

УДК 517.954

**НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ
ПСЕВДОВЕРШИН КРАЕВОГО МНОЖЕСТВА
В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА¹****А. А. Успенский**

Исследуется проблема возникновения негладких особенностей обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка. Рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения типа эйконала. Предметом изучения являются псевдовершины краевого множества. Псевдовершины нужны для аналитического и численного конструирования ветвей сингулярного множества — множества, на котором решение краевой задачи теряет гладкость. Получены необходимые условия существования псевдовершин для случая гладкой границы невыпуклого краевого множества. Условия выписаны в терминах стационарности кривизны и стационарности координатных функций, задающих границу множества.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка, минимаксное решение, волновой фронт, диффеоморфизм, эйконал, функция оптимального результата, сингулярное множество, симметрия.

A. A. Uspenskii. Necessary conditions for the existence of pseudovertices of the boundary set in the Dirichlet problem for the eikonal equation.

The problem of the appearance of nonsmooth singularities in generalized solutions of first-order PDEs is studied. The Dirichlet boundary value problem is considered for an eikonal-type equation. The subject of the research is pseudovertices of the boundary set. Pseudovertices are useful for the analytic and numerical construction of branches of the singular set, i.e., the set where the solution of the boundary value problem is nonsmooth. Necessary conditions for the existence of pseudovertices are obtained in the case when a nonconvex boundary set has smooth boundary. The conditions are written in terms of constant curvature and constant coordinate functions defining the boundary of the set. Keywords: first-order PDE, minimax solution, wavefront, diffeomorphism, eikonal, optimal result function, singular set, symmetry.

Введение

Необходимость построения решений краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка обусловлена потребностями различных отраслей знания, к которым относятся, в частности, механика, геометрическая оптика, теория оптимального управления, дифференциальные игры. Гладкость краевых условий в задаче Коши или в задаче Дирихле не гарантирует гладкость решения уравнения такого типа на сколько-нибудь большой области в пространстве переменных. В этом смысле гладкость решения уравнения в частных производных первого порядка не является наследуемым свойством. Тем более неоправданно надеяться на дифференцируемость решения уравнения всюду, если краевые условия не являются гладкими. В приложениях же задачи с негладкими краевыми условиями не являются редкостью. Проблема построения нелокальной теории для таких уравнений снимается введением обобщенных решений. Известны различные подходы [1–5] к определению обобщенного решения уравнений. Концепция минимаксного решения [4], которая базируется на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [6], введена А. И. Субботиным. Эффективность минимаксного подхода нашла подтверждение в разработке теоретических методов и аппроксимационных процедур построения обобщенных решений различных классов краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений гамильтонова типа, изучаемых при исследовании задач управления и дифференциальных игр. Одной из таких задач является задача оптимального управления по быстрдействию.

¹Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УРО РАН (проект 15-16-1-13), а также при поддержке РФФИ (проекты 14-01-00486_а и 13-01-96055).

В настоящей работе изучается проблема возникновения негладкости функции оптимального результата в плоской задаче о быстродействии для случая круговой индикатрисы. Достаточно простая по своей геометрии структура вектограммы скоростей делает эту задачу в некоторой степени модельной задачей. Сложность данной задаче придает допустимая по условию невыпуклость целевого множества. В этом случае даже при достаточно высокой гладкости границы цели у функции оптимального результата (минимаксного решения соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби) возникают множества, на которых эта функция терпит “градиентную катастрофу”. Задача исследователя видится здесь, в частности, в том, чтобы научиться выявлять и строить сингулярные множества. Этой проблеме посвящен цикл работ [7–16], в которых предложены аналитические и численные алгоритмы построения сингулярных множеств и функции оптимального результата.

При изучении проблемы полезно помнить и использовать свойства решений задач формально близких к задаче о быстродействии. Известно [11], что функция оптимального результата задачи о быстродействии отличается лишь знаком от эйконала — фундаментального, по С. Н. Кружкову [11], решения основного уравнения геометрической оптики [17]. Совпадение множеств Лебега функции оптимального результата и эйконала позволяет применять при построении решения задачи о быстродействии методы и конструкции геометрической оптики, дифференциальной геометрии [18].

Волновые фронты эйконала являются линиями уровня функции оптимального результата. Эволюция волновых фронтов, их перестройка, возникновение и классификация особенностей изучаются методами и средствами теории особенностей гладких отображений [19; 20]. Конструкции этой теории также привлекаются при исследовании задач динамического управления [21]. В настоящей работе при изучении свойств множеств используются диффеоморфизмы, которые часто эксплуатируются в указанной теории. Кроме того, применяется удобная при громоздких аналитических аппроксимативных построениях техника струй — локальных разложений Тейлора.

Основной результат исследования состоит в получении необходимых условий для псевдовершин целевого множества в случае достаточно гладкой границы. Псевдовершины являются особыми точками границы краевого множества. С одной стороны, они геометрически локализуют экстремум кривизны кривой, а с другой — связаны с характеристикой множества с точки зрения меры невыпуклости [7; 8]. В задаче о быстродействии нахождение псевдовершин целевого множества позволяет строить ветви сингулярного множества функции оптимального результата.

Полученные в работе результаты создают конструктивную основу для введения обобщения производной, совпадающего в частном случае с симметрической производной Шварца [22; 23]. Означенное обобщение производной дает возможность описания свойств решения на сингулярной кривой соотношениями типа условий Ранкина — Гюгонио. Схожие конструкции при построении решений задачи Коши для уравнения гамильтонова типа рассматривались, например, в работе [24].

1. Объект исследования

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Краевое условие (1.2) определено на границе замкнутого множества $\Gamma = \partial M$. Предполагается, что Γ не имеет точек самопересечения. Дифференциальные свойства границы будут оговорены ниже при обосновании утверждений.

Структура минимаксного решения $u = u(x, y)$ задачи (1.1), (1.2) известна [11]:

$$u(x, y) = \rho((x, y), M).$$

Здесь $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{a} \in M} \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|$ — евклидово расстояние от точки \mathbf{x} до множества M . Минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) является функцией оптимального результата в соответствующей задаче быстрогодействия [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leq 1$. Задача быстрогодействия заключается в приведении движения динамической системы (1.3) на множество M за наименьшее время за счет надлежащего выбора допустимого управления $\nu = (\nu_1, \nu_2)$.

С. Н. Кружков ввел [1] главное (фундаментальное) решение $u_k = u_k(x, y)$ краевой задачи Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала. В частном случае для изотропной среды фундаментальное решение краевой задачи

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \quad (1.4)$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (1.5)$$

имеет вид $u_k(x, y) = \rho((x, y), M)$. Здесь краевое условие то же, что и в задаче (1.1), (1.2). Нетрудно видеть, что карта линий уровня фундаментального решения задачи (1.4), (1.5), т. е. совокупность волновых фронтов, и карта линий уровня минимаксного решения задачи (1.1), (1.2) совпадают. Стало быть, нахождение решения задачи (1.1), (1.2) равносильно построению решения задачи (1.4), (1.5). Характер эволюции волновых фронтов определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. При этом выпуклость краевого множества играет весьма существенную роль. Невыпуклость этого множества влечет наличие у решения задачи сингулярного множества, которое в данном случае относится к множествам симметрии [13]. В достаточно общем случае сингулярное множество является объединением нуль- и одномерных многообразий, и это множество разбивает область рассмотрения решения задачи (1.1), (1.2) на подобласти, в которых решение дифференцируемо в классическом смысле. Отыскание сингулярного множества в аналитическом виде или же нахождение с помощью вычислительных процедур его аппроксимации заметным образом облегчает построение решения краевой задачи в целом. Особую роль при этом играют псевдовершины — точки на границе краевого множества, “сигнализирующие” о наличии одномерных многообразий, ветвей множества симметрии. Ранее установлена связь посредством аналитических формул между псевдовершинами краевого множества и крайними точками одномерных многообразий (“началами” ветвей сингулярного множества) в ряде случаев. При этом означенная связь выявлена в том числе и для ослабленных в части гладкости условий, налагаемых на границу краевого множества. В частности, получены формулы для крайних точек сингулярных кривых в случае, когда граница цели имеет разрыв по второй производной, и в случае кусочно-гладкой границы [16].

Ниже обоснуем необходимые условия существования псевдовершин для случая достаточно гладкой параметризованной границы краевого множества в условиях, допускающих невыпуклость множества.

2. Определения, основные понятия

Пусть $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение числового интервала $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty \leq \hat{t} < \check{t} \leq +\infty$, на плоскость. Вектор-функция $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ является гладкой в том смысле, что ее производные существуют, по крайней мере, до третьего порядка включительно. Образ $\Gamma = \gamma(t)$ этого

отображения представляет собою плоскую кривую. Полагаем, что Γ является регулярной, т. е. вектор скорости $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$ не обращается в нуль-вектор. Это означает, что точка $\gamma = \gamma(t)$ движется вдоль кривой Γ и при этом никогда не останавливается и не поворачивает обратно. Будем полагать, что кривая Γ не имеет точек самопересечения, т. е. не существует двух моментов $t_*, t_{**}, t_* \neq t_{**}$, что $\gamma(t_*) = \gamma(t_{**})$. Включим также в рассмотрение кривые, заданные на конечных интервалах $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$, допускающие доопределение в концевых точках $t = \hat{t}$ и $t = \check{t}$. Кривые вида $\Gamma = \gamma(t)$, когда $T = [\hat{t}, \check{t}]$, $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$, будем называть контурами.

Приводимые ниже в этом разделе определения являются переложением ранее введенных определений [9–12] со случая скалярной функции одного переменного на случай параметрически заданного отображения.

Рассмотрим локальные (определенные на малых интервалах) решения уравнения вида $G(t_1, t_2) = 0$. Для изучаемой краевой задачи вид функции $G(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, определен ниже. Локальные решения этого уравнения будем искать на прямоугольных открытых областях $\Pi_-(t_0) = \{(t_1, t_2) : t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)\}$. Здесь t_0 фиксировано, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Нас интересуют решения этого уравнения с заранее предписанными свойствами, а именно диффеоморфизмы [20]. Здесь диффеоморфизм — скалярная непрерывно дифференцируемая строго монотонная без нулей производной функция. В отличие от распространенного определения диффеоморфизма, согласно которому от функции требуется существование производных высших порядков, в настоящем исследовании достаточно требовать существования производной только первого порядка. Говоря о локальном диффеоморфизме, мы подразумеваем, что он определен в малом — в окрестности или же в полукрестности точки рассмотрения.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, определенный уравнением $G(t_1, t_2) = 0$, непрерывен слева в точке $t_1 = t_0$ и отображает левую полукрестность точки $t_1 = t_0$ в ее правую полукрестность, если выполняются условия

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Нетрудно видеть, что односторонняя непрерывность слева диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ обеспечивается требованием строгой отрицательности его производной. Введенный в рассмотрение диффеоморфизм можно рассматривать как локальную перепараметризацию кривой, которая (перепараметризация) задается в окрестности точки неявно с помощью функции G . Диффеоморфизмы естественным образом входят в арсенал дифференциальной геометрии и теории особенностей гладких отображений [19; 20].

Отметим особенности предложенной математической модели. Введенный диффеоморфизм носит локальный характер, причем определяется с одной стороны (слева) от точки $t_1 = t_0$. При этом конструкции присуща симметрия в следующем смысле. Обратный локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$ при соблюдении условия (A2) определения 1 существует, определен с другой стороны (справа) от той же точки $t_2 = t_0$ и наследует аналог этого условия в том смысле, что $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0$. Таким образом, в рамках этой конструкции точка $t = t_0$ “выколота” и рассматривается как предельный элемент. Это важное свойство математической модели, которое позволяет исследовать кривые с различными дифференциальными свойствами, не исключая негладкие кривые [9; 14]. На локальный диффеоморфизм можно смотреть так же, как на правило, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между парами точек, лежащими в окрестности точки рассмотрения по разные от нее стороны. Кроме того, здесь можно говорить о двойственной кривой $\tilde{\Gamma}$, определенной в плоскости переменных t_1, t_2 непрерывной склейкой графиков исходного диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ и ему обратного диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2)$. При этом дифференциальные свойства кривой в точке определяются дифференциальными свойствами исходной кривой Γ [12].

Выберем произвольно и зафиксируем два момента $t_1 \in T$ и $t_2 \in T$, $t_1 < t_2$. Проведем через точки $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ касательные прямые.

О п р е д е л е н и е 2. Псевдовершиной кривой Γ будем называть точку

$$(x_0, y_0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} (\bar{x}_*, \bar{y}_*),$$

где $(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (\bar{x}_*(t_1), \bar{y}_*(t_1)) = (x_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1)))$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_*, y_*) = (x_*(t_1, t_2), y_*(t_1, t_2))$ системы уравнений

$$\begin{cases} (x - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) = (y - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1), \\ (x - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) = (y - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

определяемое непрерывным слева в точке $t_1 = t_0$ локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$ левой полукрестности точки $t_1 = t_0$ на ее правую полукрестность, который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

- 1) (x_*, y_*) — точка пересечения касательных к кривой Γ в точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$,
- 2) $G(t_1, t_2) = \rho^2(\gamma(t_1), (x_*, y_*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_*, y_*))$ — разность квадратов расстояний между указанными точками $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ кривой Γ и точкой (x_*, y_*) пересечения касательных, проведенных через $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$.

О п р е д е л е н и е 3. Ветвью $L(x_0, y_0)$ сингулярного множества L , где (x_0, y_0) — псевдовершина Γ , будем называть множество точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (x - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) + (y - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1) = 0, \\ (x - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) + (y - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь $t_2 = t_2(t_1)$ — непрерывный слева в точке $t_1 = t_0$ локальный диффеоморфизм левой полукрестности точки $t_1 = t_0$ на ее правую полукрестность, который задается уравнением (2.2).

Система уравнений (2.3) является сопряженной к системе линейных уравнений (2.1) и определяет точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, которые имеют не менее двух ортогональных проекций на кривую Γ , причем проекции отстоят от соответствующей точки проецирования на равном расстоянии.

3. Необходимые условия третьего порядка

Необходимые условия существования псевдовершины в терминах производных порядка не выше второго оказываются вырожденными. Вырожденность проявляется в том, что эти условия в форме уравнения, связывающего производные первого и второго порядков, удовлетворяются не только в псевдовершине гладкой кривой, но и во всех других точках кривой. Одно из объяснений этого факта заключается в том, что псевдовершина является кратным решением уравнения (2.2).

В этом разделе мы преодолеем проблему кратности корней нелинейного уравнения (2.2) и обоснуем необходимые условия для псевдовершин в классе кривых, имеющих производные не ниже третьего порядка. Для сокращения и “компактификации” объема вычислений будем использовать локальные разложения скалярных функций вблизи точки $t = t_0$ по формуле Тейлора, технику струй. Пусть k — натуральное число. Следуя [19], под k -струей достаточное число раз дифференцируемой функции $f(t)$, $t \in T$, будем понимать многочлен Тейлора k -го порядка

$$J_{t, t_0}^k f(\delta) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \delta^i, \quad \delta = t - t_0.$$

Пусть f и g — дифференцируемые функции. Сумма струй этих функций находится естественным образом как сумма соответствующих многочленов Тейлора. Произведение k -струй

определяется по следующему правилу. Если

$$J_{t,t_0}^k f(\delta_1) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \delta_1^i, \quad \delta_1 = t - t_0, \quad J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2) = \sum_{i=0}^k \frac{g^{(i)}(t_0)}{i!} \delta_2^i, \quad \delta_2 = \tau - t_0,$$

k -струи функций f и g соответственно, то их произведением

$$J_{t,t_0}^k f(\delta_1) \otimes J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2)$$

называется многочлен, получаемый естественным (т. е. почленным) умножением многочленов $J_{t,t_0}^k f(\delta_1)$ и $J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2)$, в котором отброшены все члены степени выше k .

В последующем будем оперировать 1-, 2- и 3-струями. При этом, учитывая трехточечность рассматриваемой модели, будем различать струи, получаемые дифференцированием “назад”, т. е. когда $t_0 < t = t_2$, и струи, получаемые дифференцированием “вперед”, т. е. когда $t_0 > t = t_1$. Примем обозначения

$$\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0, \quad \Delta_2 = t_2 - t_0 > 0, \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Тогда две отличающиеся “направлением” дифференцирования 2-струи имеют вид

$$J_{t_2,t_0}^2 f(\Delta_2) = f(t_0) + \Delta_2 f'(t_0) + \frac{\Delta_2^2}{2} f''(t_0), \quad J_{t_1,t_0}^2 f(\Delta_1) = f(t_0) - \Delta_1 f'(t_0) + \frac{\Delta_1^2}{2} f''(t_0).$$

В силу введенного выше определения произведение этих 2-струй есть многочлен второго порядка относительно приращений Δ_1 и Δ_2 , которые, вообще говоря, рассматриваются как независимые друг от друга величины:

$$J_{t_2,t_0}^2 f(\Delta_2) \otimes J_{t_1,t_0}^2 g(\Delta_1) = f(t_0)g(t_0) - \Delta_1 f(t_0)g'(t_0) + \Delta_2 f'(t_0)g(t_0) - \Delta_1 \Delta_2 f'(t_0)g'(t_0) + \frac{\Delta_2^2}{2} f''(t_0)g(t_0) + \frac{\Delta_1^2}{2} f(t_0)g''(t_0).$$

Пусть $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$, $b(t) = (b_1(t), b_2(t))$ — дифференцируемые вектор-функции скалярного аргумента $t \in T = (\hat{t}, \check{t})$. Введем обозначения:

$\langle a(t), b(t) \rangle$ — скалярное произведение векторов $a(t)$ и $b(t)$;

$\det(a(t_1), b(t_2)) = a_1(t_1)b_2(t_2) - a_2(t_1)b_1(t_2)$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_1(t_1) & a_2(t_1) \\ b_1(t_2) & b_2(t_2) \end{pmatrix}$,

построенный на векторах $a(t_1)$ и $b(t_2)$, $t_1 \in T$, $t_2 \in T$.

В дальнейшем на кривую Γ будем накладывать условия:

(B1) $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in T$;

(B2) $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) \neq 0$, $t \in T$.

Условие (B1) — это условие регулярности кривой Γ , постулирующее невырожденность касательного вектора. Условие (B2) формально означает отличие от нуля кривизны кривой Γ в соответствующей точке. Напомним, что кривизна кривой Γ в точке $\gamma(t)$ определяется формулой $\kappa(\gamma(t)) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$ (см. [18]). Ненулевая кривизна свидетельствует о локальной выпуклости кривой, что гарантирует существование решений системы (2.1) в определении 2 псевдовершины. Кроме того, важно отметить, что условия (B1), (B2) обеспечивают для каждой координатной функции отличие от нуля хотя бы одной из производных первого и второго порядков. Это означает, что координатные функции не являются плоскими и, следовательно, могут быть локально аппроксимированы струями [20].

Теорема (Необходимые условия третьего порядка). *Если $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ — псевдовершина трижды дифференцируемой кривой $\Gamma = \gamma(t)$ и в точке $t = t_0$ выполняются условия (B1), (B2), то с необходимостью в указанной точке выполняется одно из следующих равенств:*

$$\gamma'_2 (\det(\gamma', \gamma''') \|\gamma'\|^2 - 3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma'' \rangle) = 0, \quad (3.1)$$

$$\gamma'_1 (\det(\gamma', \gamma''') \|\gamma'\|^2 - 3 \det(\gamma', \gamma'') \langle \gamma', \gamma''' \rangle) = 0. \quad (3.2)$$

Доказательство. По условию

$$(x_0, y_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (\bar{x}_*, \bar{y}_*),$$

где $(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (\bar{x}_*(t_1), \bar{y}_*(t_1))$ — однопараметрическое подмножество решений системы (2.1), определяемое локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, являющимся решением уравнения (2.2). Кривая регулярная. Пусть для определенности $\gamma'_1(t_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $t = t_0$ приращение $\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1) \neq 0$ и производные $\gamma'_1(t_2) \neq 0$, $\gamma'_1(t_1) \neq 0$. В этом случае уравнение (2.2) допускает эквивалентное представление

$$2(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))^2 - 2 \frac{\gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2)} (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) - \left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 = 0. \quad (3.3)$$

Теоретически возможны два случая:

С л у ч а й 1) $\left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) = 0.$

С л у ч а й 2) $\left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) \neq 0.$

Пусть реализовался случай 1). Тогда из (3.3) следует

$$2(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)) - 2 \frac{\gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2)} (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)) = 0.$$

Отсюда

$$(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)) \left(1 - \frac{\gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2)} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Множитель $1 - \frac{\gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2)}$ строго больше нуля, поскольку в рамках случая 1) отношения производных $\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)}$ и $\frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)}$ имеют разные знаки либо одновременно равны нулю.

Приравняв первый сомножитель к нулю, рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \gamma_2(t_0) + \gamma'_2(t_0)(t_1 - t_0) + o(t_1 - t_0) - \gamma_2(t_0) - \gamma'_2(t_0)(t_2 - t_0) + o(t_2 - t_0) &= 0, \\ \gamma'_2(t_0)(t_1 - t_0) + o(t_1 - t_0) - \gamma'_2(t_0)(t_2 - t_0) + o(t_2 - t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь переменные связаны в силу локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$, $\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0$. Поделив обе части уравнения (3.5) на $(t_1 - t_0)$ и перейдя к пределу, получим $2\gamma'_2(t_0) = 0$. Отсюда $\gamma'_2(t_0) = 0$.

Если допустить, что второй сомножитель в левой части уравнения равен нулю, то аналогичными рассуждениями придем к равенству $\gamma'_1(t_0) = 0$, которое невозможно по предположению. Стало быть, единственное решение уравнению (3.4) доставляет первый сомножитель. Получаем, что при заявленном предположении $\gamma'_1(t_0) \neq 0$ вторая компонента псевдовершины стационарна: $\gamma'_2(t_0) = 0$. На этом рассмотрение случая 1) завершено.

Очевидно, что если исходить из условия регулярности кривой и допустить теперь, что $\gamma'_2(t_0) \neq 0$, то столкнемся со случаем, симметричным случаю 1), и в итоге получим условие стационарности на первую компоненту псевдовершины: $\gamma'_1(t_0) = 0$.

Пусть теперь реализовался случай 2). После алгебраических преобразований уравнение (3.3) принимает вид

$$\left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}\right)^2 + 2 \frac{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) - \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)} \cdot \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - 1 = 0.$$

Примем обозначения

$$\lambda = \lambda(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)},$$

$$\mu = \mu(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) - \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)}.$$

Тогда относительно λ получаем квадратное уравнение $\lambda^2 + 2\mu\lambda - 1 = 0$.

Нельзя не обратить внимание на то, что уравнение по своей структуре близко к уравнению гармонической пропорции (золотого сечения) [25]. Наше уравнение имеет два действительных решения разного знака

$$\lambda_- = -\mu - \sqrt{\mu^2 + 1} < 0, \quad \lambda_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} > 0.$$

Таким образом трехчлен раскладывается на множители с действительными коэффициентами $\lambda^2 + 2\mu\lambda - 1 = (\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+)$.

Покажем, что точка $t_1 = t_0$ является его корнем, при этом является корнем второго сомножителя в разложении, т. е. указанная точка есть решение уравнения

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} + \mu(t_1, t_2) - \sqrt{(\mu(t_1, t_2))^2 - 1} = 0, \quad (3.6)$$

когда переменные связаны в силу диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$.

Преобразуем левую значимую часть уравнения (3.6) с помощью алгебраических операций. Поскольку

$$\mu^2 + 1 = \frac{(s(t_1))^2(s(t_2))^2}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)},$$

где $s(t) = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}$ — длина касательного вектора, то

$$\lambda_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} = \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_1) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)}.$$

Уравнение (3.6) принимает вид

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_1) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)} = 0. \quad (3.7)$$

Воспользуемся формулами для струй, дифференцируя функции всякий раз в точке $t = t_0$. При этом дифференцирование осуществляем “вперед” по отношению к точке $t = t_1$ и “назад” по отношению к точке $t = t_2$. Начнем с вычисления 1-струй:

$$J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 = \gamma_2 + \Delta_2 \gamma_2', \quad J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2 = \gamma_2 - \Delta_1 \gamma_2' \quad \text{и} \quad J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2 = (\Delta_2 + \Delta_1) \gamma_2' = \Delta \gamma_2',$$

$$J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1 = \gamma_1 + \Delta_2 \gamma_1', \quad J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1 = \gamma_1 - \Delta_1 \gamma_1' \quad \text{и} \quad J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1 = (\Delta_2 + \Delta_1) \gamma_1' = \Delta \gamma_1'.$$

Отсюда аппроксимация частного $\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}$ после сокращения на Δ принимает вид

$$\frac{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1} = \frac{\Delta \gamma_2'}{\Delta \gamma_1'} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}. \quad (3.8)$$

Найдем произведения 1-струй:

$$J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2 \otimes J_{t_2, t_0}^1 = \gamma_2' \gamma_1' - \Delta_1 \gamma_2'' \gamma_1' + \Delta_2 \gamma_1'' \gamma_2',$$

$$J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 \otimes J_{t_1, t_0}^1 = \gamma_2' \gamma_1' + \Delta_2 \gamma_2'' \gamma_1' - \Delta_1 \gamma_1'' \gamma_2'.$$

Тогда

$$J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2 \otimes J_{t_2, t_0}^1 + J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 \otimes J_{t_1, t_0}^1 = 2\gamma_2' \gamma_1' + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_2'' \gamma_1' + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1'' \gamma_2'.$$

В приведенных разложениях функций приращения выбирались независимыми. Далее свяжем их, полагая стесненными в силу диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ с предельными соотношениями

$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0$, $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1} = -1$. Поскольку

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\Delta_2}{\Delta} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{(t_2(t_1) - t_0)'}{(t_2(t_1) - t_1)'} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\Delta_1}{\Delta} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{(t_0 - t_1)'}{(t_2(t_1) - t_1)'} = \frac{1}{2},$$

то $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta} = 0$. Тогда разность приращений, найденная с учетом означенной дифференциальной связи $t_2 = t_2(t_1)$, является функцией класса $o(\Delta_1)$:

$$\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta} = o(\Delta_1), \quad \Delta_1 \downarrow 0. \quad (3.9)$$

Стало быть, соответствующие члены разложений вида $\text{const}(\Delta_2 - \Delta_1)^k$ имеют порядок малости $o(\Delta_1^k)$ и ими в разложении k -го порядка допустимо пренебречь. В то же время $\Delta_2 = \Delta_1 + o(\Delta_1)$ и

$$\Delta = 2\Delta_1 + o(\Delta_1), \quad \Delta_1 \downarrow 0. \quad (3.10)$$

С учетом этого замечания линейная аппроксимация $J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_1' + J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1'|_{t_2=t_2(t_1)}$ суммы $\gamma_2'(t_1) \gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2) \gamma_1'(t_1)$, вычисляемая в силу дифференциальной связи $t_2 = t_2(t_1)$, т. е. когда $\Delta_2 = \Delta_1 + o(\Delta_1)$, $\Delta_2 - \Delta_1 = o(\Delta_1)$, $\Delta_1 \downarrow 0$, “теряет” линейные по приращениям члены:

$$J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_1' + J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1'|_{t_2=t_2(t_1)} = 2\gamma_2' \gamma_1'.$$

Действуя аналогично, находим аппроксимации функции $\gamma_2'(t_1) \gamma_2'(t_1) - \gamma_1'(t_1) \gamma_1'(t_2)$ и $s(t_1) s(t_2)$:

$$\begin{aligned} & J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1' \\ &= (\gamma_2' - \Delta_1 \gamma_2'') \otimes (\gamma_2' + \Delta_2 \gamma_2'') - (\gamma_1' - \Delta_1 \gamma_1'') \otimes (\gamma_1' + \Delta_1 \gamma_1'') \\ &= (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_2'' \gamma_2' + (\Delta_1 - \Delta_2) \gamma_1'' \gamma_1'. \\ & (J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1')|_{t_2=t_2(t_1)} = (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2. \\ & J_{t_1, t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2, t_0}^1 s_2 = (s - \Delta_1 s') \otimes (s + \Delta_2 s) = s^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) (s')^2, \\ & (J_{t_1, t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2, t_0}^1 s_2)|_{t_2=t_2(t_1)} = s^2. \end{aligned}$$

Подставляя в левую часть уравнения (3.7) 1-струи, найденные с учетом диффеоморфизма, получим

$$\begin{aligned} & \frac{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1} \\ & - \frac{(J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1')|_{t_2=t_2(t_1)} + (J_{t_1, t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2, t_0}^1 s_2)|_{t_2=t_2(t_1)}}{J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_1' + J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1'|_{t_2=t_2(t_1)}} = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю означает, что существует функция $g(t_1)$ такая, что левая часть уравнения (3.7) раскладывается на множители

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} + \mu - \sqrt{\mu^2 + 1} = \Delta_1 g(t_1).$$

Другими словами, $t_1 = t_0$ является корнем именно этого уравнения — одного из двух уравнений, полученных при разложении квадратного трехчлена на множители. Этот вывод не прибавляет дополнительной информации в копилку необходимых условий. В то же время этот результат означает, что членов первого порядка при разложении функций недостаточно для получения необходимых условий. Увеличим порядок аппроксимации значимой части рассматриваемого уравнения (3.7). Перейдем в разложениях ко второму порядку, формируя многочлены второго порядка по приращениям.

Прежде отметим, что $t_1 = t_0$ является еще корнем и числителя, и знаменателя дроби $\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}$. Действительно (см. (3.8), (3.10)),

$$\left. \frac{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1} \right|_{t_2=t_2(t_1)} = \frac{\Delta \gamma_2'}{\Delta \gamma_1'} = \frac{2\Delta_1 \gamma_2'}{2\Delta_1 \gamma_1'} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}.$$

Это означает, что при построении аппроксимаций второго порядка для означенной дроби требуется считать струи, по крайней мере, на единицу выше по порядку. Вычислим 3-струи координатных функций:

$$J_{t_2, t_0}^3 \gamma_2 = \gamma_2 + \Delta_2 \gamma_2' + \frac{\Delta_2^2}{2} \gamma_2'' + \frac{\Delta_2^3}{6} \gamma_2''', \quad J_{t_1, t_0}^3 \gamma_2 = \gamma_2 - \Delta_1 \gamma_2' + \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma_2'' - \frac{\Delta_1^3}{6} \gamma_2''',$$

$$J_{t_2, t_0}^3 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^3 \gamma_2 = \left(\gamma_2' + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \gamma_2'' + \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + \Delta_1 \Delta_2}{6} \gamma_2''' \right),$$

$$J_{t_2, t_0}^3 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^3 \gamma_1 = \left(\gamma_1' + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \gamma_1'' + \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + \Delta_1 \Delta_2}{6} \gamma_1''' \right).$$

Отсюда аппроксимация частного $\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}$ после сокращения на Δ принимает вид

$$\frac{J_{t_2, t_0}^3 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^3 \gamma_2}{J_{t_2, t_0}^3 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^3 \gamma_1} = \frac{\gamma_2' + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \gamma_2'' + \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + \Delta_1 \Delta_2}{6} \gamma_2'''}{\gamma_1' + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \gamma_1'' + \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + \Delta_1 \Delta_2}{6} \gamma_1'''}$$

Эта же аппроксимация, но улучшенная в силу диффеоморфизма с учетом (3.9), избавляет от членов с производной второго порядка:

$$\left. \frac{J_{t_2, t_0}^3 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^3 \gamma_2}{J_{t_2, t_0}^3 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^3 \gamma_1} \right|_{t_2=t_2(t_1)} = \frac{\gamma_2' + \frac{\Delta_2^2}{6} \gamma_2'''}{\gamma_1' + \frac{\Delta_1^2}{6} \gamma_1'''}$$

Аппроксимируем произведения функций:

$$J_{t_1, t_0}^2 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_1' = \gamma_1' \gamma_2' - \Delta_1 \gamma_1' \gamma_2'' + \Delta_2 \gamma_2' \gamma_1'' - \Delta_1 \Delta_2 \gamma_1'' \gamma_2'' + \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma_1' \gamma_2''' + \frac{\Delta_2^2}{2} \gamma_1''' \gamma_2',$$

$$J_{t_2, t_0}^2 \gamma_2' \otimes J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1' = \gamma_1' \gamma_2' + \Delta_2 \gamma_1' \gamma_2'' + \frac{\Delta_2^2}{2} \gamma_1' \gamma_2''' - \Delta_1 \gamma_1'' \gamma_2' - \Delta_1 \Delta_2 \gamma_1'' \gamma_2'' + \frac{\Delta_1^2}{2} \gamma_1''' \gamma_2',$$

$$J_{t_1, t_0}^2 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_1' + J_{t_2, t_0}^2 \gamma_2' \otimes J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1' = 2\gamma_1' \gamma_2' + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1' \gamma_2'' + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_2' \gamma_1'' - 2\Delta_1 \Delta_2 \gamma_1'' \gamma_2'' \\ + \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{2} \gamma_1' \gamma_2''' + \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{2} \gamma_1'' \gamma_2'.$$

Сложим:

$$(J_{t_1, t_0}^2 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_2' + J_{t_2, t_0}^2 \gamma_2' \otimes J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1')|_{t_2=t_2(t_1)} = 2\gamma_1' \gamma_2' - 2\Delta_1^2 \gamma_1'' \gamma_2'' + \Delta_1^2 \gamma_1' \gamma_2''' + \Delta_1^2 \gamma_1''' \gamma_2'.$$

Продолжим вычисления:

$$J_{t_1, t_0}^2 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_2' - J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_1' = (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_2'' \gamma_2' + (\Delta_2 - \Delta_1) \gamma_1'' \gamma_1' \\ + \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{2} (\gamma_2' \gamma_2''' - \gamma_1' \gamma_1''') + \Delta_1 \Delta_2 ((\gamma_1'')^2 - (\gamma_2'')^2).$$

Тогда

$$(J_{t_1, t_0}^2 \gamma_2' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_2' - J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1' \otimes J_{t_2, t_0}^2 \gamma_1')|_{t_2=t_2(t_1)} = (\gamma_1')^2 - (\gamma_2')^2 + \Delta_1^2 ((\gamma_1'')^2 - (\gamma_2'')^2) + \gamma_2' \gamma_2''' - \gamma_1' \gamma_1'''.$$

Разберемся с аппроксимациями произведения длин касательных векторов. Структура разложения для функции $s = s(t)$ идентична структуре соответствующего разложения для любой другой (коэффициенты многочлена Тейлора вычисляются по одним и тем же правилам вне зависимости от функции). Поэтому, заменив, например, в формуле для $J_{t_1, t_0}^2 \gamma_1'$ величину γ_1' на $s_1 = s(t_1)$, а в формуле для $J_{t_2, t_0}^2 \gamma_2'$ величину γ_2' на $s_2 = s(t_2)$, получим

$$J_{t_1, t_0}^2 s_1 \otimes J_{t_2, t_0}^2 s_2 = s^2 - \Delta_1^2 (s')^2 + \Delta_1^2 s s''.$$

Подставив производные длины $s = s(t)$ касательного вектора (аргумент опущен)

$$s' = \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s},$$

$$s'' = \frac{(\|\gamma''\|^2 + \langle \gamma', \gamma'''' \rangle) s^2 - \langle \gamma', \gamma'' \rangle^2}{s^3} = \frac{\langle \gamma', \gamma'''' \rangle s^2 + (\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^3},$$

получим

$$J_{t_1, t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2, t_0}^1 s_2|_{t_2=t_2(t_1)} = s^2 - \Delta_1^2 \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle^2}{s^2} + \Delta_1^2 \langle \gamma', \gamma'''' \rangle + \Delta_1^2 \frac{(\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2}.$$

Воспользуемся найденными результатами локальной аппроксимации функций, определяющих значимую часть уравнения (3.7), и запишем аппроксимацию левой части этого уравнения с помощью струй:

$$\frac{\gamma_2' + \frac{\Delta_1^2}{6} \gamma_2''''}{\gamma_1' + \frac{\Delta_1^2}{6} \gamma_1''''} - \frac{(\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 + \Delta_1^2 ((\gamma_1'')^2 - (\gamma_2'')^2) + \gamma_2' \gamma_2''' - \gamma_1' \gamma_1'''}{2\gamma_1' \gamma_2' + \Delta_1^2 (-2\gamma_1'' \gamma_2'' + \gamma_1' \gamma_2''' + \gamma_1''' \gamma_2')} \\ = \frac{\gamma_2' + \frac{\Delta_1^2}{6} \gamma_2''''}{\gamma_1' + \frac{\Delta_1^2}{6} \gamma_1''''} - \frac{2(\gamma_2')^2 + \Delta_1^2 (\gamma_2' \gamma_2''' - \gamma_1' \gamma_1''') + (\gamma_1'')^2 - (\gamma_2'')^2 - (s')^2 + s s''}{2\gamma_1' \gamma_2' + \Delta_1^2 (-2\gamma_1'' \gamma_2'' + \gamma_1' \gamma_2''' + \gamma_1''' \gamma_2')}.$$

Отсюда аппроксимация числителя результирующей дроби левой части уравнения (3.7), выписанная до членов второго порядка включительно, принимает вид

$$2\gamma_1' (\gamma_2')^2 + \frac{\Delta_1^2}{3} \gamma_1' \gamma_2' \gamma_2''' + \Delta_1^2 \gamma_2' (-2\gamma_1'' \gamma_2'' + \gamma_1' \gamma_2''' + \gamma_1''' \gamma_2') - 2\gamma_1' (\gamma_2')^2 - \frac{\Delta_1^2}{3} (\gamma_2')^2 \gamma_1'''$$

$$\begin{aligned}
 & + \Delta_1^2 \gamma_1' (\gamma_1' \gamma_1''' - \gamma_2' \gamma_2''' - (\gamma_1'')^2 + (\gamma_2'')^2 + (s')^2 - ss'') \\
 & = \frac{\Delta_1^2}{3} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma''') + \Delta_1^2 \gamma_2' (-2\gamma_1'' \gamma_2'' + \gamma_1' \gamma_2''' + \gamma_1''' \gamma_2') \\
 & + \Delta_1^2 \gamma_1' (\gamma_1' \gamma_1''' - \gamma_2' \gamma_2''' - (\gamma_1'')^2 + (\gamma_2'')^2 + (s')^2 - ss'') \\
 & = \frac{\Delta_1^2}{3} \gamma_2' \det(\gamma', \gamma''') + \Delta_1^2 \gamma_1' \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle^2 - (\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} \\
 & + \Delta_1^2 (-\gamma_2' \det(\gamma', \gamma''') + \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma''' \rangle).
 \end{aligned}$$

Здесь в конце равенства учтено соотношение

$$(s')^2 - ss'' = \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle^2 - (\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} - \langle \gamma', \gamma''' \rangle.$$

Найденный многочлен является аппроксимацией на языке струй с точностью до $o(\Delta_1^2)$ левой части уравнения (3.7). В итоге, поделив разложение левой части уравнения (3.7) на Δ_1^2 и перейдя к пределу при $t_1 \rightarrow t_0 - 0$, имеем

$$-\frac{2\gamma_2'}{3} \det(\gamma', \gamma''') + \gamma_1' \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle^2 - (\det(\gamma', \gamma''))^2}{s^2} + \gamma_2'' \det(\gamma', \gamma'') - \gamma_1'' \langle \gamma', \gamma''' \rangle = 0.$$

Необходимые условия третьего порядка получены. Упростим их формат представления с помощью алгебраических преобразований:

$$-\frac{2\gamma_2'}{3} \det(\gamma', \gamma''') + \frac{2\gamma_2' \langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'')}{s^2} = 0.$$

Отсюда незамедлительно получаем (3.1).

На этом рассмотрение случая 2) завершено. Вывод равенства (3.1) осуществлялся при предположении $\gamma_1'(t_0) \neq 0$. Если же допустить, что $\gamma_2'(t_0) \neq 0$, то, повторяя рассуждения, получим симметричный результат. А именно псевдовершина $\gamma = \gamma(t_0)$ удовлетворит равенству (3.2).

Обобщая заметим, что в рамках случая 1) и ему симметричного случая в качестве необходимых условий получили выполнение одного из двух равенств:

- 1) $\gamma_2'(t_0) = 0$, когда $\gamma_1'(t_0) \neq 0$;
- 2) $\gamma_1'(t_0) = 0$, когда $\gamma_2'(t_0) \neq 0$.

Условия (3.1) и (3.2) являются более общими. \square

Интерпретация результата следующая. Псевдовершины краевого множества, порождающие сингулярные кривые, содержатся во множестве, объединяющем точки двух совокупностей. Первую совокупность составляют точки со стационарной кривизной, т. е. точки $\gamma = \gamma(t_0)$, в которых выполняется равенство

$$\det(\gamma', \gamma''') \|\gamma'\|^2 - 3\langle \gamma', \gamma'' \rangle \det(\gamma', \gamma'') = 0.$$

Вторую совокупность составляют точки $\gamma = \gamma(t_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$, в которых одна компонента стационарная, а вторая таковой не является, т. е. здесь выполняется одно условие из двух: $\gamma_1'(t_0) = 0$ и $\gamma_2'(t_0) \neq 0$ либо же $\gamma_2'(t_0) = 0$ и $\gamma_1'(t_0) \neq 0$. Ясно, что два выделенных подмножества точек, вообще говоря, могут пересекаться по непустому множеству.

4. Пример построения решения краевой задачи Дирихле

Пусть в задаче Дирихле (1.1), (1.2) контур Γ , ограничивающий краевое множество M , задан уравнением

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos mt + h \cos(t - mt), \\ y = (R - mR) \sin mt - h \sin(t - mt). \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь параметры $t \in [0, 8\pi]$, $R = 1$, $m = 1/4$, $h = 1/5$. Кривая (4.1) известна как гипотрохоида, она является траекторией точки, расположенной на круге радиуса $r = mR$ на расстоянии h от его центра, катящемся без скольжения с внутренней стороны окружности радиуса R .

Теорема позволяет найти псевдовершины $(0.55, 0.55)$, $(0.55, -0.55)$, $(-0.55, -0.55)$, $(-0.55, 0.55)$, порождающие четыре ветви сингулярного множества L . На рис. 1. псевдовершины помечены маркерами в виде кружков. Ветви сингулярного множества являются открытыми лучами и лежат на биссектрисах всех четырех квадрантов. На рис. 1. также показана эволюция волновых фронтов Φ — линий уровня функции оптимального результата $u = u(x, y)$ для соответствующей задачи о быстродействии. График этой недифференцируемой функции представлен на рис. 2. Функция $u = u(x, y)$ является супердифференцируемой, т. е. при локальном рассмотрении она либо дифференцируема, либо недифференцируема и вогнута.

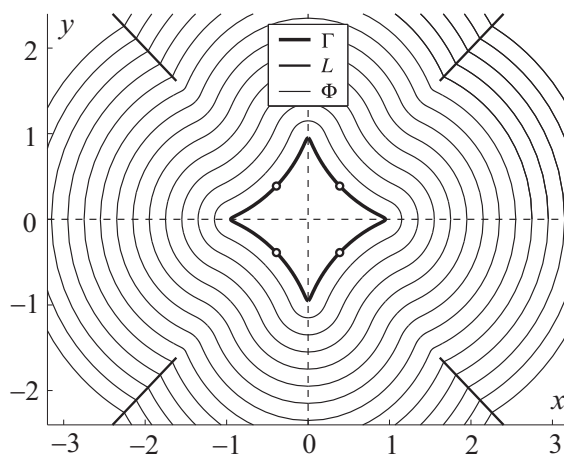


Рис. 1. Контур Γ , псевдовершины краевого множества, сингулярное множество L и волновые фронты Φ .

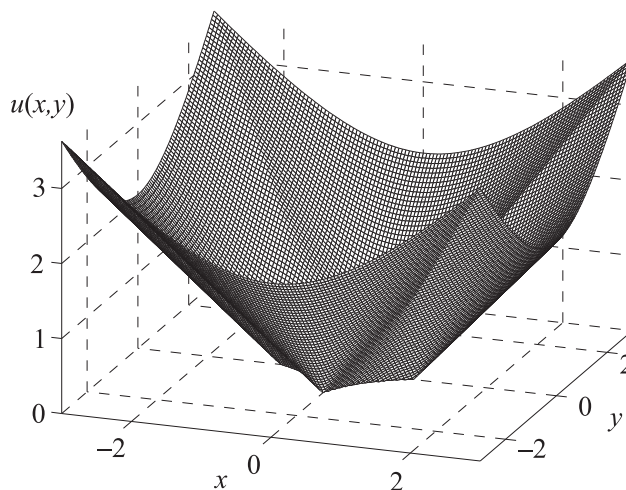


Рис. 2. График функции оптимального результата $u = u(x, y)$ в задаче о быстродействии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I // Мат. сб. 1974. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
2. **Субботин А.И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.
3. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
4. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Институт компьютерных технологий. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
5. **Колокольцов В.Н., Маслов В.П.** Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // Докл. АН СССР. 1987. Vol. 296 (4). С. 796–800.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.** α -множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с.
8. **Успенский А.А.** Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. 21 с.
9. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Тр. 9-й Междунар. Четаевской конф. 2007. Т. 5. С. 224–236.
10. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. 2008. № 3. С. 27–37.
11. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
12. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрогодействия с круговой индикатрисой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.
13. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение функции оптимального результата в задаче быстрогодействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
14. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
15. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрогодействия // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2013. Сер. 10, вып. 3. С. 157–167.
16. **Успенский А.А.** Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрогодействия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 276–290.
17. **Слюсарев Г.Г.** Геометрическая оптика. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 332 с.
18. **Бюшгенс С.С.** Дифференциальная геометрия. М.: ГИТТЛ, 1940. 300 с.
19. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
20. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
21. **Закалюкин В.М.** Огибающие семейств волновых фронтов и теория управления // Тр. МИАН. 1995. Т. 209. С. 133–142.
22. **Бляшке В.** Круг и шар. М.: Наука, 1967. 232 с.
23. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
24. **Субботина Н.Н., Колпакова Е.А.** О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана в терминах классических характеристик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 202–218.
25. **Ohm Martin.** Lehrbuch der gesamten höhern Mathematik. Bd 2. Leipzig: Friedrich Volckmar, 1835.

Успенский Александр Александрович

Поступила 10.12.2014

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского

e-mail: uspen@imm.uran.ru