ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.948

О РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Е. В. Табаринцева

В работе рассмотрена задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения. Предложен способ построения методов приближенного решения данной нелинейной некорректно поставленной задачи, обобщающий предложенную А.Б. Бакушинским схему построения методов приближенного решения линейных некорректно поставленных задач. Получены двусторонние оценки погрешности рассмотренных методов через оценки погрешности соответствующих методов решения линейной задачи на стандартных классах корректности. Доказана оптимальность по порядку предложенных процедур.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, обратная задача, модуль непрерывности обратного оператора, метод приближенного решения, оценка погрешности.

E. V. Tabarintseva. An approach to solving an ill-posed problem for a nonlinear differential equation.

A reverse time problem is considered for a semilinear differential equation. We suggest an approach to construct approximate solving methods for the problem under study. The approach generalizes the scheme proposed by A.B. Bakushinskii for linear ill-posed problems. Two-sided error estimates for the proposed methods are obtained via the error estimates for the corresponding linear problem on standard correctness classes. Order optimality is proved for the considered algorithms.

Keywords: differential equation, inverse problem, modulus of continuity of the inverse operator, approximate method, error estimate.

Введение

В статье рассматривается задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения. Данная задача поставлена некорректно, поэтому основными при ее исследовании являются вопросы построения устойчивого приближенного решения и оценки погрешности приближенного решения. Для линейных некорректно поставленных задач в работах В.К. Иванова, В.Н. Страхова, их учеников и последователей (см., например, [1–4]) была создана теория и разработан аппарат для получения оценок погрешности методов приближенного решения на компактных множествах (классах корректности). В этой теории естественным образом вводятся понятия оптимального и оптимального по порядку метода приближенного решения.

Соответствующие понятия были введены и для нелинейных некорректно поставленных задач (см., например, [5; 6]). В работе [7] была предложена общая схема построения регуляризующих алгоритмов для линейных некорректно поставленных задач. Различные подходы к приближенному решению нелинейных некорректно поставленных задач предложены и исследованы в монографиях [8–10]. Однако практическое вычисление (или оценка) погрешности методов или модуля непрерывности обратного оператора было проведено только для конкретных некорректно поставленных задач. В [11] был введен класс полулинейных дифференциально-операторных уравнений с обратным временем, для которых удалось разработать технику получения оценок модуля непрерывности нелинейного оператора через модуль непрерывности соответствующего линейного оператора.

Настоящая работа продолжает эти исследования. С использованием подхода, развитого в [7] для линейных некорректно поставленных задач, предложена схема построения методов

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00117).

приближенного решения полулинейной обратной задачи. Получены двусторонние оценки погрешности построенных приближенных решений на стандартных классах корректности. Установлена оптимальность по порядку построенных процедур.

1. Задача с обратным временем для линейного дифференциально-операторного уравнения

Приведем известные результаты для линейного дифференциально-операторного уравнения. Пусть H — гильбертово пространство, A — линейный неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H.

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\tau \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{dv}{dt} = -Av; \quad t \in (\tau; T), \tag{1.1}$$

$$v(\tau) = \varphi_\tau, \qquad 0 < t_0 \le \tau < T,$$

удовлетворяет условию $v(T) = \chi$.

Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$ такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$. Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение φ_δ^τ задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Рассмотрим семейство функций $\Phi_\alpha(\mu)$, принимающих действительные значения при $\mu > 0$, кусочно-непрерывных на промежутке $\mu \in (0; \infty)$, $(0 < \alpha < \alpha_0)$. Будем предполагать также, что функции $\Phi_\alpha(\mu)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\sup\{|\Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)})| \colon \lambda \ge 0\} \le K_\alpha(\tau) < \infty$, где функция $K_\alpha(t)$ удовлетворяет условию $K_\alpha(\tau_1 + \tau_2) = K_\alpha(\tau_1) K_\alpha(\tau_2)$;

2) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)}) e^{-\lambda(T-\tau)} = 1$ при каждом $\lambda \ge 0$;

3) $\sup\{|\Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)}) e^{-\lambda(T-\tau)}| \colon \lambda \ge 0,\ 0 < \alpha < \alpha_0\} = c < \infty$.

Следуя работе [7], рассмотрим семейство операторов $R_\alpha^{T-\tau}$, действующих в пространстве H по правилу

$$R_\alpha^{T-\tau} = \Phi_\alpha(e^{-A(T-\tau)}). \tag{1.2}$$

В качестве приближенного решения линейной задачи с обратным временем будем рассматривать элемент

$$\varphi_\delta^\tau = R_\alpha^{T-\tau} \chi_\delta \tag{1.3}$$

при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

2. Задача с обратным временем для нелинейного дифференциально-операторного уравнения

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t)); \quad t \in (t_0; T), \tag{2.1}$$

$$u(t_0) = \varphi, \quad \varphi \in H, \quad 0 < t_0 < T,$$

удовлетворяет условию $u(T) = \chi$. Здесь $f \colon [0; T] \times H \to H$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной u и условию Гельдера по переменной t, т. е. существуют постоянные $K > 0$, $L > 0$, $0 < \gamma < 1$ такие, что $\|f(u_1, t_1) - f(u_2, t_2)\|_H \le L\|u_1 - u_2\|_H + K|t_1 - t_2|^\gamma$ при всех $t \in [0; T]$, $u_1, u_2 \in H$.

Пусть $B : H \to H$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор такой, что множество

$$M = BS(0, r) = \{\varphi \in H \colon \|B^{-1}\varphi\| \le r\}$$

является классом корректности как для нелинейной обратной задачи, так и для соответствующей линейной задачи.

Предположим, что при заданном $\chi \in H$ существует точное решение $\varphi \in H$ поставленной обратной задачи, принадлежащее множеству M.

Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$ такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| \le \delta$. Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение φ_δ задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Задача Коши (2.1) равносильна интегральному уравнению (см., например, [12])

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)} f(\tau, u(\tau))d\tau. \tag{2.2}$$

Рассмотрим величины:

$$\omega(M, \delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| \colon \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|\chi_1 - \chi_2\| \le \delta\}$$

— модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$$\hat{\omega}(M, \delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| \colon \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|e^{A(T-t_0)}(\varphi_1 - \varphi_2)\| \le \delta\}$$

— модуль непрерывности для линейной обратной задачи.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [11, теорема]. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $\delta < \delta_0$ выполняются неравенства*

$$\hat{\omega}(M, e^{-LT}\delta) \le \omega(M, \delta) \le \hat{\omega}(M, e^{LTe^{LT}}\delta).$$

Пусть R_α^t — семейство линейных непрерывных самосопряженных операторов, определенных формулой (1.2).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u^\alpha(t) = R_\alpha^{T-t}\chi - \int\limits_{t}^{T} e^{A(T-\tau)} R_\alpha^{T-t} f(\tau, u^\alpha(\tau))d\tau \tag{2.3}$$

Выполняется следующее утверждение.

Утверждение. *Для любого элемента $\chi \in H$ интегральное уравнение* (2.3) *имеет решение в пространстве непрерывных функций $C([0;T]; H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения может быть получено стандартным методом с применением принципа сжимающих отображений.

Обозначим через $u_\delta^\alpha(t)$ решение интегрального уравнения

$$u_\delta^\alpha(t) = R_\alpha^{T-t}\chi_\delta - \int\limits_{t}^{T} e^{A(T-\tau)} R_\alpha^{T-t} f(\tau, u_\delta^\alpha(\tau))d\tau. \tag{2.4}$$

В качестве приближенного решения нелинейной задачи с обратным временем будем рассматривать элемент

$$\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0), \tag{2.5}$$

где $u_\delta^\alpha(t)$ — решение интегрального уравнения (2.4) при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

Докажем следующие неравенства, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть* $u(t)$ *— решение интегрального уравнения* (2.2), $P(\tau,t) = e^{A(\tau-t)}G(t)$, *где* $G(t)$ *— положительно определенный самосопряженный оператор в* H *такой, что оператор* $P(\tau,t)$ *ограничен,* $\|P(\tau,t)\| \le B(\tau,t)$; *здесь функция* $B(\tau,t)$ *удовлетворяет условию*

$$B(\tau_1,t)B(\tau_2,t) = B(\tau_1+\tau_2,t) \quad (t_0 \le t \le \tau \le T),$$

функция $v(t)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$v(t) = P(T-t,t)u(T) - \int_t^T P(\tau-t,t)f(\tau,v(\tau))d\tau. \tag{2.6}$$

Тогда выполняются неравенства

$$e^{-LTe^{LT}}\|P(T-t,t)u(T)\| \le \|v(t)\| \le e^{LT}\|P(T-t,t)u(T)\|, \tag{2.7}$$

$$e^{-LTe^{LT}}\|G(t)u(t)-u(t)\| \le \|v(t)-u(t)\| \le e^{LT}\|G(t)u(t)-u(t)\|. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенства (2.7). Пусть функция $v(t)$ удовлетворяет равенству (2.6.) Оценим $\|v(t)\|$ сверху. Рассмотрим функцию $z(t) = \dfrac{v(t)}{B(T-t,t)}$. Из (2.6) выводим, что функция $z(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|z(t)\| \le \frac{\|P(T-t,t)u(T)\|}{B(T,t)} + L\int_t^T \|z(\tau)\|d\tau. \tag{2.9}$$

Из неравенства (2.9) в силу леммы Гронуолла следует

$$\|z(t)\| \le e^{LT}\frac{\|P(T-t,t)u(T)\|}{B(T-t,t)}$$

или

$$\|v(t)\| \le e^{LT}\|P(T-t,t)u(T)\|. \tag{2.10}$$

Оценим величину $\|v(t)\|$ снизу. Рассмотрим равенство

$$B(T-t,t)u(T) = v(t) + \int_t^T P(\tau-t,t)(f(\tau,v(\tau)))d\tau. \tag{2.11}$$

Из равенства (2.11) с учетом (2.10) вытекает неравенство

$$\frac{\|P(T-t,t)u(T)\|}{B(T-t,t)} \le \|z(t)\| + Le^{LT}\int_t^T \frac{\|P(\tau-t,t)u(T)\|}{B(\tau-t,t)}d\tau. \tag{2.12}$$

Из неравенства (2.12) в силу леммы Гронуолла следует

$$\frac{\|P(T-t,t)u(T)\|}{B(T-t,t)} \le e^{LTe^{LT}}\|z(t)\|$$

или $\|P(T-t,t)u(T)\| \le e^{LTe^{LT}}\|v(t)\|$. Неравенства (2.7) доказаны.

Докажем неравенства (2.8). Оценим $\|v(t)-u(t)\|$ сверху. Так как

$$u(T) = e^{-A(T-t)}u(t) + \int_t^T e^{-A(T-\tau)}f(\tau,u(\tau))d\tau,$$

то из (2.6) получаем равенство

$$v(t) - u(t) = G(t)u(t) - u(t) + \int\limits_t^T P(\tau - t, t)(f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, u(\tau)))d\tau. \tag{2.13}$$

Рассмотрим функцию $w(t) = \dfrac{v(t) - u(t)}{B(T - t, t)}$. Из (2.13) выводим, что функция $w(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|w(t)\| \le \frac{\|G(t)u(t) - u(t)\|}{B(T - t, t)} + L \int\limits_t^T \|w(\tau)\| d\tau. \tag{2.14}$$

Из неравенства (2.14) в силу леммы Гроноулла следует

$$\|w(t)\| \le e^{LT} \frac{\|G(t)u(t) - u(t)\|}{B(T - t, t)}$$

или

$$\|v(t) - u(t)\| \le e^{LT} \|G(t)u(t) - u(t)\|. \tag{2.15}$$

Оценим величину $\|v(t) - u(t)\|$ снизу. Рассмотрим равенство

$$G(t)u(t) - u(t) = v(t) - u(t) + \int\limits_t^T P(\tau - t, t)(f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, u(\tau)))d\tau. \tag{2.16}$$

Из равенства (2.16) с учетом (2.15) получаем неравенство

$$\frac{\|G(t)u(t) - u(t)\|}{B(T - t, t)} \le \|w(t)\| + Le^{LT} \int\limits_t^T \frac{\|G(\tau)u(\tau) - u(\tau)\|}{B(T - \tau, \tau)} d\tau. \tag{2.17}$$

Из неравенства (2.17) в силу леммы Гроноулла следует

$$\frac{\|G(t)u(t) - u(t)\|}{B(T - t, t)\|} \le e^{LTe^{LT}} \|w(t)\|$$

или $\|G(t)u(t) - u(t)\| \le e^{L(T)e^{L(T)}} \|v(t) - u(t)\|$. Неравенства (2.8) доказаны.

3. Оценка погрешности метода приближенного решения

Обозначим $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0)$, где $u^\alpha(t)$ — решение уравнения (2.3), $\varphi^\alpha_\delta = u^\alpha_\delta(t_0)$, где $u^\alpha_\delta(t)$ — решение уравнения (2.4).

Рассмотрим величину

$$\Delta_M(\alpha, \delta) = \sup\left\{\|\varphi^\alpha_\delta - \varphi\| \colon \varphi \in M, \|\chi - \chi_\delta\| \le \delta\right\},$$

характеризующую точность построенного метода приближенного решения нелинейной задачи (2.1) на множестве M.

Воспользуемся неравенством $\Delta_M(\alpha, \delta) \le \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha, \delta)$, где

$$\Delta_1(\alpha) = \sup_{\varphi \in M} \|\varphi^\alpha - \varphi\|; \quad \Delta_2(\alpha, \delta) = \sup_{\|\chi - \chi_\delta\| \le \delta} \|\varphi^\alpha_\delta - \varphi^\alpha\|.$$

Рассмотрим также величину

$$\hat{\Delta}_M(\alpha, \delta) = \sup\left\{\|R^{T-t_0}_\alpha \hat{\chi}_\delta - \varphi\| \colon \varphi \in M, \|e^{-A(T-t_0)}\varphi - \hat{\chi}_\delta\| \le \delta\right\}$$

— погрешность приближенного решения соответствующей линейной задачи на множестве M. Будем использовать очевидное неравенство $\hat{\Delta}_M(\alpha,\delta) \le \hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta)$, где

$$\hat{\Delta}_1(\alpha) = \sup_{\varphi\in M} \|R_\alpha^{T-t_0}\hat{\chi} - \varphi\|, \quad \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta) = \sup_{\|\hat{\chi}-\hat{\chi}_\delta\|\le\delta} \|R_\alpha^{T-t_0}(\hat{\chi}_\delta - \hat{\chi})\|.$$

Выполняются неравенства (см., например, [1])

$$\frac{1}{4}(\Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha,\delta)) \le \Delta_M(\alpha,\delta) \le \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha,\delta). \tag{3.1}$$

Аналогично

$$\frac{1}{4}(\hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta)) \le \hat{\Delta}_M(\alpha,\delta) \le \hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta). \tag{3.2}$$

Из леммы 2 при $B(\tau,t) = e^{-A(T-\tau)}R_\alpha^{T-t}$ следуют неравенства

$$e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta}_1(\alpha) \le \Delta_1(\alpha) \le e^{LT}\hat{\Delta}_1(\alpha), \quad e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta}_2(\alpha,\delta) \le \Delta_2(\alpha,\delta) \le e^{LT}\hat{\Delta}_2(\alpha,\delta).$$

Выберем зависимость $\alpha = \alpha^*(\delta)$ из условия минимальности величины $g(\alpha,\delta) = \hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta)$ и используем эту зависимость при решении нелинейного уравнения.

Из последних неравенств с учетом (3.1), (3.2) вытекает следующая теорема.

Теорема. *Существует постоянная* $0 < \delta_0 < 1$ *такая, что для всех* $0 < \delta < \delta_0$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{4}e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta}_M(\alpha^*(\delta),\delta) \le \Delta_M(\alpha^*(\delta),\delta) \le 4e^{LT}\hat{\Delta}_M(\alpha^*(\delta),\delta).$$

С учетом леммы 1 выполняется

Следствие. *Метод приближенного решения нелинейной задачи* (2.1)*, определенный равенством* (2.5)*, оптимален по порядку на множестве* M *тогда и только тогда, когда метод приближенного решения линейной задачи* (1.1)*, определенный равенством* (1.3)*, оптимален по порядку на множестве* M.

4. Примеры

Приведем примеры методов приближенного решения задачи с обратным временем для полулинейного уравнения, которые строятся по предложенной общей схеме, но могут быть реализованы в виде задач с малым параметром для дифференциальных уравнений.

Пример 1 (метод проекционной регуляризации). Обозначим через $\{E_\lambda : \lambda \ge 0\}$ разложение единицы, порожденное оператором A. Пусть A_α — линейный ограниченный оператор в H, определяемый формулой

$$A_\alpha u = \int_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2.1) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du_\delta^\alpha(t)}{dt} = -A_\alpha u_\delta^\alpha(t) + E_\alpha f(u_\delta^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \quad u_\delta^\alpha(T) = E_\alpha\chi. \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что функция u_δ^α удовлетворяет уравнению (2.4) с оператором $R_\alpha^{T-t} = e^{A_\alpha(T-t)}E_\alpha$.

П р и м е р 2 (метод квазиобращения). Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2.1) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du_\delta^\alpha(t)}{dt} = -(A - \alpha A^m)u_\delta^\alpha(t) + e^{-\alpha A^m(T-t)}f(t, u_\delta^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); u_\delta^\alpha(T) = \chi_\delta. \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что функция u_δ^α удовлетворяет интегральному уравнению (2.4) с оператором $R_\alpha^{T-t} = e^{(A-\alpha A^m)(T-t)}$.

П р и м е р 3 (метод вспомогательных граничных условий). Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2.1) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du_\delta^\alpha(t)}{dt} = -Au_\delta^\alpha(t) + f(t, u_\delta^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \quad u_\delta^\alpha(T) + \alpha u_\delta^\alpha(t_0) = \chi_\delta. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что функция u_δ^α удовлетворяет интегральному уравнению (2.4) с оператором $R_\alpha^{T-t} = e^{A(T-t)}(E + \alpha e^{A(T-t_0)})^{-1}$.

Другие методы решения нелинейных обратных задач рассмотрены, например, в статьях [13; 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.** Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 176 с.
2. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Иванов В.К., Королюк Т.И.** Об оценке погрешности при решении линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 1. С. 30–41.
4. **Страхов В.Н.** О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 8. С. 1490–1495.
5. **Танана В.П.** О сходимости регуляризованных решений нелинейных операторных уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6, № 3. С. 119–133.
6. **Танана В.П.** Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач// Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 39, № 5. С. 503–507.
7. **Бакушинский А.Б.** Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректно поставленного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 8. С. 672–677.
8. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург.: Наука, 1993. 264 с.
9. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.
10. **Кокурин М.Ю.** Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. Йошкар-Ола.: Изд. Марийского гос. ун-та, 1998. 292 с.
11. **Табаринцева Е.В.** Об оценке модуля непрерывности одной нелинейной обратной задачи // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 253–257.
12. **Хенри Д.** Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.
13. **Табаринцева Е.В.** Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 3. С. 259–271.
14. **Танана В.П., Табаринцева Е.В.** О методе приближения кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 2. С. 221–228.

Табаринцева Елена Владимировна Поступила 10.02.2014
канд. физ.-мат. наук, доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: eltab@rambler.ru