ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.948

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО АЛГОРИТМА, ОСНОВАННОГО НА МЕТОДЕ М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА

В. П. Танана, А. И. Сидикова

В статье рассматривается операторное уравнение первого рода с погрешностью в операторе и в правой части этого уравнения. В качестве метода берется функция от этого оператора, зависящая от положительного параметра α. Получена оценка снизу для метода решения данного уравнения при любых значениях α. Построен регуляризующий алгоритм, основанный на методе М.М. Лаврентьева, для него получена двухсторонняя оценка погрешности. Для метода М.М. Лаврентьева построены дискретные аппроксимации данного метода. Сделана оценка погрешности этих аппроксимаций. Эти дискретные аппроксимации в дальнейшем использовались при возмущении оператора уравнения.

Ключевые слова: операторное уравнение, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. I. Sidikova. A two-sided error estimate for a regularizing method based on M.M. Lavrent'ev's method.

We consider an operator equation of the first kind with error in the operator and in the right-hand side of the equation. The method is a function of this operator depending on a positive parameter α. A lower estimate of a method of solving this equation for any value of α is obtained. A regularizing method based on Lavrent'ev's method is constructed, and a two-sided error estimate is obtained for this method. Discrete approximations of Lavrent'ev's method are constructed. Error estimates are obtained for these approximations. The discrete approximations were further used for a perturbation of the operator in the equation.

Keywords: operator equation, regularization, error estimation, ill-posed problem.

Введение

Решение некорректно поставленных задач невозможно без использования вычислительной техники. Поэтому при их решении важное место занимают квадратурные, конечноразностные и другие методы дискретизации, позволяющие свести исходную задачу к конечномерной [1–4].

До последнего времени некорректные задачи, как правило, решались в два этапа. Сначала для решения задачи использовали оптимальный по порядку метод и получали оценку погрешности для приближенного решения. Затем использовали дискретизацию, строили конечномерный вариант метода регуляризации, но при этом исследовании конечномерных аппроксимаций ограничивались лишь доказательством сходимости последних. Одной из работ, в которой получена оценка погрешности конечномерной аппроксимации, является [5]. В работе [6] был рассмотрен конечномерный регуляризующий алгоритм для широкого класса методов регуляризации и получена оценка погрешности, использующая модуль непрерывности обратного оператора.

В настоящей статье результаты работы [7] обобщаются на более широкий класс методов регуляризации. Примеры таких методов — метод М.М. Лаврентьева [8] и метод квазиобращения [9], которые для некоторых классов корректности при любых значениях параметра регуляризации дают погрешность, не сравнимую с модулем непрерывности обратного оператора (см. [10, с. 48]).

1. Постановка задачи

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. $(H \to H)$ — пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство H в $H, (H \to H)_1$ — множество линейных ограниченных, положительных и самосопряженных операторов, отображающих H в H, $(H \to H)_2$ — множество линейных инъективных, вполне непрерывных операторов, отображающих H в H, $(H \to H)_3$ — линейное многообразие линейных ограниченных операторов, имеющих конечномерное множество значений.

Предположим, что $M_r = B\overline{S}_r$, $\overline{S}_r = \{v\colon v \in H, \ \|v\| \le r\}$, а $B \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{1.1}$$

где $u \in M_r$, $f \in H$ и $A \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$.

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1.1), принадлежащее множеству M_r, но элемент f_0 нам не известен, а вместо него даны $f_\delta \in H$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Кроме того, при построении численного алгоритма для решения уравнения (1.1) оператор A нам неудобен. Поэтому вместо него используем некоторый приближенный оператор $A_h \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_3$ такой, что $\|A_h - A\| \le h$, для которого уровень погрешности $h \in (0, h_0]$ будем считать известным.

Требуется, используя априорную информацию A_h, f_δ, h, δ и M_r, определить приближенное решение $u_{\delta h}$ уравнения (1.1) и оценить величину уклонения $\|u_{\delta h} - u_0\|$ приближенного решения $u_{\delta h}$ от точного.

Теперь сведем уравнение (1.1) к конечномерному

$$A_h u = \bar{f}_{\delta,h}, \tag{1.2}$$

где $\bar{f}_{\delta h} = pr[f_\delta, R(A_h)]$, $pr[f_\delta, R(A_h)]$ — метрическая проекция элемента f_δ на множество значений $R(A_h)$ оператора A_h.

В качестве регуляризующего семейства операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ рассмотрим обобщение известного понятия, предложенного в [11], на класс уравнений (1.1) с приближенно заданным оператором.

Теперь опишем множество D, из которого будем брать приближенные операторы $\overline{A}$.

Так как $A \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$, по теореме Гильберта — Шмидта [12, с. 283] существует полная ортонормированная система $\{e_n\}$ собственных векторов оператора A такая, что для любого $u \in H$ имеем

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n u_n e_n,$$

где σ_n— собственное значение оператора A, а $u_n = (u, e_n)$.

Предположим, что $D \subset (H \to H)_1 \cap (H \to H)_3$ и для любого оператора $\overline{A} \in D$ и любого n справедливо неравенство $0 \le \overline{\sigma}_n \le \sigma_n + h_0$, где $\overline{\sigma}_n$— собственное значение оператора $\overline{A}$.

Для определения регуляризующего семейства операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ введем функциональную последовательность $\{\Phi_n(\sigma, \alpha)\}$ такую, что для любого n

$$\Phi_n(\sigma, \alpha) \in C([0, \sigma_n + h_0] \times (0, \alpha_0]) \tag{1.3}$$

и для любого $\overline{\alpha} \in (0, \alpha_0)$ найдется число $r(\overline{\alpha})$ такое, что для любых значений n, $\sigma \in [0, \sigma_n + h_0]$ и $\alpha \in [\overline{\alpha}, \alpha_0]$ имеем

$$|\Phi_n(\sigma, \alpha)| \le r(\overline{\alpha}). \tag{1.4}$$

Пусть $C \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$, $f \in H$, а $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Тогда

$$P_\alpha(C)f = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\sigma_n, \alpha)\overline{f}_n \overline{e}_n, \tag{1.5}$$

где $\overline{e}_n$ — собственный вектор оператора C, а σ_n — его собственное значение.

Кроме того, предположим, что для любого n

$$|\sigma_n \Phi_n(\sigma_n, \alpha) - 1| \to 0 \ \text{ при } \ \alpha \to 0 \tag{1.6}$$

и существуют числа $\alpha_1 \in (0, \alpha_0)$ и $r(\alpha_1) > 0$ такие, что для любых значений n и $\alpha \in (0, \alpha_1)$ справедливо неравенство

$$|\sigma_n \Phi_n(\sigma_n, \alpha) - 1| \le r(\alpha_1). \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) по критерию точечной сходимости линейных операторов [13, с. 15] следует, что семейство операторов $\{P_\alpha(C)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ регуляризует уравнение $Cu = f$ на всем пространстве H.

Далее, применим к уравнению (1.2) регуляризующее семейство операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$, а элемент $u^\alpha_{\delta h} = P_\alpha(A_h)\overline{f}_{\delta h}$ назовем регуляризованным решением уравнения (1.1) с приближенными исходными данными $A_h \in D$ и $f_\delta \in H$.

Для выбора параметра α в регуляризованном решении $u^\alpha_{\delta h}$ и оценки погрешности, следуя [7], введем величину

$$\Delta[P_\alpha(A)] = \sup_{u, f_\delta, A_h} \Big\{ \|P_\alpha(A_h)\overline{f}_{\delta h} - u\| \colon u \in M_r, \ A_h \in D,$$

$$\|A_h - A\| \le h, \ f_\delta \in H, \ \|f_\delta - Au\| \le \delta \Big\}, \tag{1.8}$$

где $A \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$, а $\overline{f}_{\delta h} = pr[f_\delta, R(A_h)]$.

Используя (1.8), выберем $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta, h, r)$ таким образом, что существует $d > 1$ такое, что для любых $\delta \in (0, \delta_0]$ и $h \in (0, h_0]$ имеем

$$\inf_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \Delta[P_\alpha(A)] \le \Delta[P_{\overline{\alpha}(\delta,h,r)}(A)] \le d \cdot \inf_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \Delta[P_\alpha(A)].$$

2. Оценка для погрешности $\Delta[P_\alpha(A)]$

Предположим, что $B = g(A)$, где $g(\sigma_n) \downarrow n$ и $\lim\limits_{\sigma_n \to 0} g(\sigma_n) = 0$.

В дальнейшем будет часто использоваться следующий известный факт, приведенный в [13, с. 343].

Пусть $C \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$. Тогда

$$\|C\| = \sup_n \sigma_n. \tag{2.1}$$

Из леммы, доказанной в [13, с. 320], следует существование положительного корня из этого оператора, который обозначим $\sqrt{C}$. При этом

$$\|C\| = \sup_{\|u\| \le 1} \|Cu\| = \sup_{\|u\| \le 1} \|\sqrt{C}u\|^2 = \sup_{\|u\| \le 1} (Cu, u). \tag{2.2}$$

Из (2.2) на основании леммы, доказанной в [12, с. 284], будет следовать, что $\sup_{\|u\| \le 1}(Cu, u) = \sigma_1$, где σ_1- максимальное собственное значение оператора C.

Таким образом, имеем $\|C\| = \sigma_1$, $\|B\| = g(\sigma_1)$ и $\|P_\alpha(C)\| = \sup_n |\Phi_n(\sigma_n, \alpha)|$, $0 < \alpha \le \alpha_0$, где оператор $P_\alpha(C)$ определен формулой (1.5).

Лемма 1. *Пусть семейство операторов* $\{P_\alpha(C)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ *определено формулой* (1.5), *а последовательности* $\{\sigma_n\}$ *и* $\{\Phi_n(\sigma_n, \alpha)\}$ *удовлетворяют условиям* (1.6) *и* (1.7).

Тогда $\|P_\alpha(C)\| \to \infty$ *при* $\alpha \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для удобства величину $\|P_\alpha(C)\|$ обозначим через $F(\alpha)$. Предположим противное. Тогда найдутся число K и последовательность $\{\alpha_k\}$ такие, что $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ и для любого k справедливо

$$F(\alpha_k) \leq K. \tag{2.3}$$

В силу $F(\alpha_k) = \sup_n |\Phi_n(\sigma_n, \alpha_k)|$ и неравенства (2.3) следует, что для любого k имеет место оценка

$$\|P_{\alpha_k}(C)\| \leq K. \tag{2.4}$$

Из (1.6) и (1.7) вытекает, что последовательность $\{P_{\alpha_k}(C)\}$ регуляризует уравнение $Cu = f$ на всем пространстве H , т. е. для любого $f = Cu$

$$P_{\alpha_k}(C)f \to u \ \text{ при } \ k \to \infty, \tag{2.5}$$

где $u = C^{-1}f$.

Ввиду плотности в H множества значений $R(C)$ оператора C, а также (2.4) и (2.5) для любого $f \in H$ справедливо

$$P_{\alpha_k}(C)f \to \overline{C}^{-1}f \ \text{ при } \ k \to \infty,$$

где $\overline{C}^{-1}$ — продолжение по непрерывности оператора C^{-1} на H.

Таким образом, $\|\overline{C}^{-1}\| \leq K$ и, следовательно, $\|C^{-1}\| \leq K$, что противоречит полной непрерывности оператора C.

Тем самым лемма доказана. □

Теперь рассмотрим оператор $B - P_\alpha(A)AB$.

Из формулы (2.1) получаем, что

$$G(\alpha)\|B - P_\alpha(A)AB\| := \sup_n |[1 - \sigma_n\Phi_n(\sigma_n, \alpha)]g(\sigma_n)|. \tag{2.6}$$

Лемма 2. *Пусть семейство операторов* $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \leq \alpha_0\}$ *определено формулой* (1.5) *и последовательность функций* $\{\Phi_n(\sigma_n, \alpha)\}$ *удовлетворяет условиям* (1.3) *и* (1.4).

Тогда функция $G(\alpha)$ *непрерывна на полуинтервале* $(0, \alpha_0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий (1.3) и (1.4) по критерию точечной сходимости следует сильная непрерывность по α семейства операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \leq \alpha_0\}$.

Пусть $\overline{\alpha} \in (0, \alpha_0]$, $\{\alpha_k\} \subset (0, \alpha_0]$, $\alpha_k \to \overline{\alpha}$ при $k \to \infty$.

Тогда из сильной непрерывности семейства $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \leq \alpha_0\}$ следует, что для любого $u \in H$ выполняется

$$P_{\alpha_k}(A)Au \to P_{\overline{\alpha}}(A)Au \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{2.7}$$

Так как $M_r = B\overline{S}_r$ компактно в H, то из (2.7) следует равномерная сходимость последовательности операторов $\{P_{\alpha_k}(A)A\}$ к оператору $P_{\overline{\alpha}}(A)A$ на множестве M_r.

Таким образом, $\|P_{\alpha_k}(A)AB - P_{\overline{\alpha}}(A)AB\| \to 0$ при $k \to \infty$ и, следовательно,

$$\|B - P_{\alpha_k}(A)AB\| - \|B - P_{\overline{\alpha}}(A)AB\| \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) получаем, что $G(\alpha)$ непрерывна в точке $\overline{\alpha}$. Тем самым лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть семейство операторов* $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \leq \alpha_0\}$ *определено формулой* (1.5), *а последовательности* $\{\sigma_n\}$ *и* $\{\Phi_n(\sigma_n, \alpha)\}$ *удовлетворяют условиям* (1.6), (1.7).

Тогда функция $G(\alpha)$, *определенная формулой* (2.6), *удовлетворяет условию* $G(\alpha) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий (1.6) и (1.7) следует, что семейство операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ регуляризует уравнение (1.1) на всем пространстве H.

Пусть $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда для любого $u \in H$ имеем

$$P_{\alpha_k}(A)Au \to u \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.9}$$

Из полной непрерывности оператора B следует компактность множества $B\,\overline{S}_1$ в пространстве H, где $\overline{S}_1 = \{v\colon v \in H, \|v\| \le 1\}$.

Из (2.9) получаем, что $P_{\alpha_k}(A)Au$ сходится равномерно к u на множестве $B\,\overline{S}_1$.

Таким образом, $\sup_{\|v\|\le 1} \|Bv - P_{\alpha_k}(A)ABv\| \to 0$ при $k \to \infty$, и, следовательно,

$$\|B - P_{\alpha_k}(A)AB\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тем самым лемма доказана. □

Пусть $F(\alpha) \in C(0, \alpha_0]$ и

$$F(\alpha) \downarrow\downarrow \quad \text{по } \alpha \text{ на } \ (0, \alpha_0], \tag{2.10}$$

а также существуют неотрицательные функции $G_1(\alpha)$ и $G_2(\alpha)$ такие, что для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$ выполняется неравенство

$$G_1(\alpha) \le G(\alpha) \le G_2(\alpha). \tag{2.11}$$

Предположим, что $G_2(\alpha) \in C(0, \alpha_0]$ и справедливы следующие условия:

$$G_2(\alpha) \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0, \tag{2.12}$$

$$G_1(\alpha) \uparrow \ \text{по } \alpha \text{ на } (0, \alpha_0], \tag{2.13}$$

$$G_2(\alpha) \uparrow \ \text{по } \alpha \text{ на } (0, \alpha_0]. \tag{2.14}$$

Рассмотрим уравнение

$$r\,G_2(\alpha) = \frac{1}{18} F(\alpha) \cdot [r\|B\|h + \delta]. \tag{2.15}$$

Из леммы 1, условий (2.10)–(2.14) и в силу $rG_2(\alpha_0) > \dfrac{1}{18} F(\alpha_0)\cdot[r\|B\|h+\delta]$ уравнение (2.15) имеет единственное решение $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta, h, r)$.

Теперь перейдем к оценке снизу для величины $\inf\limits_{0<\alpha\le\alpha_0} \Delta[P_\alpha(A)]$.

Лемма 4. *Пусть* $\overline{\alpha}(\delta, h, r)$ *определено уравнением* (2.15), *а* $\alpha \ge \overline{\alpha}(\delta, h, r)$.
Тогда $\Delta[P_\alpha(A)] \ge \dfrac{r}{2}\, G_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $\alpha \ge \overline{\alpha}(\delta, h, r)$ на основании (2.13) следует, что

$$r\ G_1(\alpha) \ge rG_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)].$$

Так как оператор $B - P_\alpha(A)AB$ является функцией оператора A, то он имеет те же собственные векторы e_n, что и оператор A, а собственные значения этого оператора, отвечающие e_n, обозначим через μ_n.

Таким образом, из (2.1) имеем

$$\|B - P_\alpha(A)AB\| = \sup_n |\mu_n(\alpha)|, \tag{2.16}$$

а с учетом (2.6) справедливо $G(\alpha) = \sup_n |\mu_n(\alpha)|$.

Из (2.16) следует существование номера $\iota(\alpha)$ такого, что

$$|\mu_{\iota(\alpha)}| \ge \frac{1}{2} \sup_n |\mu_n(\alpha)|. \tag{2.17}$$

Из полной непрерывности оператора A имеем, что $\{\sigma_k\}$, убывая, стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, существует номер k такой, что

$$|\sigma_{k+1}| \le \frac{h}{2}, \quad k \ge \iota(\alpha). \tag{2.18}$$

Отсюда и из (2.18) получаем

$$\sup_n\{|\mu_n(\alpha)|;\ n = 1, 2, \dots, k\} \ge \frac{1}{2} G(\alpha). \tag{2.19}$$

Рассмотрим подпространство H_k, порожденное элементами $e_1, e_2, \dots, e_k$, и определим оператор $\overline{A}_h$ формулой

$$\overline{A}_h u = \begin{cases} Au, & u \in H_k; \\ 0, & u \in H_k^{\perp}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Тогда из (2.18) и (2.20) вытекает

$$\|\overline{A}_h - A\| = \sup_{n \ge k+1} \sigma_n \le h. \tag{2.21}$$

Пусть $u_0 \in M_r \cap H_k$, а $f_\delta = Au_0$. Тогда $u_0 \in M_r$ и для любого $\delta > 0$ $\|f_\delta - Au_0\| \le \delta$.
Таким образом, из (1.8), (2.20) и (2.21) следует

$$\Delta[P_\alpha(A)] \ge \sup_{u_0} \bigl\{\|P_\alpha(\overline{A}_h) f_\delta - u_0\| \colon u_0 \in M_r \cap H_k,\ f_\delta = Au_0\bigr\}. \tag{2.22}$$

Так как $u_0 \in M_r \cap H_k$, то существует элемент $v_0 \in H_k$ такой, что

$$u_0 = Bv_0, \quad \|v_0\| \le r. \tag{2.23}$$

Из (2.20), (2.23) имеем, что

$$\sup_{u_0} \bigl\{\|P_\alpha(\overline{A}_h) f_\delta - u_0\| \colon u_0 \in M_r \cap H_k,\ f_\delta = Au_0\bigr\} = \sup_{v_0 \in H_k} \bigl\{\|P_\alpha(A)ABv_0 - Bv_0\| \colon \|v_0\| \le r\bigr\}.$$

Обозначим через $G_k(\alpha)$ функцию, определяемую формулой

$$G_k(\alpha) = \sup_{v_0} \bigl\{\|Bv_0 - P_\alpha(A)ABv_0\| \colon v_0 \in H_k,\ \|v_0\| \le 1\bigr\}. \tag{2.24}$$

Так как подпространство H_k порождено собственными элементами e_n оператора $B - P_\alpha(A)AB$, отвечающими собственным значениям $\mu_n(\alpha)$, $n \le k$, этого оператора, то

$$\sup_{v_0} \bigl\{\|Bv_0 - P_\alpha(A)ABv_0\| \colon v_0 \in H_k, \|v_0\| \le 1\bigr\} = \sup_n\{|\mu_n(\alpha)| \colon n = 1, 2, \dots, k\}. \tag{2.25}$$

Из (2.19), (2.24) и (2.25) следует, что $G_k(\alpha) \ge \frac{1}{2} G(\alpha)$.

С учетом последнего неравенства и из (2.22), (2.23), (2.25) получаем, что $\Delta[P_\alpha(A)] \ge \frac{r}{2} G(\alpha)$.

Поэтому в силу $\alpha \ge \overline{\alpha}(\delta, h, r)$, (2.11) имеем $\Delta[P_\alpha(A)] \ge \frac{r}{2} G_1(\alpha)$, а ввиду (2.13) —

$$\Delta[P_\alpha(A)] \ge \frac{r}{2} G_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)],$$

Тем самым лемма доказана. □

Чтобы получить оценку снизу для $\Delta[P_\alpha(A)]$ в случае $\alpha < \overline{\alpha}(\delta, h, r)$, докажем ряд вспомогательных лемм. Для этого определим оператор $\overline{A}_h \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$ следующим образом:

$$Sp(\overline{A}_h) = Sp(A), \tag{2.26}$$

собственные элементы q_n оператора $\overline{A}_h$ зададим формулами

$$q_1 = \frac{e_1 - h_1 e_{\iota(\alpha)}}{\sqrt{1+h_1^2}}, \quad q_{i(\alpha)} = \frac{e_{i(\alpha)} + h_1 e_1}{\sqrt{1+h_1^2}}, \tag{2.27}$$

$$q_n = e_n \ \text{ при } \ n \neq 1 \text{ и } n \neq \iota(\alpha),$$

где $i(\alpha)$ определено (2.17), $h_1 = \dfrac{h}{2\sigma_1}$, а e_n– собственные элементы оператора A.

Теперь рассмотрим конечномерное подпространство H_k, порожденное элементами $e_1, e_2, \dots,$ e_k, где номер k определен соотношением (2.18), а оператор A_h формулой —

$$A_h u = \begin{cases} \overline{A}_h u & \text{при } \ u \in H_k, \\ 0 & \text{при } \ u \in H_k^{\perp}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Лемма 5. *Пусть оператор A_h определен формулой* (2.28), *а* $\sigma_{k+1} < \dfrac{h}{2}$.
Тогда $\|A_h - A\| \leq h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала оценим $\|\overline{A}_h - A\|$, где $\overline{A}_h \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$ и определен формулой (2.26) и (2.27).

Введем подпространство L, порожденное элементами e_1 и $e_{i(\alpha)}$.

Так как для любого $u \in L^{\perp}$ справедливо $\overline{A}_h u = Au$, то

$$\|\overline{A}_h - A\|_H = \|\overline{A}_h - A\|_L. \tag{2.29}$$

Пусть $u \in L$ и $\|u\| = 1$. Тогда $u = u_1 e_1 + u_2 e_{i(\alpha)} = u_1' q_1 + u_2' q_{i(\alpha)}$.

Поэтому

$$u_1 = \frac{u_1' + h_1 u_2'}{\sqrt{1+h_1^2}}, \quad u_2 = \frac{u_2' - h_1 u_1'}{\sqrt{1+h_1^2}}.$$

В результате имеем

$$Au = \frac{\sigma_1 u_1' + \sigma_1 h_1 u_2'}{\sqrt{1+h_1^2}} e_1 + \frac{\sigma_{\iota(\alpha)} u_2' - \sigma_{\iota(\alpha)} h_1 u_1'}{\sqrt{1+h_1^2}} e_{\iota(\alpha)}, \tag{2.30}$$

$$\overline{A}_h u = \frac{\sigma_1 u_1' + \sigma_{\iota(\alpha)} h_1 u_2'}{\sqrt{1+h_1^2}} e_1 + \frac{\sigma_{\iota(\alpha)} u_2' - \sigma_1 h_1 u_1'}{\sqrt{1+h_1^2}} e_{\iota(\alpha)}. \tag{2.31}$$

Из (2.30) и (2.31) получаем, что

$$(A - \overline{A}_h)u = \frac{(\sigma_1 - \sigma_{\iota(\alpha)}) u_2' h_1}{\sqrt{1+h_1^2}} e_1 - \frac{(\sigma_1 - \sigma_{\iota(\alpha)}) u_1' h_1}{\sqrt{1+h_1^2}} e_{\iota(\alpha)}.$$

Из (2.27) и последнего равенства следует, что $\|(A - \overline{A}_h)u\|_L^2 \leq \dfrac{\sigma_1^2 h_1^2}{1+h_1^2} \leq \dfrac{h_2}{4}$.

Так как $\|u\| = 1$, то справедлива оценка $\|A - \overline{A}_h\|_L \leq \dfrac{h}{2}$. Поэтому с учетом (2.29) имеем

$$\|\overline{A}_h - A\|_H \leq \frac{h}{2}. \tag{2.32}$$

Ввиду $\sigma_{k+1} < \dfrac{h}{2}$ из (2.28) следует, что $\|A_h - \overline{A}_h\|_H \leq \dfrac{h}{2}$, а с учетом (2.32) — $\|A_h - A\| \leq h$. Тем самым лемма доказана. □

Так как в силу (1.5) оператор $P_\alpha(C)$ является функцией оператора C, то он имеет те же собственные элементы $\overline{e}_n$, что и C. Собственные значения этого оператора, отвечающие $\overline{e}_n$, обозначим через $\lambda_n(\alpha)$.

Положим

$$\overline{u}_0 = r\ \|B\|\ e_1, \quad \overline{f}_0 = A\overline{u}_0, \quad \overline{f}_\delta = A\overline{u}_0 + \delta q_{\iota(\alpha)}. \tag{2.33}$$

В этом случае

$$\overline{u}_0 \in M_r \cap H_k, \quad \|\overline{f}_\delta - A\overline{u}_0\| \le \delta. \tag{2.34}$$

Лемма 6. *Пусть* $\alpha < \overline{\alpha}(\delta, h, r)$,

$$\lambda_1(\alpha) < \frac{\lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha)}{9}. \tag{2.35}$$

Тогда

$$\Delta[P_\alpha(A)] \ge r\ G_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)].$$

Доказательство. Пусть оператор A_h определен формулой (2.28), $\overline{u}_0$, $\overline{f}_\delta$ — (2.33). Тогда из (1.8), (2.34) и леммы 5 следует, что $\Delta[P_\alpha(A)] \ge \|\overline{u}_0 - P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta\|$.

В свою очередь

$$\|\overline{u}_0 - P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta\| \ge |\ \|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| - \|P_\alpha(A)A\overline{u}_0 - \overline{u}_0\|\ |. \tag{2.36}$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части неравенства (2.36).

Так как

$$P_\alpha(A_h)q_1 = \lambda_1(\alpha)q_1, \quad P_\alpha(A_h)q_{\iota(\alpha)} = \lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha)q_{\iota(\alpha)}, \quad P_\alpha(A)e_1 = \lambda_1(\alpha)e_1, \ \text{ где } e_1 = \frac{q_1 + h_1 q_{\iota(\alpha)}}{\sqrt{1+h_1^2}},$$

то

$$P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)\overline{f}_0 = \delta\lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha)q_{\iota(\alpha)} + \lambda_{i(\alpha)}(\alpha)\frac{r\sigma_1\|B\|h_1}{\sqrt{1+h_1^2}}q_{\iota(\alpha)} + \lambda_1(\alpha)\frac{r\sigma_1\|B\|}{\sqrt{1+h_1^2}}q_1$$
$$- \lambda_1(\alpha)\frac{r\sigma_1\|B\|}{\sqrt{1+h_1^2}}q_1 - \lambda_1(\alpha)\frac{r\sigma_1\|B\|h_1}{\sqrt{1+h_1^2}}q_{\iota(\alpha)}.$$

Поэтому имеем

$$\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| = (\lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha) - \lambda_1(\alpha))\frac{r\sigma_1\|B\|h_1}{\sqrt{1+h_1^2}} + \lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha)\delta.$$

Из этого с учетом $h_1 = \dfrac{h}{2\sigma_1}$, $\lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha) > \dfrac{1}{2}\|P_\alpha(A)\|$, $h_1 \le 1$, и соотношения (2.35) следует, что $\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| \ge \dfrac{1}{9}\ \|P_\alpha(A)\|(r\|B\|h + \delta)$. Таким образом, ввиду (2.10) получаем

$$\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| \ge \frac{1}{9}\ \|P_{\overline{\alpha}(\delta,h,r)}(A)\|(r\|B\|h + \delta).$$

Отсюда и из (2.15) вытекает, что

$$\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| \ge 2rG_2[\overline{\alpha}(\delta, h, r)]. \tag{2.37}$$

Теперь оценим второе слагаемое в правой части формулы (2.36). Ввиду (2.6) $\|P_\alpha(A)A\overline{u}_0 - \overline{u}_0\| \le rG(\alpha)$.

С учетом (2.11) имеем $\|P_\alpha(A)A\overline{u}_0 - \overline{u}_0\| \le rG_2(\alpha)$, из этого и (2.14) следует, что

$$\|P_\alpha(A)A\overline{u}_0 - \overline{u}_0\| \le rG_2[\overline{\alpha}(\delta, h, r)].$$

Тогда в силу (2.37) получаем $\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - \overline{u}_0\| \ge rG_2[\overline{\alpha}(\delta, h, r)]$. Таким образом, ввиду (2.11) справедлива оценка $\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - \overline{u}_0\| \ge rG_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)]$.

Тем самым лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть регуляризующее семейство операторов* $\{P_\alpha(C)\colon 0<\alpha\le\alpha_0\}$ *определено формулой* (1.5)*, функция* $G_1(\alpha)$ *— формулой* (2.11)*, а* $\overline{\alpha}(\delta,h,r)$ *— уравнением* (2.15)*.*

Тогда, если $h<\|A\|$*, а* $\Delta[P_\alpha(A)]$ *определена формулой* (1.8)*, то для любого* $\alpha\in(0,\alpha_0]$ *справедлива оценка*

$$\Delta[P_\alpha(A)]\ge\frac{r}{2}G_1[\overline{\alpha}(\delta,h,r)].$$

Доказательство этой теоремы следует из лемм 4 и 6. □

3. Метод М. М. Лаврентьева

Пусть $A\in(H\to H)_1\cap(H\to H)_2$. Тогда метод М.М. Лаврентьева, согласно [8], заключается в замене операторного уравнения первого рода (1.1) уравнением второго рода

$$Au+\alpha u=f,\quad \alpha>0. \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что

$$\Phi_n(\sigma,\alpha)=(\sigma+\alpha)^{-1},\quad 0\le\sigma\le\sigma_n+h_0,\quad 0<\alpha\le\alpha_0, \tag{3.2}$$

где σ_n– собственные значения оператора A. В качестве класса корректности M_r возьмем множество $B\overline{S}_r$, в котором $B=A^p,\ p>1$, т. е.

$$g(\sigma)=\sigma^p,\quad p>1. \tag{3.3}$$

Далее предположим, что при $f=f_0$ существует $u_0\in M_r$ и $f_0=Au_0$, но f_0 неизвестно, а вместо него даны $f_\delta\in H$ и $\delta>0$ такие, что $\|f_\delta-f_0\|\le\delta$.

Теперь в формуле (3.1) оператор A заменим оператором $A_h\in(H\to H)_1\cap(H\to H)_3$. Тем самым уравнение (3.1) сведем к

$$A_hu+\alpha u=f_\delta. \tag{3.4}$$

Предположим, что

$$\|A_h-A\|\le h, \tag{3.5}$$

и выберем параметр $\overline{\alpha}(\delta,h,r)$ в уравнении (3.4). Для этого определим в нашем случае функции $F(\alpha)$ и $G_2(\alpha)$, используемые в лемме 1 и (2.11).

Из (3.2) получаем

$$F(\alpha)=\sup_n(\sigma_n+\alpha)^{-1}. \tag{3.6}$$

Так как $\sigma_n\to+0$ при $n\to\infty$, то из (3.6) имеем

$$F(\alpha)=\frac{1}{\alpha}. \tag{3.7}$$

Из (2.6) , (3.2), (3.3) следует, что

$$G(\alpha)=\sup_n|1-\sigma_n(\sigma_n+\alpha)^{-1}|\sigma_n^p. \tag{3.8}$$

Отсюда $G(\alpha)=\alpha\sup_n\dfrac{\sigma_n^p}{\sigma_n+\alpha}$ и $G(\alpha)\le\alpha\sup_{0<\sigma\le\|A\|}\dfrac{\sigma^p}{\sigma+\alpha}$, где $p>1$.

Так как $\dfrac{\sigma^p}{\sigma+\alpha}\Big\uparrow$ по σ на $(0,\|A\|]$, то

$$\sup_{0<\sigma\le\|A\|}\frac{\sigma^p}{\sigma+\alpha}=\frac{\|A\|^p}{\|A\|+\alpha}.$$

Следовательно, имеет место оценка $G(\alpha) \le \alpha \dfrac{\|A\|^p}{\|A\| + \alpha}$. Так как $A \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$, то $\|A\| = \sigma_1$. Значит справедливо неравенство

$$G(\alpha) \le \alpha \frac{\sigma_1^p}{\sigma_1 + \alpha}. \tag{3.9}$$

Отсюда, учитывая, что $\sigma_1 \in Sp(A)$, имеем $G(\alpha) = \alpha \dfrac{\sigma_1^p}{\sigma_1 + \alpha}$. Из этого следует непрерывность функции $G(\alpha)$ на $(0, \alpha_0]$. Продифференцировав эту функцию, легко проверить, что

$$G(\alpha) \uparrow \ \alpha \ \text{ на } \ (0, \alpha_0],$$

поэтому можно положить $G_1(\alpha) = G_2(\alpha) = G(\alpha),\ 0 < \alpha_0 \le \alpha_0$. Но для упрощения выкладок ввиду (2.11) допускаем

$$G_1(\alpha) = \alpha \frac{\sigma_1^p}{\sigma_1 + \alpha}, \tag{3.10}$$

$$G_2(\alpha) = \alpha\, \sigma_1^{p-1}. \tag{3.11}$$

Для определения параметра регуляризации $\overline{\alpha}_1(\delta, h, r)$ запишем уравнение

$$r\sigma_1^{p-1}\alpha = \frac{r\sigma_1^p h + \delta}{\alpha},$$

решив которое, имеем

$$\overline{\alpha}_1(\delta, h, r) = \sqrt{\frac{r\sigma_1^p h + \delta}{r\sigma_1^{p-1}}}. \tag{3.12}$$

Из (3.4) и (3.12) получим приближенное решение $u_{\delta h}$ уравнения (1.1):

$$u_{\delta h} = (A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)\ E)^{-1} f_\delta.$$

Оценим уклонение $\|u_{\delta h} - u_0\|$ приближенного решения $u_{\delta h}$ от точного решения u_0. В нашем случае

$$P_\alpha(A) = (A + \alpha E)^{-1},$$

и с учетом (1.8) имеем

$$\Delta[P_\alpha(A)] = \sup_{u, f_\delta, A_h} \Big\{ \|P_\alpha(A_h) f_\delta - u\| \colon u \in M_r,$$

$$A_h \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_3,\ \|A_h - A\| \le h,\ \|f_\delta - Au\| \le \delta \Big\}. \tag{3.13}$$

Так как

$$\begin{aligned} \|u - (A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} f_\delta\| &\le \|u - (A + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} Au\| \\ &+ \|(A + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} Au - (A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} A_h u\| \\ &+ \|(A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} A_h u - (A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} f_\delta\|, \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $u \in M_r$, то

$$\|u - (A + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} Au\| \le r G_2[\overline{\alpha}_1(\delta, h, r)].$$

Отсюда и из (3.11), (3.12) следует

$$\|u - (A + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} Au\| \le \sqrt{r\sigma_1^{p-1}(r\sigma_1^p h + \delta)}. \tag{3.15}$$

Поскольку

$$\|A_h - f_\delta\| \le r\sigma_1^p h + \delta,$$

то
$$\|(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}A_hu-(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}f_\delta\|\le F[\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)][r\sigma_1^p h+\delta].$$
Это влечет с учетом (3.6), (3.12)
$$\|(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}A_hu-(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}f_\delta\|\le\sqrt{r\sigma_1^{p-1}(\sigma_1^p rh+\delta)}.\tag{3.16}$$

Лемма 7. *Пусть* $A\in(H\to H)_1\cap(H\to H)_2$, $A_h\in(H\to H)_1\cap(H\to H)_3$, *выполнено* (3.5) *и* $u\in M_r$. *Тогда*
$$\|(A+\alpha E)^{-1}Au-(A_h+\alpha E)^{-1}A_hu\|\le r\|B\|\ \frac{h}{\alpha}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что
$$\|(A+\alpha E)^{-1}Au-(A_h+\alpha E)^{-1}A_hu\|\le\|(A+\alpha E)^{-1}A-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h\|\cdot\|u\|.$$
Так как
$$\begin{gathered}(A+\alpha E)^{-1}A-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h=EA(A+\alpha E)^{-1}-(A_h+\alpha E)^{-1}A_hE\\ =(A_h+\alpha E)^{-1}(A_h+\alpha E)A(A+\alpha E)^{-1}-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h(A+\alpha E)(A+\alpha E)^{-1}\\ =(A_h+\alpha E)^{-1}[(A_hA+\alpha A)(A+\alpha E)^{-1}-(A_hA+\alpha A_h)(A+\alpha E)^{-1}],\\ (A_hA+\alpha A)(A+\alpha E)^{-1}-(A_hA+\alpha A_h)(A+\alpha E)^{-1}=\alpha(A-A_h)(A+\alpha E)^{-1},\end{gathered}$$
то
$$\|(A+\alpha E)^{-1}A-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h\|\le\alpha\|(A_h+\alpha E)^{-1}\|\cdot\|A-A_h\|\cdot\|(A+\alpha E)^{-1}\|.$$

Из этого, поскольку $\|(A_h+\alpha E)^{-1}\|\le\dfrac{1}{\alpha}$ и $\|(A+\alpha E)^{-1}\|\le\dfrac{1}{\alpha}$, имеем
$$\|(A+\alpha E)^{-1}A-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h\|\le\frac{h}{\alpha}.$$

Тем самым лемма доказана. □

Из (3.12) и леммы 7 следует, что для $u\in M_r$
$$\|(A+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}Au-(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}A_hu\|\le\sqrt{r\|A\|^{p-1}(r\|B\|h+\delta)}.$$
Отсюда и из (3.13)–(3.16) получаем неравенство
$$\Delta[P_{\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)}(A)]\le d_1\sqrt{r\sigma_1^p h+\delta},\tag{3.17}$$
где $d_1=3\sigma_1^{(p-1)/2}\sqrt{r}$.

Теперь перейдем к оценке снизу.

Из (2.15), (3.7) и (3.11) следует $r\sigma_1^{p-1}\alpha=\dfrac{1}{18\alpha}[r\sigma_1^p h+\delta]$, отсюда
$$\overline{\alpha}(\delta,h,r)=\frac{1}{\sqrt{18r\sigma_1^{p-1}}}\ \sqrt{r\sigma_1^p h+\delta},$$
и согласно теореме 1 справедливо неравенство $\Delta[P_{\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)}]\ge\dfrac{r}{2}G_1[\overline{\alpha}(\delta,h,r)]$. Из этой оценки и уравнения (3.10) получаем, что
$$\Delta[P_{\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)}]\ge d_2\sqrt{r\sigma_1^p h+\delta},\tag{3.18}$$
где $d_2=\dfrac{r\sigma_1^p}{2(\sigma_1+\alpha)}\dfrac{1}{\sqrt{18r\sigma_1^{p-1}}}$.

Теорема 2. *Пусть регуляризующее семейство операторов* $\{P_\alpha(C)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ *определено формулой* (3.1), $g(\sigma)$ *— формулой* (3.3), $\overline{\alpha}_1(\delta, h, r)$ *— формулой* (3.12). *Тогда существуют положительные числа* d_1 *и* d_2 *такие, что для достаточно малых значений* δ *и* h *справедливы оценки*

$$d_2\sqrt{r\sigma_1^p h + \delta} \le \Delta[P_{\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)}(A)] \le d_1\sqrt{r\sigma_1^p h + \delta}.$$

Доказательство следует из формул (3.17) и (3.18). □

Оценки теоремы 2 говорят о том, что рассматриваемый метод является точным по порядку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. **Васин В.В.** Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 11–21.
3. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 261 с.
4. **Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14, № 1. С. 15–24.
5. **Данилин А.Р.** Об условиях сходимости конечномерных аппроксимаций метода невязки // Изв. вузов. Математика. 1980. № 11. С. 38–40.
6. **Данилин А.Р.** Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач // Журн. вычисл. математики. и мат. физики. 1985. Т. 25, № 8. С. 1123–1130.
7. **Танана В.П.** Об оптимальности методов регуляризации при решении вырожденных операторных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1985. № 9. С. 75–76.
8. **Лаврентьев М.М.** Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
9. **Латтес Р., Лионс Ж.Л.** Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
10. **Танана В.П.** Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 158 с.
11. **Бакушинский А.Б.** Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 3. С. 672–677.
12. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.
13. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Поступила 14.01.2008

Сидикова Анна Ивановна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: 7413604@mail.ru