопеременная или классическая простая группа. Тогда согласно предложению 1.1 группа G имеет секции X и Y такие, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, причём секция X — простая неабелева или диэдральная группа, а секция Y — простая неабелева группа или группа Фробениуса. Если секции X и Y обе простые, то $2 \in \pi(X) \cap \pi(Y)$, и тогда по лемме 2.1 множество $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$ содержится либо в π, либо в π', что противоречит не π-замкнутости группы G. Внимательный просмотр пунктов предложения 1.1 показывает, что в большинстве случаев, а именно, во всех, кроме случаев (1б), (2а), (2в), (3в), X и Y обе являются простыми группами.

Таким образом, согласно лемме 2.1 (независимо от того, $2 \in \pi$ или $2 \in \pi'$) G есть группа лишь одного из типов (1б), (2а), (2в), (3в) предложения 1.1, и, следовательно,

$$\text{в случае 1 для } G \text{ выполнено одно из условий (1)–(4) теоремы 1.} \tag{2.2}$$

Покажем, что для каждой группы G из (2.2) должно быть $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq A_p$ при простом $p \geq 5$ (тип (1б): $\pi(G) = \pi(A_{p-1}) \cup \pi(Z_p \rtimes Z_{(p-1)/2})$). Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда из π-замкнутости подгруппы A_{p-1} (по (2.1)) следует, что $\pi \supseteq \pi(A_{p-1}) = \pi((p-1)!)$. В частности, $\pi \supseteq \pi((p-1)/2)$. Но отсюда и из того факта, что подгруппа $Z_p \rtimes Z_{(p-1)/2}$ (π-замкнутая по (2.1)), будучи группой Фробениуса, не имеет нормальной подгруппы порядка $(p-1)/2$, следует, снова по (2.1), что $\pi(Z_p \rtimes Z_{(p-1)/2}) \subseteq \pi$. А тогда $\pi(G) = \pi(A_{p-1}) \cup \pi(Z_p \rtimes Z_{(p-1)/2}) \subseteq \pi$, и, следовательно, G π-замкнута. Но это противоречиво. Значит, здесь $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq PSL_2(q)$ (тип (2а) предложения 1.1). Предположим, что $2 \in \pi$. Рассмотрим в G подгруппы $D_- \doteq D_{2(q-1)/d}$, $D_+ \doteq D_{2(q+1)/d}$ ($d = (2, q-1) = (2, q+1)$) и $B \doteq E_q \rtimes Z_{(q-1)/d}$ (при $q \notin \{5, 7, 9, 11\}$ их существование следует из предложения 1.4, а в противном случае проверяется непосредственно). Поскольку диэдральные группы D_- и D_+ не имеют собственных холловых нормальных подгрупп чётного порядка, то по (2.1) $\pi \supseteq \pi(q-1) \cup \pi(q+1)$. А так как группа Фробениуса B не имеет собственных холловых нормальных подгрупп порядка, делящегося на π-число $(q-1)/d$, то по (2.1) $\pi \supseteq \pi(B) \supseteq \{q\}$. Таким образом, $\pi \supseteq \pi(q-1) \cup \pi(q+1) \cup \{q\} = \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq PSL_r(q)$ с простым $r \geq 3$ (тип (2в): $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_{r-1}(q)$, $Y \simeq Z_s \leftthreetimes Z_r$, $\pi(s) = \pi((q^r-1)/(q-1)))$. Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда по (2.1) $\pi \supseteq \pi(X) \ni r$ (так как r делит $q(q^{r-1}-1)$ по теореме Ферма). Но из $r \in \pi$ и π-замкнутости подгруппы Фробениуса Y следует, что $\pi \supseteq \pi(Y)$. Но теперь $\pi \supseteq \pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq PSU_r(q)$ с простым $r \geq 3$ (тип (3в): $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSU_{r-1}(q)$, $Y \simeq Z_s \leftthreetimes Z_r$ с $\pi(s) = \pi((q^r+1)/(q+1)))$. Поскольку $|X|$ делится на $q^{r-1} - (-1)^{r-1} = q^{r-1} - 1$ и на q, то $r \mid |X|$ по теореме Ферма. Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда $\pi \supseteq \pi(X) \ni r$. Но из $r \in \pi$ и π-замкнутости подгруппы Фробениуса Y (по (2.1)) следует, что $\pi \supseteq \pi(Y)$. Но теперь $\pi \supseteq \pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Случай 2. Предположим теперь, что G — исключительная простая группа лиева типа. Для каждой такой группы G предложение 1.2 указывает некоторое множество $\mathcal{K}(G)$ собственных секций X, Y, ... группы G такое, что $\pi(G) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}(G)} \pi(K)$. Обратимся к предложению 1.2. Мы видим, что в любом из пунктов (2), (5), (6а), (7), (8), (9) каждая из секций $K \in \mathcal{K}(G)$ есть простая неабелева группа. Но в этих случаях по (2.1) $\pi \supseteq \pi(G)$ в противоречие с не π-замкнутостью группы G. Следовательно, G есть группа одного из типов (1), (3), (4), (6) и (10) этого предложения, и, значит,

$$\text{в случае 2 для } G \text{ выполнено одно из условий (5)–(9) теоремы 1.} \tag{2.3}$$

Покажем, что в каждом условии из (2.3) должно быть $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq Sz(q)$, $q = 2^{2n+1}$ (тип (1) предложения 1.2: $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ (все — группы Фробениуса)). Предположим, что $2 \in \pi$. Так как Y и Z имеют чётные порядки и не имеют собственных холловых нормальных подгрупп чётного порядка, то должно быть $\pi \supseteq \pi(Y) \cup \pi(Z)$ (помним, что по условию Y и Z π-замкнуты). Далее, так как G содержит подгруппу, изоморфную $D_{2(q-1)}$ [15, теорема 4.1], то ввиду подобных аргументов $\pi \supseteq \pi(q-1)$. Наконец, так как X имеет неединичные $\pi(q-1)$-элементы, но не имеет собственной холловой нормальной $\pi(q-1)$-подгруппы, то $\pi \supseteq \pi(X)$. В итоге получаем, что $\pi \supseteq \pi(G)$, а это противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1} \geq 27$ (тип (3): $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq PSL_2(q)$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ (Y, Z — группы Фробениуса)). Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда, очевидно, $\pi \supseteq \pi(X)$, а так как Y и Z имеют чётные порядки, но не имеют собственных нормальных подгрупп чётного порядка, то $\pi \supseteq \pi(Y) \cup \pi(Z)$. Следовательно, $\pi \supseteq \pi(G)$, что противоречиво. Значит, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq {}^3D_4(q)$, $q = 3^{2n+1} \geq 27$ (тип (4): $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq SL_2(q^3)$ и $Y \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$ (группа Фробениуса)). Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда, как и выше, получаем $\pi \supseteq \pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq {}^2F_4(q)$ с $q = 2^{2n+1} \geq 8$ (тип (6)), где $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, $X \simeq Sz(q), Y \simeq SU_3(q), Z \doteq Z_{q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ и $V \doteq Z_{q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ (Z, V — группы Фробениуса). Если $2 \in \pi$, то, подобно предыдущему, получаем $\pi \supseteq \pi(G)$, что противоречиво.

Пусть $G \simeq E_8(q)$ (тип (10)), где $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, $X \simeq E_7(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^4)$, $Z \simeq PSU_5(q^2)$, $V \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{30}$ и $W \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{30}$, где $a = q^8+q^7-q^5-q^4-q^3+q+1$ и $b = q^8-q^7+q^5-q^4+q^3-q+1$ (V, W — группы Фробениуса). Если $2 \in \pi$, то, подобно предыдущему, получаем $\pi \supseteq \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Случай 3. Предположим, наконец, что G — спорадическая простая группа. В каждом из пунктов (1)–(26) предложения 1.3 указано множество $\mathcal{K}(G)$ секций группы G, контролирующее $\pi(G)$. В большинстве случаев, а именно, за исключением шести пунктов (4), (6), (9), (14), (22) и (25), оно состоит из простых групп, что противоречит лемме 2.1. Следовательно, G —

группа одного из этих шести пунктов, а значит,

$$\text{в случае 3 для } G \text{ выполнено условие (10) теоремы 1.} \tag{2.4}$$

Противоречивость условия $2 \in \pi$ в этом случае доказывается с помощью предложения 1.3, по существу так же, как и в других случаях (мы опускаем здесь эти простые выкладки).

Совокупность утверждений (2.2)–(2.4) доказывает утверждение (II) теоремы 1. Утверждение (I) доказано по частям в случаях 1–3. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — спорадическая простая группа и π — подмножество из $\pi(G)$. Учитывая теорему 1, мы можем считать, что G изоморфна одной из групп $M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi_{24}'$ и F_2 и $2 \in \pi'$. В каждом из следующих пунктов **1–6** мы рассматриваем эти группы G отдельно и в каждом случае доказываем равносильность для G и π условий (A) и (B) теоремы 2.

Списки максимальных подгрупп групп G имеются (например) в [15]. Любой такой список $\mathcal{M}(G)$ содержит по одному представителю от каждого класса сопряжённых максимальных подгрупп. Для каждой группы G условимся указывать в $\mathcal{M}(G)$ лишь типы подгрупп.

1. Пусть $G \simeq M_{23}$. Тогда $|G| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$, и по [15, табл. 5.1]

$$\mathcal{M}(G) = \{M_{22},\ PSL_3(4) \leftthreetimes Z_2,\ E_{16} \leftthreetimes (Z_3 \times A_5) \leftthreetimes Z_2,\ E_{16} \leftthreetimes A_7,\ A_8,\ M_{11},\ Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}\}.$$

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть (для G и π) выполнено условие (A). Так как $M_{22} \in \mathcal{M}(G)$, то по лемме 2.1 $\pi' \supseteq \pi(M_{22}) = \pi(G) \setminus \{23\}$. Поэтому $\pi = \{23\}$ и верно утверждение $(B)(1)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(1)$ теоремы 2, т. е. $\pi = \{23\}$. Снова рассмотрим $\mathcal{M}(G)$. Мы видим, что M_{23} имеет 23-замкнутую максимальную подгруппу $M \doteq Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$, а любая не сопряжённая с ней максимальная подгруппа из M_{23} имеет порядок, не делящийся на 23. Таким образом, все максимальные подгруппы группы G 23-замкнуты и верно (A).

2. Пусть $G \simeq J_1$. Тогда $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$, и по [15, табл. 5.11]

$$\mathcal{M}(G) = \{PSL_2(11),\ Z_2 \times A_5,\ Z_{11} \leftthreetimes Z_{10},\ D_6 \times D_{10},\ E_8 \leftthreetimes Z_7 \leftthreetimes Z_3,\ Z_7 \leftthreetimes Z_6,\ Z_{19} \leftthreetimes Z_6\}.$$

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). По лемме 2.1 $\pi' \supseteq \pi(PSL_2(11)) = \{2, 3, 5, 11\} = \pi(G) \setminus \{7, 19\}$. Поскольку $C_G(Z_7) = Z_7$ (см. [16, с. 36]), то подгруппа $E_8 \leftthreetimes Z_7$ не 7-замкнута. Следовательно, $\pi' \supseteq \pi(G) \setminus \{19\}$ и $\pi = \{19\}$. Таким образом, верно утверждение $(B)(2)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение (B) теоремы 2, т. е. $\pi = \{19\}$. Мы видим, что G имеет 19-замкнутую максимальную подгруппу типа $Z_{19} \leftthreetimes Z_6$, а остальные подгруппы в $\mathcal{M}(G)$ являются $19'$-группами. Таким образом, верно утверждение (A) теоремы 2.

3. Пусть $G \simeq J_4$. Тогда $|G| = 2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$, и по [15, табл. 5.11]

$$\mathcal{M}(G) = \{E_{2^{11}} \leftthreetimes M_{24},\ A.Z_3 \leftthreetimes M_{22} \leftthreetimes Z_2\,(|A| = 2^{13}),\ E_{2^{10}} \leftthreetimes GL_5(2),\ B.(S_5 \times GL_3(2)\,(|B| = 2^{15}),$$

$$PSU_3(11) \leftthreetimes Z_2,\ M_{22} \leftthreetimes Z_2,\ C \leftthreetimes (Z_5 \times 2S_4)\,(|C| = 11^3),\ PSL_2(32) \leftthreetimes Z_5,$$

$$PSL_2(23) \leftthreetimes Z_2,\ PSU_3(3),\ Z_{29} \leftthreetimes Z_{28},\ Z_{43} \leftthreetimes Z_{14},\ Z_{37} \leftthreetimes Z_{12}\}.$$

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). Как видно, в списке $\mathcal{M}(G)$ имеются лишь 4 группы, содержащие нееденичные нормальные подгруппы нечётного порядка: $C \leftthreetimes (Z_5 \times 2S_4)$ с $|C| = 11^3$, $Z_{37} \leftthreetimes Z_{12}$, $Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}$, $Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}$. Простые спектры остальных максимальных подгрупп войдут по лемме 2.1 в π' и составят $\pi(G) \setminus \{29, 43\}$ ($11 \cdot 37$ делит $|PSU_3(11)|$). Таким образом, $\pi \in \{\{29\}, \{43\}, \{29, 43\}\}$, и верно утверждение $(B)(3)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(3)$ теоремы 2, т. е. $\varnothing \neq \pi \subseteq \{29, 43\}$. Как легко проверить, в множестве $\mathcal{M}(G)$ единственными подгруппами, порядок которых делится на 29 или на 43, являются две группы $Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}$ и $Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}$. Следовательно, каждая подгруппа группы G является 29-замкнутой, 43-замкнутой и $\{29, 43\}$-замкнутой. В любом случае каждая подгруппа группы G является π-замкнутой, и верно утверждение (A) теоремы 2.

4. Пусть $G \simeq Ly$. Тогда $|G| = 2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$, и по [15, табл. 5.11]

$$\mathcal{M}(G) = \{G_2(5),\ Z_3.McL \leftthreetimes Z_2,\ E_{5^3}.SL_3(5),\ Z_2.A_{11},\ A \leftthreetimes 4S_6\,(|A| = 5^5),$$

$$E_{3^5} \leftthreetimes (Z_2 \times M_{11}),\ B \leftthreetimes 2A_5.D_8\,(|B| = 3^6),\ Z_{67} \leftthreetimes Z_{22}\ Z_{37} \leftthreetimes Z_{18}\}.$$

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). По лемме 2.1 $\pi' \supseteq (\pi(G_2(5)) \cup \pi(A_{11})) = \pi(G) \setminus \{37, 67\}$. Следовательно, $\varnothing \neq \pi \subseteq \{37, 67\}$, т. е. $\pi \in \{\{37\}, \{67\}, \{37, 67\}\}$, и верно утверждение $(B)(4)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(4)$ теоремы 2, т. е. $\varnothing \neq \pi \subseteq \{37, 67\}$. Как легко проверить, в множестве $\mathcal{M}(G)$ единственными подгруппами, порядок которых делится на 37 или на 67, являются две группы $Z_{67} \leftthreetimes Z_{22}$ и $Z_{37} \leftthreetimes Z_{18}$. Следовательно, каждая подгруппа группы G является 37-замкнутой, 67-замкнутой и $\{37, 67\}$-замкнутой. В любом случае каждая подгруппа группы G является π-замкнутой, и верно утверждение (A) теоремы 2.

5. Пусть $G \simeq Fi'_{24}$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29\} = \pi(Fi_{23}) \cup \{29\}$. Список $\mathcal{M}(G)$ максимальных подгрупп группы G, состоящий из 25 подгрупп, имеется в [15, табл. 5.5]; к нему мы и отсылаем читателя.

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). Так как $Fi_{23} \in \mathcal{M}(G)$ и $\pi(G) = \pi(Fi_{23}) \cup \{29\}$, то по лемме 2.1 должно быть $\pi = \{29\}$, т. е. верно утверждение $(B)(5)$.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(5)$ теоремы 2, т. е. $\pi = \{29\}$. Несложно проверить, что в $\mathcal{M}(G)$ имеется точно одна подгруппа, а именно, $Z_{29} \leftthreetimes Z_{14}$, порядок которой делится на 29. Следовательно, все максимальные подгруппы в G 29-замкнуты, т. е. верно утверждение (A) теоремы 2.

6. Пусть $G \simeq F_2$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47\}$. Список $\mathcal{M}(G)$ максимальных подгрупп группы G, состоящий из 29 подгрупп, имеется в [15, табл. 5.7].

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). В списке $\mathcal{M}(G)$ нас интересуют только группы M, имеющие нормальную подгруппу K нечётного порядка. Оказывается, что для всех таких M либо соответствующая подгруппа K есть p-группа при $p \in \{3, 5\}$, либо $M \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$. Ясно, что $\{3, 5\} \subseteq \pi'$ из-за наличия в G подгруппы Fi_{23} (ввиду леммы 2.1). Таким образом, если пара (G, π) имеет свойство $(*)$, то должно быть $\pi = \{47\}$. Таким образом, верно утверждение $(B)(6)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(6)$ теоремы 2, т. е. $\pi = \{47\}$. Составив список простых спектров подгрупп, входящих в $\mathcal{M}(G)$, мы увидим, что имеется лишь одна подгруппа, порядок которой делится на 47, а именно, 47-замкнутая подгруппа $M \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$. Следовательно, все максимальные подгруппы в G 47-замкнуты, т. е. верно утверждение (A) теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miller G. A., Moreno H.** Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. No. 4. P. 398–404.
2. **Шмидт О. Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3–4. С. 366–372.
3. **Huppert B.** Normalteiler and maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. No. 60. P. 409–434.
4. **Doerk K.** Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. No. 91. P. 198–205.
5. **Старостин А. И.** О минимальных группах, не обладающих данным свойством // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 1. С. 33–37.
6. **Шеметков Л. А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

7. **Белоногов В. А.** О конечных группах, насыщенных (π, π')-разложимыми подгруппами // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 3. С. 494–506.
8. **Arad Z., Chillag D.** A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups // J. Algebra. 1984. Vol. 87, no. 2. P. 472–482.
9. **Белоногов В. А.** О контроле простого спектра конечной простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 29–44.
10. **Белоногов В. А.** О конечных группах, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты // Междунар. шк.-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В.В. Кабанова: тез. докл. Нальчик: Изд-во Кабард.-Балкар. гос. ун-та, 2014. С. 6–9.
11. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1994. 179 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 40, no. 1.)
12. **Белоногов В. А.** Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 29–43.
13. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Harper & Row, 1968. 542 p.
14. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 805 S.
15. **Wilson R. A.** The finite simple groups. London: Springer-Verlag, 2009. 313 p.
16. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norten, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 285 p.
17. **Belonogov V. A.** Finite groups in which all maximal subgroups are π-closed // Мальцевские чтения: тез. докл. / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2014. С. 86.
18. **Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups // Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 452 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407.)

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 01.09.2014