ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.977

РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ МАССИВНЫХ ТЕЛ ПРИ НАГРЕВЕ ПОДВИЖНЫМ ПОЛОСОВЫМ ИСТОЧНИКОМ[1]

И. В. Першин

Рассматривается вторая краевая задача о нагреве массивного тела высококонцентрированным движущимся полосовым источником тепла большой мощности. Построены главные члены внутреннего и внешнего асимптотического разложения решения, исследовано поведение этого решения в окрестности источника тепла.

Ключевые слова: краевые задачи для уравнений в частных производных, асимптотика решения.

I. V. Pershin. The calculation of the thermal field of massive bodies moving band heat source.

Considered the second boundary value problem of the heating of a massive body of highly concentrated moving strip source heat a large capacity. Built the major members of the interior and exterior asymptotic expansions of solutions, investigated the behavior of this solution in the the area of influence of a heat source.

Keywords: boundary value problems for partial differential equations, asymptotics of a solution.

Посвящается памяти академика А. М. Ильина

Введение

Современные процессы сварки и наплавки (электронно-лучевая, лазерная) характеризуются наличием сосредоточенных источников тепла большой мощности, поэтому вблизи источника тепла температура на небольшом участке резко возрастает, возникают большие температурные градиенты.

Рассматривается задача о нагреве полубесконечного тела мощным подвижным источником тепла, заданным на полосе малой ширины. Задача имеет явное аналитическое решение, однако использовать это решение для прикладных расчетов крайне затруднительно, так как решение имеет особенности вблизи источника тепла.

Один из путей получения пригодных для практики расчетных формул состоит в том, чтобы представить решение несколькими членами асимптотического разложения по некоторому параметру [3].

Проведено исследование поведения решения в случае, когда эффективная (полная) мощность источника тепла постоянна, а площадь нагрева стремится к нулю. Получены простые формулы для расчета температуры, при этом вдали от источника тепла используется одно представление решения, в окрестности источника — другое, учитывающее особенности поведения решения в этой области.

1. Постановка задачи

По поверхности полубесконечного тела с постоянной скоростью перемещается источник тепла, заданный на узкой полосе. Предполагаются выполненными следующие условия: распро-

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322) и программы УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”).

странение тепла в теле происходит только с помощью теплопроводности, при этом теплофизические свойства материала не зависят от температуры; отсутствуют фазовые и структурные превращения; граничная поверхность теплоизолирована; источник нагрева распределен в полосе заданной ширины, эффективная мощность источника постоянна во времени и обратно пропорциональна ширине полосы.

Задача решается в области

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < \widetilde{y} < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0.$$

Обозначение $\widetilde{y}$ показывает, что задача решается в неподвижной системе координат.

Полосовой источник тепла действует на границе $x = 0$, движется вдоль оси $\widetilde{y} = 0$ с постоянной скоростью v. В этом случае тепловое поле полубесконечного тела является симметричным по координате z и задача сводится к двумерному случаю: определение поля температур в полуплоскости, по границе которой движется источник тепла малой ширины. При этом ширина источника тепла стремится к нулю, а мощность источника — к бесконечности.

Задача описывается двумерным уравнением теплопроводности и граничными условиями :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial \widetilde{y}^2}\Big), \\ \Big(-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = \Phi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon), \\ T(x, \widetilde{y}, 0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

в области $0 < x < \infty,\ -\infty < \widetilde{y} < \infty,\ t > 0.$

Функция Φ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon)\, d\widetilde{y} = Q,$$

которое означает, что эффективная (полная) мощность источника тепла остается постоянной, хотя удельный тепловой поток стремится к бесконечности, а ширина источника тепла стремится к нулю.

Здесь λ — коэффициент теплопроводности, $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, $c,\ \rho$ — теплоемкость и плотность металла. Параметр ε определяет ширину полосы нагрева источника тепла, функция Φ задает распределение мощности источника тепла по ширине нагрева.

Не теряя общности, для простоты можно положить коэффициенты теплопроводности и температуропроводности по величине равными 1, что можно достичь простой заменой переменных, а также принять эффективную мощность $Q = 1$. Заменой переменных приведем систему (1) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{y}^2}\Big), \\ \Big(-\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = \varphi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon), \\ u = (x, \widetilde{y}, 0) = 0, \\ 0 < x < \infty,\ -\infty < \widetilde{y} < \infty,\ t > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\varphi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{\widetilde{y} - vt}{\varepsilon}\Big);$$

ψ — плотность распределения теплового потока по полосе нагрева, которая задается следующим образом:

$$\psi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon), & |\widetilde{y} - vt| \le \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & |\widetilde{y} - vt| > \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Функция φ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon)\, d\widetilde{y} = 1$, а ψ_1 — ограниченная функция. Это условие показывает, что эффективная мощность источника тепла остается постоянной, если ширина полосы нагрева стремится к нулю.

В предельном случае при $\varepsilon = 0$ функция $\varphi(\widetilde{y}, v, t, 0)$ вырождается в дельта-функцию Дирака [2].

Можно показать [4; 7], что решение задачи (2) имеет вид

$$u(x, \widetilde{y}, t) = \int\limits_0^t \frac{1}{2\pi(t-\omega)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{x^2 + (\widetilde{y} - \xi)^2}{4(t-\omega)}\Big) \varphi\,(\xi, v, \omega, \varepsilon)\, d\xi\, d\omega. \tag{3}$$

Ниже проведено исследование поведения решения (3) в случае, когда эффективная мощность источника тепла постоянна, а площадь нагрева стремится к нолю.

В этом случае необходимо построить, в соответствии с [1], два различных вида асимптотики решения (3) в различных областях:

— в окрестности источника тепла, где возникают большие температуры и температурные градиенты, строится внутреннее асимптотическое разложение, учитывающее особенности поведения решения и его производных;

— вне области влияния источника тепла, где решение имеет гладкий характер, строится внешнее разложение.

2. Внешнее асимптотическое разложение

Введем новые переменные:

$$\zeta = \frac{\xi - v\omega}{\varepsilon}, \quad \tau = (t - \omega), \quad y = \widetilde{y} - vt.$$

В результате получим решение задачи (2) в подвижной системе координат, связанной с источником тепла:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t \frac{1}{\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{x^2 + (y + v\tau - \varepsilon\zeta)^2}{4\tau}\Big) \psi(\zeta) d\zeta d\tau. \tag{4}$$

Внешнее разложение ищем в виде асимптотического ряда по степеням ε [1]: $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k$, где u_k — неизвестные функции, подлежащие определению. Для практического применения достаточно определить первые два-три члена ряда.

Решение (4) можно представить в виде

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\zeta) G d\zeta,$$

где

$$G = \int\limits_0^t \frac{1}{\tau} \exp\Big(-\frac{x^2 + (y + v\tau - \varepsilon\zeta)^2}{4\tau}\Big) d\tau.$$

Обозначим $\alpha^2 = x^2 + y^2$, исследуем поведение функции G при $\varepsilon \to 0$ в области $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, где $\alpha_0 > m\varepsilon$, m — некоторая константа.

Функцию G представим в виде

$$G = \exp\Big(\frac{v}{2}(\varepsilon\zeta - y)\Big) \int\limits_0^t \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2\zeta^2 - 2y\varepsilon\zeta}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big) d\tau.$$

Разложив в ряд множитель перед интегралом, имеем

$$G = \exp\Big(-\frac{vy}{2}\Big)\Big(1 + \varepsilon\frac{v\zeta}{2} + \varepsilon^2\frac{c^2\zeta^2}{8}\Big) \int\limits_0^t \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2\zeta^2 - 2y\varepsilon\zeta}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big) d\tau$$

$$= \exp\Big(- \frac{vy}{2}\Big)\Big(1 + \varepsilon\frac{v\zeta}{2} + \varepsilon^2\frac{v^2\zeta^2}{8}\Big)\left(G_1 - G_2\right),$$

где

$$G_1 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2\zeta^2 - 2y\varepsilon\zeta}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big) d\tau, \quad G_2 = \int\limits_t^\infty \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2\zeta^2 - 2y\varepsilon\zeta}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big) d\tau.$$

Здесь G_1 — это функция Макдональда (или модифицированная функция Бесселя) [2]:

$$G_1 = 2K_0\bigg(\frac{\alpha v}{2}\sqrt{\Big(1 + \frac{\varepsilon^2\zeta^2}{\alpha^2} - \frac{2\varepsilon\zeta y}{\alpha^2}\Big)}\bigg).$$

Разложив данную функцию в ряд при малых ε, получим

$$G_1 = 2K_0\left(\frac{\alpha v}{2}\right) + \varepsilon K_1\left(\frac{\alpha v}{2}\right)\frac{v\zeta y}{\alpha} + 2\varepsilon^2\left(K_0\left(\frac{\alpha v}{2}\right)\frac{v^2\zeta^2 y^2}{8\alpha^2} + K_1\left(\frac{\alpha v}{2}\right)\left(\frac{v\zeta^2 y^2}{\alpha^3} + \frac{v\zeta^2}{4\alpha}\right)\right).$$

Здесь K_0, K_1 — функции Макдональда нулевого и первого порядка соответственно [2]. Аналогичное преобразование проведем для G_2. Используя для u_k представление вида

$$u_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\zeta)\nu_k(\zeta)d\zeta,$$

будем иметь

$$\nu_0 = 2\exp\left(-\frac{vy}{2}\right)\left(K_0\left(\frac{\alpha v}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_t^\infty \frac{1}{\tau}\exp\Big(- \frac{\alpha^2}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\right),$$

$$\nu_1 = v\zeta\exp\left(-\frac{vy}{2}\right)\left(K_0\left(\frac{\alpha v}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_t^\infty \frac{1}{\tau}\exp\Big(- \frac{\alpha^2}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\right)$$

$$+\ y\zeta\exp\left(-\frac{vy}{2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}K_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_t^\infty \frac{1}{\tau^2}\exp\Big(- \frac{\alpha^2}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\right).$$

В итоге имеем решение в виде $u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Внешнее асимптотическое разложение для задачи* (1) *в неподвижной системе координат вне области влияния источника тепла имеет вид*

$$T(x, \widetilde{y}, t) = T_0(x, \widetilde{y}, t) + \varepsilon T_1(x, \widetilde{y}, t) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$T_0(x,\widetilde{y},t)=\frac{1}{\pi}\exp\Big(-\frac{v(\widetilde{y}-vt)}{2}\Big)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\zeta)\zeta d\zeta$$

$$\times\Big\{K_0\Big(\frac{v\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}}{2}\Big)-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{\infty}\frac{1}{\tau}\exp\Big(-\frac{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}{4\tau}-\frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\Big\},$$

$$T_1(x,\widetilde{y},t)=\frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{v(\widetilde{y}-vt)}{2}\Big)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\zeta)\zeta d\zeta$$

$$\times\Big\{\Big[K_0\Big(\frac{v\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}}{2}\Big)-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{\infty}\frac{1}{\tau}\exp\Big(-\frac{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}{4\tau}-\frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\Big]v$$

$$+\Big[(\widetilde{y}-vt)K_1\Big(\frac{v\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}}{2}\Big)\frac{1}{\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{\infty}\frac{1}{\tau^2}\exp\Big(-\frac{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}{4\tau}-\frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\Big]\Big\}. \qquad \Box$$

По этим формулам нетрудно определить значение функций T_0 и T_1, так как функции K_0 и K_1 — это известные табличные функции [2], а внутренние интегралы (по τ) легко вычисляются с помощью стандартных методов численного интегрирования, поскольку они не имеют никаких особенностей. Нетрудно показать, что эти интегралы являются быстроубывающими функциями вне области влияния источника тепла, подобно интегрально-показательной функции.

Используя конкретный вид функции $\psi(\zeta)$, можно определить нужное число членов ряда u_k и найти решение с любой точностью по ε. Например, если на полосе задан равномерно распределенный источник тепла (т. е. функция $\psi_1 \equiv 1$), то $u_0=\nu_0/2\pi$, а $u_1\equiv 0$.

Таким образом, получены довольно простые формулы для определения решения вне некоторой окрестности подвижного источника тепла. Использовать это разложение непосредственно вблизи источника тепла нельзя, так как при $\alpha\to 0$ ряд T_k не является асимптотическим, коэффициенты ряда имеют особенности (начинают быстро расти). При этом чем больше членов ряда используется во внешнем разложении, тем хуже он будет аппроксимировать решение задачи вблизи источника тепла в силу нарастания особенностей в коэффициентах ряда.

Нетрудно показать, что главный член внешнего разложения $T_0(x,\widetilde{y},t)$ вблизи источника тепла ведет себя подобно функции $-\ \ln(v\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2})$, т. е. температура стремится к бесконечности вблизи источника тепла, чего быть не должно.

3. Внутреннее асимптотическое разложение

Для правильного представления решения (3) вблизи источника тепла необходимо ввести новые внутренние “растянутые” переменные:

$$x=\varepsilon\eta,\quad \xi=\widetilde{y}+\varepsilon\zeta,\quad \omega=t-\varepsilon^2\tau.$$

Сделав замену переменных в (3) и используя обозначения, аналогичные введенным в предыдущем разделе, получим внутреннее решение в виде

$$w(\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{t/\varepsilon^2}\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{\eta^2+\zeta^2}{4\tau}\Big)\psi\Big(\frac{y-vt}{\varepsilon}+\zeta+\varepsilon\tau\Big)d\zeta d\tau.$$

Обозначив $s = r + \zeta + \varepsilon v \tau,\ r\varepsilon = y - vt$, будем иметь

$$w(\eta, \zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \frac{1}{\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{\eta^2 + (s - \varepsilon v \tau - r)^2}{4\tau}\Big) \psi(s) ds d\tau = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(s) Q ds.$$

Здесь

$$Q = \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\eta^2 + (s - \varepsilon v \tau - r)^2}{4\tau} \Big) d\tau = \Big(1 + \varepsilon \frac{v(s-r)}{2} + \varepsilon^2 \frac{v^2 (s-r)^2}{8} + O(\varepsilon^3) \Big) \left(Q_1 - Q_2 \right),$$

$$Q_1 = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\beta^2}{4\tau} - \frac{v^2 \varepsilon^2 \tau}{4} \Big) d\tau = 2 K_0 \Big(\frac{\beta v \varepsilon}{2} \Big), \quad Q_2 = \int\limits_{t/\varepsilon^2}^{\infty} \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\beta^2}{4\tau} - \frac{v^2 \varepsilon^2 \tau}{4} \Big) d\tau,$$

где $\beta^2 = \eta^2 + (s - r)^2$.

Обозначив $\varsigma = \tau \varepsilon^2$, имеем

$$Q_2 = \int\limits_t^{\infty} \frac{1}{\varsigma} \exp\Big(- \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4\varsigma} - \frac{v^2 \varsigma}{4} \Big) d\varsigma.$$

Разложив в ряд подынтегральное выражение, получим

$$Q_2 = \int\limits_t^{\infty} \frac{1}{\varsigma} \exp\Big(- \frac{v^2 \varsigma}{4} \Big) \Big(1 - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4\varsigma} + O\left(\beta^4 \varepsilon^4 \right) \Big) d\varsigma.$$

По этим формулам несложно найти решение в непосредственной близости от источника тепла. Например, если решение искать с точностью $O(\varepsilon^2)$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Внутреннее асимптотическое разложение для задачи (2)вблизи источника тепла имеет вид*

$$w(\eta, \zeta, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(s) \Big(1 + \frac{v\varepsilon(s-r)}{2} \Big)$$

$$\times \Big\{ K_0 \Big(\frac{v\varepsilon \sqrt{\eta^2 + (s-r)^2}}{2} \Big) - \frac{1}{2} \int\limits_t^{\infty} \frac{1}{\varsigma} \exp\Big(- \frac{v^2 \varsigma}{4} \Big) d\varsigma \Big\} ds + O(\varepsilon^2). \qquad \square$$

При этом, как и в предыдущем случае, функция K_0 — функция Макдональда, а вычисление внутреннего интеграла (по ς) путем замены переменных сводится к интегральной показательной функции Ei [2].

Как и для случая внешнего разложения, зададим равномерно распределенный источник тепла (функцию $\psi_1 \equiv 1$). Тогда не представляет особых трудностей вычислить этот интеграл непосредственно, разложив функцию K_0 в ряд.

Тогда главный член решения при нулевой степени (ε) для задачи (1) будет выглядеть следующим образом:

$$T_0(x, \widetilde{y}, t) = \frac{T^*(x, \widetilde{y}, t)}{2\pi}.$$

Здесь

$$T^*(x, \widetilde{y}, t) = -2 \ln \frac{v\varepsilon}{4a} - 2\gamma + 2 - 2\eta \Big(\operatorname{arctg} \Big(\frac{0.5 - r}{\eta} \Big) \Big) + \operatorname{arctg} \Big(\frac{0.5 + r}{\eta} \Big)$$

$$- (1-2r)\ln(\eta^2+(0.5-r)^2)-(1+2r)\ln(\eta^2+(0.5+r)^2) - \int\limits_{at}^{\infty} \frac{1}{\varsigma}\exp\Big(-\frac{v^2\varsigma}{4}\Big)d\varsigma,$$

где $r = \dfrac{-vt}{\varepsilon}$ и $\eta = x/\varepsilon$. Из этой формулы видно, что когда параметр $\varepsilon \to 0$, то решение вблизи источника тепла ведет себя подобно $-\ln v\varepsilon$.

4. Область применения формул

Одним из важных вопросов при проведении практических расчетов является оценка границ применения полученных формул внешнего и внутреннего разложения. Из формул для внешнего разложения видно, что по мере приближения к источнику тепла (в некоторой окрестности источника) ряд теряет асимптотический характер, коэффициенты ряда начинают быстро расти и чем больше членов ряда используется в разложении, тем хуже он приближает точное решение. Аналогично внутреннее разложение хорошо аппроксимирует точное решение, но только в некоторой окрестности источника тепла.

Из оценки остаточного члена ряда внешнего разложения можно получить теоретическую оценку для границ этих областей.

Так, для области применения внешнего разложения справедлива оценка $v\alpha > M_1\sqrt{\varepsilon}$, а для соответствующей области применения внутреннего разложения — оценка $v\alpha < M_2\sqrt{\varepsilon}$, причем эти области перекрываются $M_2 > M_1$, где M_1 и M_2 — константы, а $\alpha = \sqrt{x^2 + (y - vt)^2}$.

В области перекрытия внешнее и внутреннее разложения совпадают.

Теоретически получить значения величин M_1 и M_2 достаточно сложно. Были проведены численные эксперименты по определению этих величин, которые показали, что если рассматривать только главные члены соответствующих рядов (при нулевой степени ε), то внешнее разложение справедливо при условии $v\alpha > \varepsilon$, т.е. $M_1 = \sqrt{\varepsilon}$, а внутреннее разложение — при $v\alpha < 20\sqrt{\varepsilon}$, т.е. $M_2 = 20$. В этом случае внешнее разложение хорошо приближает точное решение вплоть до окрестности, сравнимой по размеру с размером источника тепла, но это справедливо только для главного члена. Если возникнет необходимость использовать несколько следующих членов ряда, тогда внешнее разложение будет справедливо при условии $v\alpha > M_1\sqrt{\varepsilon},\ M_1 > 1$, т.е. вне гораздо большей окрестности источника тепла.

Следует сделать следующие замечания по поводу использования формулы внешнего разложения для главного (нулевого) члена:

1. Численные эксперименты показали, что эта формула хорошо аппроксимирует точное решение всюду, за исключением малой (сопоставимой по размерам с размерами источника) окрестности источника тепла. При этом возникает впечатление, что под источником (т.е. когда $\alpha = 0$) температура неограниченна, так как $K_0(v\alpha/2) \to \infty$ при $\alpha = 0$.

На самом деле при фиксированном ε температура под источником всегда ограниченна (что хорошо видно из соответствующей формулы для внутреннего разложения).

2. В некоторых работах (например в [5;6]) отмечается, что для расчета температуры удобно использовать формулы предельного квазистационарного состояния, получаемого при $t = \infty$. При этом утверждается, что полученное таким образом решение мало (на $3 - 5\%$) отличается от точного.

Расчеты показали, что использовать формулы предельного состояния можно только при временах $T >> 1$, иначе ошибка составит 10–15%.

В ы в о д ы. Для решения получены простые формулы, позволяющие проводить расчеты тепловых полей для массивных тел с подвижным полосовым источником тепла большой мощности как вдали от источника тепла, так и в непосредственной близости от него. Показаны области применения этих формул.

Вычисление двойного несобственного интеграла заменяется на вычисление нескольких однократных интегралов (которые легко считаются стандартными методами численного интегрирования, либо сами являются стандартными функциями).

При практическом применении достаточно иметь первые два члена асимптотических рядов внешнего и внутреннего разложения, но если необходимо получить решение с более высокой точностью, то получить следующие члены этих рядов не представляет особых трудностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М: Наука, 1989. 336 с.
2. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. 2-е изд. М.: Физматлит, 1963. 359 с.
3. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 455 с.
4. **Полянин А.Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
5. **Рыкалин Н.Н.** Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951. 327 с.
6. **Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М.** Высокотемпературные технологические процессы. Теплофизические основы. М.: Наука, 1985. 172 с.
7. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.

Першин Игорь Викторович
главный программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: piv@imm.uran.ru