ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.65

О КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ[1]

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

Вычислены точно константы Лебега (нормы линейных операторов из C в C) локальных параболических сплайнов с произвольным расположением узлов, построенных вторым автором в 2005 г., и локальных параболических сплайнов Н. П. Корнейчука, точных на квадратичных функциях. Обе константы оказались меньше, чем у интерполяционных параболических сплайнов.

Ключевые слова: константы Лебега, локальные параболические сплайны, произвольные узлы.

E. V. Strelkova, V. T Shevaldin. On Lebesgue constants of local parabolic splines.

Lebesgue constants (the norms of linear operators from C to C) are calculated exactly for local parabolic splines with an arbitrary arrangement of knots, which were constructed by the second author in 2005, and for N.P. Korneichuk's local parabolic splines, which are exact on quadratic functions. Both constants are smaller than the constants for interpolation parabolic splines.

Keywords: Lebesgue constants, local parabolic splines, arbitrary knots.

Введение

Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассмотрим линейный метод $S(x) = S(f,x)$ ее аппроксимации на оси $\mathbb{R}$ полиномиальными сплайнами минимального дефекта степени r (порядка $r+1$) с произвольными узлами. Одной из характеристик устойчивости метода S является поведение равномерной нормы оператора S (как оператора, действующего из пространства непрерывных на оси функций $C = C(\mathbb{R})$ в C), а именно, величина

$$L = \|S\|_C^C = \sup_{\|f\|_C \le 1} \|S(f,\cdot)\|_C.$$

Число L называется константой Лебега метода S. Чем меньше такая константа, тем больше устойчивость метода к изменению аппроксимационных условий.

Различными вопросами, связанными с константами Лебега для интерполяционных полиномиальных сплайнов (и их обобщений), занимались Ф. Шурер и Е. В. Чини [1], Ф. Ричардс [2], А. А. Женсыкбаев [3], И. Цимбаларио [4], Х. Г. Морше [5], Ю. Н. Субботин и С. А. Теляковский [6;7], В. А. Ким [8;9] и многие другие. Принципиальный результат в этом направлении принадлежит Ю. Н. Субботину и С. А. Теляковскому [6], которые доказали, что константы Лебега L интерполяционных N-периодических полиномиальных сплайнов $S_{r,N}(x)$ степени r с равномерными узлами асимптотически ведут себя следующим образом:

$$L = \|S_{r,N}\|_C^C = \frac{2}{\pi}\ln(\min(N,r)) + O(1), \tag{0.1}$$

причем слагаемое $O(1)$ не зависит от N и r. Отметим, что точно вычислить в этой тематике константы L удается далеко не всегда. Даже выяснение порядков L по различным параметрам представляет большой интерес. Естественно поставить вопрос об изучении констант Лебега неинтерполяционных полиномиальных сплайнов (и их обобщений), аппроксимирующих (в том или ином смысле) непрерывные функции на отрезке числовой прямой $\mathbb{R}$ и на всей прямой. Перейдем к более точным формулировкам.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Пусть в узлах равномерной с шагом $h > 0$ сетки $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$ числовой прямой заданы значения $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ некоторой функции $f(x)$: $y_j = f(jh)$, $j \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $\widetilde{B}_{r+1}$ нормализованный (в C) полиномиальный базисный сплайн (B-сплайн) степени r (порядка $r+1$) с носителем $\operatorname{supp}\widetilde{B}_{r+1} = [0;(r+1)h]$ и равномерными узлами $0,\ h,\ 2h,\dots,(r+1)h$ (см., например, [10, гл. 1]). В 1975 г. Т. Лич и Л. Шумейкер [11] (см., также [10, гл. 9]) для любой функции $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ построили локальные полиномиальные сплайны $(r+1)$-го порядка вида

$$S_{r+1}(x) = S_{r+1}(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{s=-k}\gamma_s f((j+s)h)\widetilde{B}_{r+1}\Big(x - jh - \frac{r+1}{2}h\Big) \qquad (x\in\mathbb{R}), \tag{0.2}$$

где $k = [r/2]$ и действительные коэффициенты γ_s выбирались из условия точности формулы $S_{r+1}(f,x) = f(x)$ для алгебраических многочленов степени r. Было доказано, что такой выбор коэффициентов может быть осуществлен единственным образом. Локальный сплайн вида (0.2) не является интерполяционным, так как $S_{r+1}(jh) \neq y_j$ $(j\in\mathbb{Z})$, и его значение в фиксированной точке $x\in\mathbb{R}$ зависит только от нескольких значений $y_j = f(jh)$, определяемых носителями сдвигов B-сплайна, в которые входит точка x. Результаты Т. Лича и Л. Шумейкера [11] развивались и обобщались в различных направлениях (см., например, библиографию в работе авторов [12]). Методы локальной аппроксимации сплайнами (с равномерными и неравномерными узлами) стали эффективным инструментом решения разнообразных задач теории приближения функций и численного анализа как полезная альтернатива метода интерполяции. Оказалось (см., например, [10; 13]), что порядки аппроксимации локальными полиномиальными сплайнами $(r+1)$-го порядка с равномерными узлами классических соболевских классов W^r_∞ r раз почти всюду дифференцируемых функций в равномерной метрике совпадают с порядками аппроксимации этих классов соответствующими интерполяционными сплайнами и равняются порядкам колмогоровских поперечников указанных классов функций. Напомним, что класс функций W^r_∞ определяется следующим образом:

$$W^r_\infty = \{f\colon f^{(r-1)}\in AC,\ \|f^{(r)}\|_{L_\infty}\le 1\}.$$

Здесь AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $\|g\|_{L_\infty} = \|g\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$. Но при этом, помимо простоты построения, методы локальной аппроксимации сплайнами (в отличие от интерполяционных методов) обладают еще и полезными формосохраняющими и сглаживающими свойствами (см., например, [14–16] и ссылки в этих работах). Возникает естественный вопрос о сравнении локальных и интерполяционных сплайнов в смысле услойчивости к изменению исходных данных (т. е. чисел $y_j = f(jh)$). Интересно выяснить, у каких из них константы Лебега будут меньше. Поставим задачу о вычислении (или оценке) констант Лебега

$$L = \|S_{r+1}\|^C_C = \sup_{\|f\|_C\le 1}\|S_{r+1}(f,\cdot)\|_C$$

для локальных полиномиальных сплайнов вида (0.2) $S_{r+1}(f,x)$ Т. Лича и Л. Шумейкера [11]. Пока не видно подходов к нахождению этих величин в случае произвольного r. Вначале хотелось бы получить асимптотическое равенство типа (0.1).

Далее будет доказано (теорема 1), что для параболических сплайнов (т. е. при $r = 2$), сохраняющих квадратичные функции, величина

$$\|S_3\|^C_C = 1.25.$$

В. А. Ким [8] показал, что константа Лебега интерполяционных параболических сплайнов, у которых сетка узлов сплайна сдвинута на полшага (т. е. на $h/2$) относительно сетки узлов интерполяции, равна $L = \sqrt{2}\approx 1,41$. Сравнение этих результатов показывает, что в вопросе устойчивости локальные параболические сплайны вида (0.2) (их коэффициенты $\gamma_{-1} = -1/8$, $\gamma_2 = 5/4$, $\gamma_3 = -1/8$ указал Н. П. Корнейчук [17]) имеют преимущество перед соответствующими интерполяционными.

В 1993 г. Ю. Н. Субботин [14] на классе функций W^2_∞, заданных на равномерной сетке $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, построил еще один (неинтерполяционный) метод локальной параболической аппроксимации, использующий параболические сплайны с дополнительными узлами и сохраняющий локально геометрические свойства (монотонность и выпуклость) исходных данных $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$. В периодическом случае этот метод оказался экстремальным в смысле поперечников по Колмогорову и по Коновалову. В 2005 г. один из авторов этой статьи В. Т. Шевалдин [15] обобщил данный метод на параболические сплайны с произвольным расположением узлов. Нам удалось доказать (см. далее теорему 2), что для любой сетки узлов сплайна константы Лебега таких сплайнов равны 1.

1. Сплайны Н. П. Корнейчука

Пусть $B_3(x) = \widetilde{B}_3(x + 3h/2)$ (см., например, [10]) — нормализованный параболический B-сплайн с равномерными узлами $-3h/2,\ -h/2,\ h/2,\ 3h/2$. Он может быть записан в виде

$$B_3(x) = \frac{1}{2h^2}\begin{cases} \Big(x+\dfrac{3h}{2}\Big)^2, & x \in \Big[-\dfrac{3h}{2}; -\dfrac{h}{2}\Big], \\ \dfrac{3h^2}{2} - 2x^2, & x \in \Big[-\dfrac{h}{2}; \dfrac{h}{2}\Big], \\ \Big(\dfrac{3h}{2} - x\Big)^2, & x \in \Big[\dfrac{h}{2}; \dfrac{3h}{2}\Big], \\ 0, & x \notin \Big[-\dfrac{3h}{2}; \dfrac{3h}{2}\Big]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$, и пусть

$$I_j = \Big(-\frac{1}{8}\Big)y_{j-1} + \frac{5}{4}y_j + \Big(-\frac{1}{8}\Big)y_{j+1} \quad (j \in \mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

— последовательность линейных функционалов. Рассмотрим локальный параболический сплайн вида

$$S_3(x) = S_3(f, x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_j\ B_3(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Формула (1.3) — частный случай формулы (0.2) при $r = 2$. Такие локальные сплайны изучал Н. П. Корнейчук [17]. Он доказал, что для любого квадратного трехчлена $p_2(x) \in P_2$ имеет место равенство

$$S_3(p_2(\cdot), x) = p_2(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.4}$$

Здесь P_2 — пространство алгебраических многочленов второй степени с действительными коэффициентами. Равенство (1.4) означает, что схема локальной аппроксимации (1.2), (1.3) сохраняет пространство P_2. Нетрудно проверить, что $S_3(jh) \neq y_j$ $(j \in \mathbb{Z})$, т. е. построенные локальные сплайны не являются интерполяционными. Кроме того, Н. П. Корнейчук доказал, что

$$\sup_{f\in W^2_\infty} \|f - S_3\|_C = \frac{9}{32}h^2. \tag{1.5}$$

Пусть

$$d_m(W^2_\infty)_C = \inf_{\dim M_m \le m}\ \sup_{f\in W^2_\infty}\ \inf_{g\in M_m} \|f - g\|_C \tag{1.6}$$

— колмогоровский поперечник порядка m класса функций $W^2_\infty = W^2_\infty(\mathbb{R})$. Известно (см., например, [13]), что для 1-периодических функций

$$d_{2n-1}(W^2_\infty)_C = d_{2n}(W^2_\infty)_C = \frac{h^2}{8} \qquad \Big(h = \frac{1}{n}\Big),$$

причем экстремальным подпространством M_m (реализующим внешний inf в равенстве (1.6)) при четном $m = 2n$ является пространство интерполяционных параболических сплайнов с равномерными узлами (у них узлы интерполяции сдвинуты на полшага по сравнению с узлами сплайна), а также пространство локальных сплайнов Ю. Н. Субботина [14]. Равенство (1.5) означает, что сплайны Н. П. Корнейчука приближают класс функций W^2_∞ с тем же порядком h^2, но сами по себе экстремальным подпространством (в смысле поперечника по Колмогорову) не являются. Рассмотрим теперь константу Лебега метода Н. П. Корнейчука [17]. Нас интересует ответ на следующий вопрос. Пусть все числа y_j таковы, что $|y_j| \le 1$ $(j \in \mathbb{Z})$. Чему в этом случае равна величина

$$L_1 = \max_{x\in\mathbb{R}} \big\{ |S_3(x)| \colon |y_j| \le 1 \ (j \in \mathbb{Z}) \big\}?$$

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$L_1 = 1.25.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x \in [(l-1/2)h; (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ сплайн $S_3(x)$, определенный формулами (1.2), (1.3), с учетом равенства (1.1) можно представить в виде

$$S_3(x) = \frac{1}{16h^2}\Big[(-y_{l-2} + 10y_{l-1} - y_l)\Big(t - \frac{h}{2}\Big)^2 + (-y_{l-1} + 10y_l - y_{l+1})\Big(\frac{3h^2}{2} - 2t^2\Big)$$

$$+ (-y_l + 10y_{l+1} - y_{l+2})\Big(t + \frac{h}{2}\Big)^2\Big] = \frac{1}{16h^2}\sum_{s=1}^{5} y_{l+s-1}q_s(t), \tag{1.7}$$

где $t = x - lh \in [-h/2; h/2]$ и

$$q_1(t) = -\Big(t - \frac{h}{2}\Big)^2, \qquad q_2(t) = 12t^2 - 10th + h^2, \qquad q_3(t) = -22t^2 + \frac{29}{2}h^2,$$

$$q_4(t) = 12t^2 + 10th + h^2, \qquad q_5(t) = -\Big(t + \frac{h}{2}\Big)^2.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $l = 0$. Из (1.7) имеем

$$|S_3(x)| \le \frac{1}{16h^2} q(t) \max_{-2\le j\le 2} |y_j|, \tag{1.8}$$

где $q(t) = \sum_{s=1}^{5} |q_s(t)|$. Анализ нулей квадратных трехчленов $q_s(t)$ $(s = \overline{1,5})$ показывает, что имеет место равенство

$$q(t) = \begin{cases} 5(-4t^2 - 4th + 3h^2), & -\dfrac{h}{2} \le t \le \dfrac{-5+\sqrt{13}}{12}h, \\ 4t^2 + 17h^2, & \dfrac{-5+\sqrt{13}}{12}h \le t \le \dfrac{5-\sqrt{13}}{12}h, \\ 5(-4t^2 + 4th + 3h^2), & \dfrac{5-\sqrt{13}}{12}h \le t \le \dfrac{h}{2}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Из (1.9) выводим равенство

$$\max_{t\in[-h/2;h/2]} q(t) = q\Big(-\frac{h}{2}\Big) = q\Big(\frac{h}{2}\Big) = 20h^2, \tag{1.10}$$

причем при $t = -h/2$ знак равенства в неравенстве (1.8) реализуется при $y_{-2} = y_1 = y_2 = -1$, $y_{-1} = y_0 = 1$, а при $t = h/2$ — при $y_{-2} = y_{-1} = y_2 = -1$, $y_0 = y_1 = 1$. Из (1.8)–(1.10) следует утверждение теоремы 1.

2. Локальные параболические сплайны с произвольными узлами, сохраняющие линейные функции

Рассмотрим на оси $\mathbb{R}$ бесконечную в обе стороны сетку узлов: $\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$; $h_j = x_{j+1} - x_j$, $x_{j+1/2} = 0,5(x_j + x_{j+1})$ $(j \in \mathbb{Z})$. Для функции $f \in W^2_\infty(\mathbb{R})$ построим разделенную разность второго порядка по значениям функции $y = f(x)$ в точках x_j, x_{j+1} и x_{j+2}:

$$[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}] = f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{y_{j+2}}{h_{j+1}(h_{j+1}+h_j)} - \frac{y_{j+1}}{h_{j+1}h_j} + \frac{y_j}{h_j(h_{j+1}+h_j)} \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

Функции $f \in W^2_\infty(\mathbb{R})$ ставится в соответствие (см. [15]) локальный параболический сплайн вида

$$\widetilde{S}_3(x) = \widetilde{S}_3(f,x) = f(x_j) + \frac{h_{j-1}h_j}{4} f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{h_j + h_{j-1}}(x - x_j)$$
$$+ \frac{h_{j-1}}{h_j}(x-x_j)^2 f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] + \Big(\frac{h_{j+1}}{h_j} f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] - \frac{h_{j-1}}{h_j} f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]\Big)$$
$$\times (x - x_{j+1/2})^2_+, \qquad x \in [x_j; x_{j+1}] \qquad (j \in \mathbb{Z}), \tag{2.1}$$

где $(x - x_{j+1/2})^2_+ = \max\{0; (x - x_{j+1/2})\}^2$. Для равномерной сетки узлов $h_j = h$ $(j \in \mathbb{Z})$ сплайн (2.1) был построен Ю. Н. Субботиным [14]. Сплайн $\widetilde{S}_3(x)$ обладает формосохраняющими и сглаживающими свойствами (см. [15, теорема 1]) и сохраняет линейные функции. В [15] на классе функций $W^2_\infty(\mathbb{R})$ для него были вычислены величины погрешностей аппроксимации

$$\sup_{f \in W^2_\infty} \|f - \widetilde{S}_3\|_C, \qquad \sup_{f \in W^2_\infty} \|f' - \widetilde{S}_3'\|_C,$$

причем в случае равномерной сетки, как показал Ю. Н. Субботин [14], первая величина равняется $h^2/8$, а вторая — $h/2$.

В настоящей работе мы исследуем константу Лебега

$$L_2 = \max_{x \in \mathbb{R}} \big\{ |\widetilde{S}_3(x)| \colon |y_j| \le 1 \ (j \in \mathbb{Z}) \big\}.$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$L_2 = 1.$$

Доказательство. Приводя подобные члены в равенстве (2.1) при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$, получим

$$\widetilde{S}_3(x) = y_{j-1} r_1(x) + y_j r_2(x) + y_{j+1} r_3(x), \tag{2.2}$$

где

$$r_1(x) = \frac{1}{h_{j-1} + h_j}\Big(\frac{h_j}{4} - (x - x_j) + \frac{(x-x_j)^2}{h_j}\Big), \qquad r_2(x) = \frac{3}{4} - \frac{(x-x_j)^2}{h_j^2},$$

$$r_3(x) = \frac{1}{h_{j-1} + h_j}\Big(\frac{h_{j-1}}{4} + x - x_j + \frac{(x-x_j)^2 h_{j-1}}{h_j^2}\Big).$$

Из (2.2) следует, что

$$|\widetilde{S}_3(x)| \le \max_{j-1 \le s \le j+1} |y_s| \big\{ |r_1(x)| + |r_2(x)| + |r_3(x)| \big\}. \tag{2.3}$$

Покажем, что все три квадратных трехчлена $r_1(x)$, $r_2(x)$ и $r_3(x)$ неотрицательны при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$. В самом деле, $r_1(x_j) > 0$, $r_1(x_{j+1/2}) = 0$, $r_1'(x_{j+1/2}) = 0$, и потому $r_1(x) \ge 0$ при

$x \in [x_j; x_{j+1/2}]$. У квадратного трехчлена $r_2(x)$ коэффициент при x^2 отрицательный, $r_2(x_j) = 3/4$, $r_2(x_{j+1/2}) = 1/2$, и тогда $r_2(x) > 0$ при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$. Далее $r_3(x_j) > 0$ и $r_3'(x) > 0$ при $x > x_j$. Следовательно, $r_3(x) > 0$ при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$. Из неравенства (2.3) выводим оценку

$$|\widetilde{S}_3(x)| \le \max_{j-1 \le s \le j+1} |y_s| \big\{ r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) \big\}. \tag{2.4}$$

После несложных преобразований получаем, что

$$r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) = 1.$$

Поскольку все числа $|y_j| \le 1$ $(j \in \mathbb{Z})$, то из (2.4) при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$ выводим оценку

$$|\widetilde{S}_3(x)| \le 1,$$

причем знак равенства в этом неравенстве реализуют числа $y_j = 1$ $(j = s-1, s, s+1)$. Формула (2.1) для сплайна $\widetilde{S}_3(x)$ на отрезке $[x_j; x_{j+1}]$ симметрична относительно середины этого отрезка (т. е. точки $x = x_{j+1/2}$), поэтому имеет место неравенство $|\widetilde{S}_3(x)| \le 1$, $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$. Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schurer F., Cheney E.W.** On interpolation cubic splines with equally-spaced nodes // Proc. Nederlande Acad. van Wetenschappen. 1968. Bd. 71, H. 5. P. 517–524.
2. **Richards F.** The Lebesque constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14, № 2. P. 83–92.
3. **Женсыкбаев А.А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
4. **Tzimbalario J.** Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, № 2. P. 441–448.
5. **Morsche H.G. ter** On the Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, № 3. C. 232–246.
6. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
7. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Нормы в L периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 108–117.
8. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
9. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 169–177.
10. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
11. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, № 4. P. 294–325.
12. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Локальные экспоненциальные сплайны с произвольными узлами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 258–263.
13. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
14. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
15. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.

16. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Формосохранение при аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами произвольного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 291–299.
17. **Корнейчук Н.П.** О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журнал. 1982. Т. 34, № 5. С. 617–621.

Стрелкова Елена Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Поступила 12.08.2014

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru