ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАХВАТА В ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АВТОРЕЗОНАНС[1]

О. А. Султанов

Рассматривается математическая модель, описывающая начальный этап захвата в параметрический авторезонанс в нелинейных колебательных системах. Резонансу соответствуют решения с неограниченно растущей энергией. Исследуется устойчивость таких решений относительно постоянно действующих возмущений на асимптотически большом интервале времени. Описывается класс допустимых возмущений, при которых имеет место захват в параметрический авторезонанс.

Ключевые слова: параметрический резонанс, нелинейные колебания, возмущения, устойчивость.

O. A. Sultanov. Stability of capture into parametric autoresonance.

A mathematical model describing the initial stage of a capture into parametric autoresonance in nonlinear oscillating systems is considered. The resonance corresponds to solutions with unboundedly growing energy. The stability of such solutions with respect to persistent perturbations on an asymptotically large time interval is investigated. A class of admissible perturbations is described for which a capture into parametric autoresonance occurs.

Keywords: parametric resonance, nonlinear oscillations, perturbations, stability.

1. Введение

Явление захвата в авторезонанс связано с ростом энергии нелинейных колебаний, под действием малой медленно меняющейся накачки. Это явление было открыто в середине двадцатого века Векслером [1] и Макмилланом [2] в задачах по ускорению релятивистских частиц. Со временем было обнаружено, что авторезонансные эффекты присутствуют во многих прикладных задачах [3].

В последнее время явление авторезонанса активно исследуется на уровне математических моделей методами асимптотического анализа и численного счета [4]. При этом в реальных физических процессах неизбежно присутствуют шум и возмущения, которые трудно (в силу усложнения уравнений) учитывать при математическом моделировании. В то же время эти силы могут оказывать губительное влияние на процесс захвата в резонанс [5]. В данной работе предлагается решение проблемы устойчивости параметрического авторезонанса относительно постоянно действующих возмущений.

Явление параметрического авторезонанса обычно связывают с реакцией нелинейных колебательных систем на накачку их параметров [6]. При этом в линейных системах с периодической накачкой резонанс характеризуется потерей устойчивости положения равновесия и экспоненциальным ростом амплитуды колебаний [7, с. 209]. В нелинейных системах подобные возмущения приводят лишь к незначительным изменениям энергии [7, с. 219]. Оказывается, что значительный (степенной) рост амплитуды нелинейных колебаний возможен при медленном изменении частоты параметрического возмущения [8]. Подробное исследование проблемы захвата нелинейных осциллирующих систем в параметрический авторезонанс проводилось в [9; 10]. Подобные эффекты, наблюдаемые в нелинейных волнах, исследовались в [11; 12].

Отметим, что вопросам устойчивости авторезонанса посвящено несколько работ [13–15], где описаны достаточно жесткие ограничения на параметры шума, при которых сохраняется

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-31054) и частичной поддержке гранта Президента России для молодых российских ученых (МД-183.2014.1).

явление захвата. В настоящей работе предлагается качественно другой подход к исследованию устойчивости авторезонанса, который позволяет существенно расширить классы допустимых возмущений.

1.1. Уравнения главного параметрического резонанса

Основным объектом исследования является система двух дифференциальных уравнений, которая описывает начальный этап захвата в параметрический авторезонанс в нелинейных колебательных системах

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \mathcal{E}\sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \mathcal{E} - \lambda\tau + f\cos\Phi, \qquad \tau > 0, \quad \lambda, f = \text{const} > 0. \tag{1.1}$$

Искомые функции $\mathcal{E}(\tau)$ и $\Phi(\tau)$ соответствуют медленно меняющимся энергии и сдвигу фазы быстрых гармонических колебаний. Решения с растущей энергией $\mathcal{E}(\tau) \approx \lambda\tau$ соответствуют параметрическому авторезонансу. Цель работы – исследовать устойчивость такого типа решений относительно постоянно действующих возмущений.

Система (1.1) появляется при исследовании нелинейных колебаний с малой параметрической накачкой [4; 8; 9]. В качестве примера рассмотрим уравнение нелинейного осциллятора с медленно меняющимся возмущением:

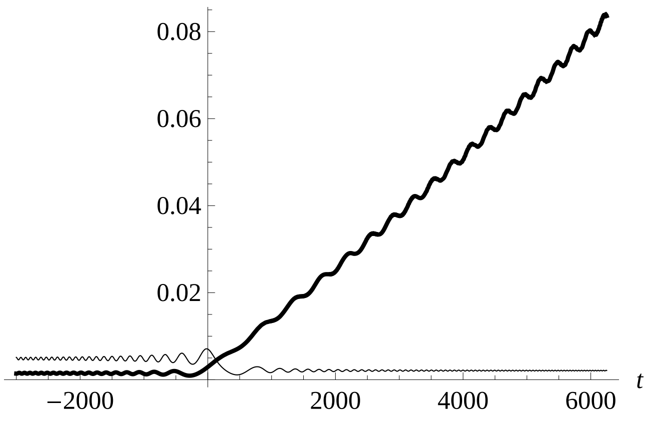
$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + \varepsilon\cos\phi)\,x + \gamma x^3 = 0, \tag{1.2}$$

$$\phi(t;\varepsilon) = 2t + \alpha\varepsilon^2 t^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \alpha, \gamma = \text{const} > 0.$$

Численный анализ уравнения (1.2) с начальными данными $|x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ свидетельствует о наличии резонансных решений с растущей в среднем энергией (см. рисунок). Приближенное решение уравнения (1.2), близкое к резонансному, при $t \ll \varepsilon^{-2}$ может быть получено с помощью метода усреднения [7]. На этом пути строится асимптотика решения в виде

$$x(t;\varepsilon) = \sqrt{\kappa\varepsilon\mathcal{E}(\tau)}\cos\frac{1}{2}(\phi + \Phi(\tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \quad \tau = \frac{\varepsilon t}{2}, \quad \kappa = \frac{2}{3\gamma},$$

где пара медленно меняющихся функции $\mathcal{E}(\tau)$, $\Phi(\tau)$ является решением модельных уравнений (1.1) с параметрами $\lambda = 8\alpha$, $f = 1$.



Эволюция энергии уравнения (1.2), где $\gamma = 3/2$, $\varepsilon = 0.001$, $\alpha = 1/8$. Два графика соответствуют решениям разного типа: захваченное в авторезонанс и нерезонансное.

1.2. Авторезонансное решение

Явные формулы для точных решений модельной системы (1.1) не известны. Однако можно построить асимптотические решения на бесконечности по τ, которые соответствуют авторезонансу. Проще всего такие решения строятся в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами:

$$E_0(\tau) = \lambda\tau + \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{E}_j\, \tau^{-j/2}, \quad \Psi_0(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\, \tau^{-j/2}, \quad \tau \to \infty. \tag{1.3}$$

Коэффициенты $\mathcal{E}_j$, $\psi_j = \mathrm{const}$ определяются из рекуррентных формул, которые выписываются после подстановки рядов в уравнения и приравнивания выражений при одинаковых степенях τ. На этом пути определяются два решения, отличия в которых связаны с выбором одного из двух (по модулю 2π) корней уравнения $\sin\psi_0 = 0$. Существование решений $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ при $\tau \geq \tau_0$ ($\tau_0 = \mathrm{const} > 0$), которые имеют асимптотику (1.3) при $\tau \to \infty$, следует из [16]. Из [17, с. 16] следует, что эти решения можно продолжить на всю ось $\tau \in \mathbb{R}$. Вопросы обоснования асимптотик решений для похожих уравнений изучались в [18]. Устойчивость таких решений обсуждается в настоящей работе.

Заметим, что у системы (1.1) существуют также решения с ограниченной энергией [19], которые не имеют отношения к явлению авторезонанса и здесь не рассматриваются.

1.3. Возмущенные уравнения

Для исследования устойчивости авторезонанса наряду с системой (1.1) рассматриваются возмущенные уравнения в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = (1 + \mu\xi)\mathcal{E}\sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \mathcal{E} - \lambda\tau + \mu\zeta + (f + \mu\eta)\cos\Phi. \tag{1.4}$$

Здесь функции $\xi(\mathcal{E}, \Phi, \tau)$, $\eta(\mathcal{E}, \Phi, \tau)$, $\zeta(\mathcal{E}, \Phi, \tau)$ вместе с коэффициентом $\mu \in \mathbb{R}$ соответствуют постоянно действующим возмущениям. Параметр μ позволяет контролировать величину возмущения [20]. Будем считать, что $|\mu| \ll 1$. Это требование соответствует предположению малости возмущений. Задача устойчивости заключается в описании классов возмущений, при которых в системе (1.4) будут наблюдаться решения, чья энергия растет так же, как (1.3).

Примером исходной задачи (до усреднения), которая приводит к системе (1.4), является уравнение нелинейного осциллятора с возмущенной накачкой

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left\{1 + \varepsilon(1 + \mu a)\cos(\phi + \mu\varphi)\right\} x + \gamma x^3 = 0. \tag{1.5}$$

Роль возмущения здесь играют функции $a(x, \dot{x}, t; \varepsilon)$, $\varphi(x, \dot{x}, t; \varepsilon)$. В случае, когда возмущение зависит только от времени, связь между функциями $a(t; \varepsilon)$, $\varphi(t; \varepsilon)$ и возмущениями $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ усредненных уравнений (1.4) описывается формулами

$$\xi(\tau) = a(t; \varepsilon), \quad \eta(\tau) = a(t; \varepsilon), \quad \zeta(\tau) = k\, \partial_t\varphi(t; \varepsilon)\varepsilon^{-1}, \quad t = 2\tau\varepsilon^{-1}, \tag{1.6}$$

где k — некоторая константа, не зависящая от μ и ε.

В данной работе предлагается исследовать устойчивость авторезонанса с помощью второго метода Ляпунова. Для этого в первой части работы описывается конструкция функции Ляпунова для невозмущенной системы (1.1) и попутно исследуется устойчивость авторезонанса относительно начальных возмущений. Затем, во второй части, построенная функция используется при исследовании возмущенных уравнений и выводе ограничений на постоянно действующие возмущения.

2. Возмущения начальных данных

В данном разделе приводятся предварительные результаты, которые касаются устойчивости решений (1.3) относительно малых возмущений начальных данных, т. е. данных задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1).

Система (1.1) имеет пару решений с асимптотикой (1.3), отличие в которых связано с выбором корня уравнения $\sin\psi_0 = 0$. Решение с $\psi_0 = 0$ оказывается неустойчивым. Этот факт следует из анализа собственных значений линеаризованной системы.

Для другого решения с $\psi_0 = \pi$ собственные числа линеаризованной системы являются чисто мнимыми. Следовательно, при анализе устойчивости необходимо привлекать нелинейные члены уравнений. Этот случай будет исследоваться с помощью второго метода Ляпунова.

Уточним асимптотику решения (1.3) с $\psi_0 = \pi$:

$$E_0(\tau) = \lambda\tau + f + \mathcal{O}(\tau^{-2}), \quad \Psi_0(\tau) = \pi - \tau^{-1} + \mathcal{O}(\tau^{-2}), \quad \tau \to \infty. \tag{2.1}$$

Сформулируем определение устойчивости, которое будет использоваться в данном разделе.

О п р е д е л е н и е 1. Решение $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ системы (1.1) устойчиво, если существует $\tau_0 > 0$ такое, что $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta_\epsilon > 0$:

$$\forall\,\varrho_0, \phi_0 :\ |\varrho_0 - E_0(\tau_0)| + |\phi_0 - \Psi_0(\tau_0)| \le \delta_\epsilon,$$

решение $\mathcal{E}(\tau)$, $\Phi(\tau)$ системы (1.1) с начальными данными $\mathcal{E}(\tau_0) = \varrho_0$, $\Phi(\tau_0) = \phi_0$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{E}(\tau) - E_0(\tau)|\tau^{-1/2} + |\Phi(\tau) - \Psi_0(\tau)| < \epsilon \quad \forall\,\tau > \tau_0.$$

Отличие приведенного определения устойчивости от классического состоит в наличии множителя $\tau^{-1/2}$ в оценке возмущенных решений. Присутствие этого множителя объясняется спецификой поставленной задачи об устойчивости авторезонанса. Действительно, поскольку авторезонансу соответствует решение с растущей энергией $\mathcal{E}(\tau) \approx \lambda\tau$, то разумно требовать сохранения скорости роста возмущенной энергии только в главном члене асимптотики. Таким образом, для энергии возмущенных решений допускается поведение $\mathcal{E}(\tau) = \lambda\tau[1 + \mathcal{O}(\tau^{-1/2})]$ при $\tau \to \infty$. Существование решений системы (1.1) с такой асимптотикой на бесконечности следует из [4].

Заметим, что такие слабые требования гарантирует только Ψ-устойчивость (см., например, [21, с. 16]) решения $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$. Устойчивости по обеим переменным в обычном смысле может и не быть. Зато введенное нами определение в дальнейшем позволит найти более слабые ограничения на параметры возмущений, при которых будет иметь место явление захвата в авторезонанс.

Теорема 1. *Если в системе* (1.1) *коэффициент* $f > 1/2$, *то решение* $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (2.1) *устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В системе (1.1) делается замена переменных при $\tau \ge 0$:

$$\mathcal{E} = E_0(\tau) + (\lambda\tau)^{1/2}\,E, \quad \Phi = \Psi_0(\tau) + \Psi, \quad T = \frac{2\sqrt{\lambda}}{3}\,\tau^{3/2}, \tag{2.2}$$

и для новых функций $E(T)$, $\Psi(T)$ исследуется устойчивость положения равновесия $(0;0)$. В новых переменных уравнения (1.1) принимают следующий вид:

$$\frac{dE}{dT} = -\partial_\Psi H(E,\Psi,T), \quad \frac{d\Psi}{dT} = \partial_E H(E,\Psi,T) + G(E,\Psi,T). \tag{2.3}$$

Здесь гамильтониан $H(E,\Psi,T)$ и негамильтонова компонента $G(E,\Psi,T)$ имеют вид

$$H(E,\Psi,T) = \frac{E^2}{2} + \nu^2 E_0\big(\cos(\Psi + \Psi_0) - \cos\Psi_0 + \Psi\sin\Psi_0\big)T^{-2/3}$$

$$+\,\nu E\big(\cos(\Psi+\Psi_0)-\cos\Psi_0\big)T^{-1/3}+\frac{E\Psi}{3}T^{-1}; \tag{2.4}$$

$$G(E,\Psi,T)=\nu(f-1)\big(\cos(\Psi+\Psi_0)-\cos\Psi_0\big)T^{-1/3}-\frac{\Psi}{3}T^{-1},\quad \nu=\Big(\frac{2}{3\lambda}\Big)^{1/3}. \tag{2.5}$$

Для систем вида (2.3) эффективно строится функция Ляпунова [22], конструкция которой опирается на асимптотику гамильтониана $H(E,\Psi,T)$ и добавки $G(E,\Psi,T)$ при $T\to\infty$ и в окрестности равновесия при $\rho=\sqrt{E^2+\Psi^2}\to 0$.

В гамильтониане можно выделить положительно определенную квадратичную форму в качестве главного члена асимптотики:

$$H=\frac{E^2}{2}+\frac{\Psi^2}{2}+\mathcal{O}(\rho^3)+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-1/3}),\quad \rho\to 0,\quad T\to\infty.$$

Заметим, что приводимые здесь и ниже асимптотические оценки вида $\mathcal{O}(\rho^n)$ или $\mathcal{O}(T^{-m})$ $(n,m=\mathrm{const}>0)$ являются равномерными по (E,Ψ,T) в области

$$\mathcal{D}(\rho_*,T_*)=\{(E,\Psi,T)\colon \rho<\rho_*,\ T>T_*\},\quad \rho_*,T_*=\mathrm{const}>0.$$

Частные производные гамильтониана $H(E,\Psi,T)$ имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}
\partial_E H &= E+\nu(1-\cos\Psi)T^{-1/3}+\frac{1}{3}(\Psi-2\sin\Psi)T^{-1}+\mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(T^{-5/3}),\\
\partial_\Psi H &= \sin\Psi+\nu E\sin\Psi\,T^{-1/3}+\nu^2\big[f\sin\Psi+\lambda(1-\cos\Psi)\big]T^{-2/3}\\
&\quad+\frac{E}{3}(1-2\cos\Psi)T^{-1}+\mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(T^{-4/3}),\\
\partial_T H &= \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(T^{-4/3})+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-5/3}).
\end{aligned}$$

Функция $G(E,\Psi,T)$ стремится к нулю при $T\to\infty$:

$$G=\alpha(1-\cos\Psi)T^{-1/3}-\beta[\Psi+\mathcal{O}(\rho^3)]T^{-1}+O(\rho)O(T^{-4/3}),\quad \alpha=\nu(f-1),\quad \beta=\frac{2f-1}{3}>0.$$

Основу конструкции функции Ляпунова составляет гамильтониан, который возмущается добавками, убывающими при $T\to\infty$ с разными скоростями:

$$V(E,\Psi,T)=H(E,\Psi,T)+\sum_{k=1}^{3}V_k(E,\Psi)\,T^{-k/3}, \tag{2.6}$$

$$V_1=\alpha\Big[E(1-\cos\Psi)+\frac{E^3}{3}\Big],\quad V_2=-\frac{\alpha\nu}{2}\Big[f(1-\cos\Psi)^2+\frac{E^4}{2}\Big],\quad V_3=-\frac{\beta}{2}E\Psi.$$

Производная от этих функций, вычисленная в силу системы (2.3), имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dT}\Big|_{(2.3)} &= \frac{\partial H}{\partial T}+\frac{\partial H}{\partial\Psi}G=\alpha\sin\Psi(1-\cos\Psi)T^{-1/3}\\
&\quad+\alpha\nu E\sin\Psi(1-\cos\Psi)T^{-2/3}-\beta[\Psi^2+\mathcal{O}(\rho^4)]T^{-1}+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-4/3}),\\
\frac{dV_1}{dT}\Big|_{(2.3)} &= -\alpha\sin\Psi(1-\cos\Psi)T^{-1/3}\\
&\quad+\alpha\nu E\sin\Psi\Big[(f-1)(1-\cos\Psi)-E^2\Big]T^{-2/3}+\mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(T^{-1}),\\
\frac{dV_2}{dT}\Big|_{(2.3)} &= -\alpha\nu E\sin\Psi\Big[f(1-\cos\Psi)-E^2\Big]T^{-1/3}+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-4/3}),\\
\frac{dV_3}{dT}\Big|_{(2.3)} &= -\frac{\beta}{2}[E^2-\Psi^2+\mathcal{O}(\rho^3)]T^{-1}+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-4/3}).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает выражение для производной функции $V(E,\Psi,T)$, которая оказывается знакопостоянной в главном члене асимптотики:

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)} = -\frac{\beta}{2}(E^2+\Psi^2)T^{-1} + \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(T^{-1}) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-4/3}).$$

Так как остатки в последнем выражении могут быть сделаны сколь угодно малыми, то для любого $\sigma > 0$ существуют константы $\rho_1 > 0$, $T_1 > 0$ такие, что в окрестности $\mathcal{D}(\rho_1, T_1)$ справедлива оценка сверху

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)} \le -\frac{(\beta-\sigma)}{2}(E^2+\Psi^2)T^{-1}, \quad \beta-\sigma > 0.$$

Аналогично получаются оценки и для самой функции $V(E,\Psi,T)$, а именно для любого $\sigma > 0$ существуют такие $\rho_2 > 0$, $T_2 > 0$, что

$$\frac{(1-\sigma)}{2}(E^2+\Psi^2) \le V(E,\Psi,T) \le \frac{(1+\sigma)}{2}(E^2+\Psi^2)$$

при $(E,\Psi,t) \in \mathcal{D}(\rho_2, T_2)$. Выберем $\sigma \in (0, \min\{1,\beta\})$, тогда в области $\mathcal{D}(\rho_0, T_0)$, $\rho_0 = \min\{\rho_1,\rho_2\}$, $T_0 = \max\{T_1, T_2\}$ имеет место оценка

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)} \le -\beta_0 V T^{-1} \le 0, \quad \beta_0 = \frac{\beta-\sigma}{1+\sigma} > 0. \tag{2.7}$$

Зафиксируем параметр $\epsilon > 0$ ($\epsilon < \rho_0$) и определим $\delta_\epsilon = \epsilon\sqrt{1-\sigma}/(2\sqrt{1+\sigma})$. Тогда для функции Ляпунова выполняются неравенства

$$\sup_{\rho\le\delta_\epsilon, T>T_0} V(E,\Psi,T) \le (1+\sigma)\frac{\delta_\epsilon^2}{2} < (1-\sigma)\frac{\epsilon^2}{2} \le \inf_{\rho=\epsilon, T>T_0} V(E,\Psi,T). \tag{2.8}$$

Отсюда в силу отрицательности производной функции Ляпунова следует, что всякая траектория $E(T)$, $\Psi(T)$ с начальными данными $[E^2(T_0)+\Psi^2(T_0)]^{1/2} \le \delta_\epsilon$ не покинет ϵ-окрестность положения равновесия $(0;0)$ системы (2.3) при $T > T_0$:

$$[E^2(T)+\Psi^2(T)]^{1/2} < \epsilon, \quad T > T_0.$$

С помощью замены переменных (2.2) выводится оценка для решений системы (1.1)

$$|\mathcal{E}(\tau) - E_0(\tau)|(\lambda\tau)^{-1/2} + |\Phi(\tau) - \Psi_0(\tau)| < \epsilon, \quad \tau > \tau_0.$$

Теорема доказана. □

Заметим, что в теореме 1 доказана устойчивость решения $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ в окрестности бесконечности при $\tau > \tau_0$. Устойчивость решения на конечном промежутке $\tau \in (0;\tau_0]$ следует из теоремы о непрерывности решения задачи Коши относительно начальных данных [17, с. 22–23].

Достаточные условия, полученные в теореме 1, являются почти необходимыми, что видно из следующего утверждения.

Теорема 2. *Если в системе* (1.1) *коэффициент* $f < 1/2$, *то решение* $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (2.1) *неустойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично с помощью построенной функции Ляпунова (2.6). При этом для производной функции Ляпунова будет справедлива оценка снизу в области $\mathcal{D}(\rho_0, T_0)$:

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)} \ge \frac{(|\beta|-\sigma)}{2}(E^2+\Psi^2)T^{-1}, \quad |\beta|-\sigma > 0.$$

Из последней оценки и неравенства (2.8) в силу теоремы Ляпунова [23, с. 196] следует неустойчивость тривиального решения системы (2.3). Отсюда с учетом замены (2.2) вытекает неустойчивость решения $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ с асимптотикой (2.1). □

3. Постоянно действующие возмущения

В данном разделе исследуется устойчивость захвата в авторезонанс относительно постоянно действующих возмущений. Наряду с уравнениями (1.1) рассматривается возмущенная система (1.4)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = (1+\mu\xi)\mathcal{E}\sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \mathcal{E} - \lambda\tau + \mu\zeta + (f+\mu\eta)\cos\Phi.$$

Задача заключается в определении класса возмущений $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{P}$, при котором система (1.4) имеет авторезонансные решения с растущей энергией. В данном разделе предлагается исследовать устойчивость относительно постоянно действующих возмущений на конечном, но асимптотически большом интервале времени $0\le\tau\le\mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, где $|\mu|\ll 1$ — параметр возмущений, $\varkappa=\text{const}>0$. Такой подход основан на том, что исследуемая математическая модель (1.4) остается пригодной на конечном временном интервале [4]: при $0\le\tau\ll\varepsilon^{-1}$, где $0<\varepsilon\ll 1$ — малый параметр накачки в исходной задаче до усреднения (см. (1.2)). При этом на далеких временах явление авторезонанса описывается другими уравнениями [4]. Предлагаемый подход позволяет значительно расширить допустимый класс возмущений $\mathcal{P}$. Заметим, что похожая постановка задачи об устойчивости на асимптотически большом интервале времени рассматривалась в [20, с. 76].

Сформулируем определение устойчивости.

Определение 2. Решение $E_0(\tau),\Psi_0(\tau)$ системы (1.1) устойчиво относительно постоянно действующих возмущений $\mathcal{P}$ на асимптотически большом промежутке времени, если существуют $\tau_0,\varkappa>0$ такие, что $\forall\,\epsilon>0\ \exists\,\delta_\epsilon,\Delta_\epsilon>0$:

$$\forall\varrho_0,\phi_0: \quad |\varrho_0 - E_0(\tau_0)| + |\phi_0 - \Psi_0(\tau_0)| \le \delta_\epsilon,$$

$\forall\,|\mu|<\Delta_\epsilon$, $\forall\,(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{P}$ решение $\mathcal{E}_\mu(\tau)$, $\Phi_\mu(\tau)$ возмущенных уравнений (1.4) с начальными данными $\mathcal{E}_\mu(\tau_0)=\varrho_0$, $\Phi_\mu(\tau_0)=\phi_0$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{E}_\mu(\tau) - E_0(\tau)|\tau^{-1/2} + |\Phi_\mu(\tau) - \Psi_0(\tau)| < \epsilon$$

при $0<\tau-\tau_0\le\mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$.

Пусть a,b,c — некоторые числовые параметры. Определим класс возмущений $\mathcal{P}_{a,b,c}$ как множество функций (ξ,η,ζ), для которых конечна следующая величина:

$$\sup_{(\mathcal{E},\Phi)\in\mathbb{R}^2,\tau>0} |\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-a} + |\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-b} + |\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-c} < \infty.$$

Для каждого значения $h>0$ определим также $\mathcal{P}^h_{a,b,c}$ как подмножество функций $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{P}_{a,b,c}$, для которых выполняется оценка

$$\sup_{(\mathcal{E},\Phi)\in\mathbb{R}^2,\tau>0} |\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-a} + |\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-b} + |\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-c} \le h.$$

Требование глобальной разрешимости задачи Коши для системы (1.4) налагает дополнительные ограничения на возмущения. Такие условия считаются хорошо известными [17, с. 16].

Исследование устойчивости решения $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ сводится к задаче об устойчивости положения равновесия $(0;0)$ системы (2.3) относительно постоянно действующих возмущений. Для этого в возмущенных уравнениях (1.4) делается замена переменных (2.2), после чего система принимает вид

$$\frac{dE}{dT} = -\partial_\Psi H + \mu P, \quad \frac{d\Psi}{dT} = \partial_E H + G + \mu Q. \tag{3.1}$$

Гамильтониан $H(E,\Psi,T)$ и функция $G(E,\Psi,T)$ определяются формулами (2.4) и (2.5). Постоянно действующие возмущения системы (2.3) описываются функциями $P(E,\Psi,T)$ и $Q(E,\Psi,T)$:

$$P=\frac{\hat{\xi}}{\lambda\tau}(E_0+\sqrt{\lambda\tau}E)\sin(\Psi+\Psi_0),\quad Q=\frac{1}{\sqrt{\lambda\tau}}(\hat{\eta}\cos(\Psi+\Psi_0)+\hat{\zeta}). \tag{3.2}$$

Функции $\hat{\xi}(E,\Psi,T)$, $\hat{\eta}(E,\Psi,T)$, $\hat{\zeta}(E,\Psi,T)$ появляются в результате подстановки (2.2) в $\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)$, $\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)$, $\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)$ соответственно, например

$$\hat{\xi}(E,\Psi,T)=\xi(E_0(\tau)+\sqrt{\lambda\tau}E,\Psi_0(\tau)+\Psi,\tau),\quad \tau=\nu^2\lambda^{1/3}T^{2/3}.$$

Теорема 3. *Пусть в системе* (1.1) *коэффициент* $f>1/2$. *Тогда* $\forall\, h>0$, $a>-3/2$, $b>-1$, $c>-1$ *и* $\varkappa\in(0;\varkappa_0)$ *решение* $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (2.1) *устойчиво относительно постоянно действующих возмущений* $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{P}^h_{a,b,c}$:

$$\sup_{(\mathcal{E},\Phi)\in\mathbb{R}^2,\tau>0}|\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-a}+|\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-b}+|\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-c}\le h$$

на асимптотически большом промежутке времени $0<\tau\le\mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, *где* $\varkappa_0=2/(2\vartheta+3)$, $\vartheta=\max\{a,b-1/2,c-1/2\}$.

Доказательство утверждения проводится в два этапа. Сначала исследуется устойчивость положения равновесия $E(T)\equiv 0$, $\Psi(T)\equiv 0$ системы (2.3) относительно постоянно действующих возмущений $P(E,\Psi,T)$, $Q(E,\Psi,T)$. Затем на основе замены (2.2) делается вывод об устойчивости решения с растущей энергией $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$.

Зафиксируем $h>0$, $a>-3/2$, $b>-1$, $c>-1$. При исследовании уравнений (3.1) воспользуемся функцией Ляпунова (2.6), которая была построена в теореме 1. Вычислим полную производную функции $V(E,\Psi,T)$ в силу возмущенной системы (3.1):

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(3.1)}=\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)}+\mu(P\,\partial_E V+Q\,\partial_\Psi V).$$

Для первого слагаемого в правой части выражения справедлива оценка (2.7) в области $\mathcal{D}(\rho_0,T_0)$ с константами $0<\sigma<1$, $\beta_0>0$. Частные производные $\partial_E V$, $\partial_\Psi V$ ограничены в этой области и удовлетворяют оценкам $|\partial_E V|\le\ell$, $|\partial_\Psi V|\le\ell$. Из (3.2) и определения класса $\mathcal{P}^h_{a,b,c}$ следуют оценки для функций P и Q :

$$|P(E,\Psi,T)|\le M_hT^{2\vartheta/3},\quad |Q(E,\Psi,T)|\le M_hT^{2\vartheta/3},\quad (E,\Psi,T)\in\mathcal{D}(\rho_0,T_0),$$

с константой $M_h>0$ и показателем $\vartheta>-3/2$. Отсюда и из (2.7) вытекает оценка для полной производной функции $V(E,\Psi,T)$:

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(3.1)}\le-\beta_0T^{-1}\Big[V-\frac{2|\mu|\ell M_h}{\beta_0}T^{1+2\vartheta/3}\Big],\quad (E,\Psi,T)\in\mathcal{D}(\rho_0,T_0).$$

Зафиксируем $\epsilon\in(0;\rho_0)$, $0<\kappa<3/(2\vartheta+3)$ и определим параметры

$$\delta_\epsilon=\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}},\quad \Delta_\epsilon=(2T_0)^{-(3+2\vartheta)/\kappa_0}\Big[\frac{\beta_0(1-\sigma)\delta_\epsilon^2}{8\ell M_h}\Big]^{3/\kappa_0},\quad \kappa_0=3-(2\vartheta+3)\kappa>0.$$

Тогда при $|\mu|<\Delta_\epsilon$, $\delta_\epsilon<\rho<\rho_0$ на асимптотически большом интервале времени $0<T-T_0\le T_0|\mu|^{-\kappa}$ полная производная функции Ляпунова оказывается отрицательной:

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(3.1)}\le-\beta_0T^{-1}\Big[V-(1-\sigma)\frac{\delta_\epsilon^2}{4}\Big]<0. \tag{3.3}$$

Заметим, что для функции Ляпунова при выбранном δ_ϵ справедливы неравенства (2.8). Отсюда и из отрицательности полной производной функции $V(E,\Psi,T)$ на траекториях системы (3.1) следует, что всякое решение системы (3.1) с начальными данными $[\mathcal{E}_\mu^2(T_0)+\Phi_\mu^2(T_0)]^{1/2} = \delta_\epsilon$ остается в ϵ-окрестности нуля, т. е. $[\mathcal{E}_\mu^2(T)+\Phi_\mu^2(T)]^{1/2} < \epsilon$ при $0 < T - T_0 \le T_0|\mu|^{-\kappa}$.

В круге $\rho < \delta_\epsilon$ отрицательность полной производной функции $V(E,\Phi,T)$ не гарантируется. Поэтому либо траектории системы (3.1) с начальными данными $[\mathcal{E}_\mu^2(T_0)+\Phi_\mu^2(T_0)]^{1/2} < \delta_\epsilon$ остаются ограниченными $[E_\mu^2(T)+\Phi_\mu^2(T)]^{1/2} < \delta_\epsilon < \epsilon$ на интервале $0 < T - T_0 \le T_0|\mu|^{-\kappa}$, либо существуют T_ϵ: $0 < T_\epsilon - T_0 < T_0|\mu|^{-\kappa}$ и $[\mathcal{E}_\mu^2(T_\epsilon)+\Phi_\mu^2(T_\epsilon)]^{1/2} = \delta_\epsilon$. В последнем случае из оценок (3.3) и (2.8) следует, что $[\mathcal{E}_\mu^2(T)+\Phi_\mu^2(T)]^{1/2} < \epsilon$ при $T \in [T_\epsilon, T_0+T_0|\mu|^{-\kappa}]$. Следовательно, тривиальное решение системы (2.3) устойчиво при постоянно действующих возмущениях при $0 < T - T_0 \le T_0|\mu|^{-\kappa}$.

С помощью замены переменных (2.2) выводятся оценки для решений исходной системы (1.4):

$$|\mathcal{E}_\mu(\tau) - E_0(\tau)|(\lambda\tau)^{-1/2} + |\Phi_\mu(\tau) - \Psi_0(\tau)| < \epsilon$$

при $0 < \tau - \tau_0 \le \mathcal{O}(|\mu|^{-2\kappa/3})$, $\kappa \in (0; 3\varkappa_0/2)$. Устойчивость на конечном промежутке $\tau \in (0;\tau_0]$ следует из теоремы о непрерывности решения задачи Коши относительно параметров уравнений [17, с. 23]. Следовательно, $\forall\, h > 0$, $a > -3/2$, $b > -1$, $c > -1$ и $\varkappa \in (0;\varkappa_0)$ решение $E_0(\tau), \Psi_0(\tau)$ системы (1.1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях на асимптотически большом интервале времени $0 < \tau \le \mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, равномерно по $(\xi,\eta,\zeta) \in \mathcal{P}^h_{a,b,c}$. $\square$

З а м е ч а н и е. Доказанное утверждение содержит описание класса допустимых возмущений, при котором имеет место устойчивость явления авторезонанса на асимптотически большом интервале времени, причем масштаб временного интервала $\varkappa$ связан с параметрами a, b, c класса $\mathcal{P}_{a,b,c}$, отвечающими за скорость роста возмущений. В предельном случае, когда $a = -3/2$, $b = -1$, $c = -1$, то $\vartheta = -3/2$ и соответственно $\varkappa$ может принимать любые значения из интервала $(0;\infty)$, утверждение теоремы 3 согласуется с известными результатами об устойчивости параметрического авторезонанса на бесконечном промежутке [14].

П р и м е р. В качестве примера рассмотрим частный случай возмущений системы (1.1), а именно $\xi(\tau) \equiv 1$, $\eta(\tau) \equiv \tau$, $\zeta(\tau) \equiv \tau$. Тогда возмущенная система (1.4) примет вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = (1+\mu)\mathcal{E}\sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \mathcal{E} - (\lambda+\mu)\tau + (f+\mu\tau)\cos\Phi, \quad |\mu| \ll 1.$$

Такие возмущения содержатся в классе $\mathcal{P}^1_{0,1,1}$: $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$. Из теоремы 3 следует, что $\forall\varkappa \in (0;1/2)$ явление авторезонанса устойчиво относительно постоянно действующих возмущений на асимптотически большом интервале $0 < \tau \le \mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$.

С другой стороны, в данном случае возмущения имеют довольно простой вид и можно построить асимптотику возмущенных резонансных решений на бесконечности по τ. Одно из решений будет иметь асимптотику вида (1.3):

$$\mathcal{E}_\mu(\tau) = (\lambda+2\mu)\tau + f + \mathcal{O}(\tau^{-1}), \quad \Phi_\mu(\tau) = \pi - \frac{1}{1+\mu}\tau^{-1} + \mathcal{O}(\tau^{-2}), \quad \tau \to \infty.$$

Существование решения с такой асимптотикой следует из [16]. Оценим разность возмущенного $\mathcal{E}_\mu(\tau)$, $\Phi_\mu(\tau)$ и невозмущенного $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ решений при $\tau \to \infty$:

$$|E_0(\tau) - \mathcal{E}_\mu(\tau)|\tau^{-1/2} = 2|\mu|\tau^{1/2}[1+\mathcal{O}(\tau^{-2})], \quad |\Psi_0(\tau) - \Phi_\mu(\tau)| = |\mu|\tau^{-1}[(1+\mu)^{-1} + \mathcal{O}(\tau^{-1})].$$

Из оценки для разности энергий видно, что устойчивости на бесконечном промежутке нет: при $\tau \ge \mu^{-2}$ возмущенное решение будет отличаться от невозмущенного на величину порядка единицы. Однако при $\tau \le \mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, $\varkappa \in (0;1/2)$ имеет место оценка

$$|E_0(\tau) - \mathcal{E}_\mu(\tau)|\tau^{-1/2} + |\Psi_0(\tau) - \Phi_\mu(\tau)| \le \mathcal{O}(|\mu|^{1-\varkappa/2}),$$

которая указывает на устойчивость на асимптотически большом промежутке. Похожие оценки имеют место и для других резонансных решений возмущенной системы.

В случае, когда функции возмущений имеют более сложный вид, анализ устойчивости на основе асимптотики для возмущенных решений зачастую оказывается недоступным. Это связано с тем, что построение и обоснование асимптотик в некоторых случаях может вызывать значительные трудности. В таких ситуациях теорема 3 дает эффективный инструмент для анализа устойчивости.

4. Заключение

Исследована устойчивость параметрического авторезонанса при постоянно действующих возмущениях. Описаны классы детерминированных возмущений, при наличии которых имеет место захват в авторезонанс. Случайные возмущения авторезонанса исследовались в [15]. Эти результаты могут быть расширены с помощью подходов, развитых в настоящей работе. Открытым остается вопрос о влиянии белого шума на параметрический авторезонанс.

Полученные результаты для модельных уравнений (1.1) достаточно просто переносятся на нелинейные осциллирующие системы с параметрической накачкой вида (1.5). В частности, из теоремы 3 и формул (1.6) следует, что если в уравнении (1.5)

$$|a(t;\varepsilon)| \leq \sqrt{\varepsilon t}, \quad |\varphi(t;\varepsilon)| \leq \varepsilon^2 t^2, \quad t \geq 0,$$

то в соответствующей усредненной системе (1.4) имеет место захват в резонанс при $\tau \ll \mu^{-1/2}$. Установим связь между ε — малым параметром накачки в исходной задаче и μ — параметром возмущения так, чтобы область пригодности модели (1.4) содержалась в интервале устойчивости: $\varepsilon^{-2} < \varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}$. Положим $\mu = \varepsilon^{5/2}$, тогда из теоремы 3 следует, что в нелинейной системе (1.5), где $\mu a(t;\varepsilon) = \varepsilon^3 t^{1/2} a_0(t;\varepsilon)$, $\mu\varphi(t;\varepsilon) = \varepsilon^{9/2} t^2 \varphi_0(t;\varepsilon)$, $a_0(t;\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$, $\varphi_0(t;\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ сохраняется захват в параметрический авторезонанс.

Автор благодарит Л.А. Калякина и О.М. Киселева за полезные обсуждения и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Векслер В.И.** Новый метод ускорения релятивистских частиц // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43, № 8. С. 346–348.
2. **McMillan E.M.** The synchrotron–a proposed high energy particle accelerator // Phys. Rev. 1945. Vol. 68. P. 143–144
3. **Fajans J., Friedland L.** Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators // Am. J. Phys. 2001. Vol. 69, no. 10. P. 1096–1102.
4. **Kalyakin L.A.** Asymptotic analysis of autoresonance models // Russian Math. Surveys. 2008. Vol. 63, no. 5. P. 791–857.
5. **Коломенский А.А., Лебедев А.Н.** Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.
6. **Горелик Г.С.** Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. М.: Физматлит, 2007. 565 с.
7. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 501 с.
8. **Khain E., Meerson B.** Parametric autoresonance // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, iss. 3. P. 036619.
9. **Kiselev O.M., Glebov S.G.** The capture into parametric autoresonance // Nonlinear Dynam. 2007. Vol. 48, no. 1–2. P. 217–230.
10. Autoresonance parametric excitation of localized oscillations of magnetization in a ferromagnet by an AC field of a variable frequency / L.A. Kalyakin, M.A. Shamsutdinov, R.N. Garifullin, R.K. Salimov // The Physics of Metals and Metallography. 2007. Vol. 104, no. 2. P. 107–120.

11. **Assaf M., Meerson B.** Parametric autoresonance of Faraday waves // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, iss. 1. P. 016310.
12. **Glebov S., Kiselev O., Tarkhanov N.** Weakly nonlinear dispersive waves under parametric resonance perturbation // Studies in Appl. Math. 2009. Vol. 124. P. 19–37.
13. **Kalyakin L.A., Sultanov O.A.** Stability of autoresonance models // Differ. Equ. 2013. Vol. 49, no. 3. P. 267–281.
14. **Султанов О.А.** Устойчивость моделей авторезонанса относительно возмущений, ограниченных в среднем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 274–283.
15. **Sultanov O.A.** Stability of autoresonance models subject to random perturbations for systems of nonlinear oscillation equations // Comput. Math. Math. Phys. 2014. Vol. 54, no. 1. P. 59–73.
16. **Кузнецов А.Н.** О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функц. анализ и его приложения. 1989. Т. 23, № 4. С. 63–74.
17. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал, 2004. 552 с.
18. **Kalyakin L.A.** Justification of asymptotic expansions for the principal resonance equations // Proc. Steklov Inst. Math. 2003. Suppl. 1. P. S108–S122.
19. **Garifullin R.N., Kalyakin L.A., Shamsutdinov M.A.** Autoresonance excitation of a breather in weak ferromagnetics // Comput. Math. Math. Phys. 2007. Vol. 47, no. 7. P. 1158–1170.
20. **Хапаев М.М.** Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая шк., 1988. 184 с.
21. **Румянцев В.В., Озиранер А.С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
22. **Султанов О.А.** Функции Ляпунова для неавтономных систем близких к гамильтоновым // Уфим. мат. журн. 2010. Т. 2, № 4. С. 88–98.
23. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 432 с.

Султанов Оскар Анварович
аспирант
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: oasultanov@gmail.com

Поступила 23.11.2014