ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.977

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПСЕВДОМНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННОГО КОНЕЧНЫМИ МОНОИДАМИ СО СВОЙСТВОМ $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ [1]

Т. В. Первухина

В работе рассматривается псевдомногообразие, порожденное всеми конечными моноидами, на которых совпадают отношения Грина $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$. Доказывается, что каждый конечный моноид S, принадлежащий этому псевдомногообразию, делит моноид всех верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц над конечной группой с присоединенным нулем. Доказательство конструктивно — группа и размер матриц эффективно вычисляются по моноиду S.

Ключевые слова: конечные моноиды, псевдомногообразие моноидов, (верхне)треугольные матрицы, отношения Грина, $\mathscr{R}$-тривиальные моноиды.

T. V. Pervukhina. Characterization of the pseudovariety generated by finite monoids satisfying $\mathscr{R} = \mathscr{H}$.

We consider the pseudovariety generated by all finite monoids on which Green's relations $\mathscr{R}$ and $\mathscr{H}$ coincide. It is shown that any finite monoid S belonging to this pseudovariety divides the monoid of all upper-triangular row-monomial matrices over a finite group with zero adjoined. The proof is constructive; given a monoid S, the corresponding group and the order of matrices can be effectively found.

Keywords: finite monoids, monoid pseudovariety, upper-triangular matrices, Green's relations, $\mathscr{R}$-trivial monoids.

Введение

Псевдомногообразием моноидов называется класс моноидов, замкнутый относительно взятия подмоноидов, гомоморфных образов и формирования конечных декартовых произведений. Изучение псевдомногообразий конечных моноидов является активно развивающимся направлением в теории полугрупп (см., например, монографии [1; 3]). Псевдомногообразия моноидов также представляют большой интерес ввиду их приложения к изучению формальных языков, а именно, как показано С. Эйленбергом, существует взаимно однозначное соответствие между псевдомногообразиями моноидов и определенными классами формальных языков, называемыми многообразиями языков [2]. Это соответствие позволяет классифицировать распознаваемые языки исходя из свойств их синтаксических моноидов. Особую роль здесь играют псевдомногообразия моноидов, удовлетворяющих некоторым ограничениям на отношения Грина: псевдомногообразия всех $\mathscr{H}$-тривиальных моноидов, всех $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов и всех $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов. В частности, $\mathscr{H}$-тривиальные моноиды являются аналогом беззвездных языков [2; 4], а $\mathscr{J}$-тривиальные моноиды соответствуют кусочно-тестируемым языкам [2; 5].

Напомним, что моноид S *делит* моноид T, если S является гомоморфным образом некоторого подмоноида в T. Одним из способов описания псевдомногообразий моноидов является характеризация на языке делителей. При этом указывается набор конкретных моноидов (например, серия, зависящая от одного или нескольких параметров) таких, что каждый моноид из данного псевдомногообразия делит некоторый моноид из этого набора. Характеризация псевдомногообразия $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов была получена Г. Страубингом [6].

[1]Работа написана в рамках выполнения базовой части госзадания на выполнение НИР (проект № 2248 Министерства образования и науки РФ) при поддержке программы президента РФ по поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5161.2014.1) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Согласно одному из эквивалентных условий теоремы Страубинга конечный моноид является $\mathscr{J}$-тривиальным тогда и только тогда, когда он делит моноид $\mathscr{U}_n$ всех верхнетреугольных булевых матриц порядка n с единицами на главной диагонали для некоторого n. Для характеризации псевдомногообразия $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов Ж.-Э. Пэном [2] была использована серия моноидов $\mathscr{E}_n$ всех направленных преобразований на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Всякое такое преобразование представимо верхнетреугольной булевой матрицей порядка n, каждая строка которой содержит в точности один ненулевой элемент. Напомним, что такие матрицы называются *мономиальными по строкам.* Согласно теореме Пэна конечный моноид является $\mathscr{R}$-тривиальным тогда и только тогда, когда он изоморфно вкладывается в моноид $\mathscr{E}_n$ для некоторого n.

Моноиды, удовлетворяющие равенству $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, обобщают случаи $\mathscr{J}$-тривиальных и $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов. В [8] автором была получена характеризация на языке делителей для класса конечных моноидов, на которых совпадают отношения Грина $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$. Однако, как показано в [8], этот класс уже не является псевдомногообразием. Целью данной работы является расширение полученной в [8] характеризации с класса моноидов, удовлетворяющих равенству $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, на псевдомногообразие $\mathbf{RH}$, порожденное этим классом. Приведем определения, необходимые для формулировки основного результата.

Конечную группу G с присоединенным нулем 0 обозначим через $G \cup 0$. Для всех элементов $g \in G \cup 0$ положим дополнительно $g + 0 = g$. Обозначим через $TM_n(G)$ моноид всех верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц порядка n над $G \cup 0$. Умножение двух мономиальных матриц из $TM_n(G)$ с учетом дополнительного условия осуществляется по правилам обычного матричного умножения.

Теорема. *Конечный моноид принадлежит псевдомногообразию* $\mathbf{RH}$ *тогда и только тогда, когда он делит моноид $TM_n(G)$ для некоторой группы G и некоторого натурального n.*

Доказательство теоремы конструктивно — конечная группа и порядок матриц эффективно вычисляются по данному конечному моноиду.

1. Предварительные сведения

Основные понятия теории полугрупп можно найти в монографиях [2; 7]. Отношения Грина $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{H}$ на моноиде S определяются формулами

$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow aS = bS,\ a \mathscr{L} b \Leftrightarrow Sa = Sb,\ a \mathscr{J} b \Leftrightarrow SaS = SbS,$$
$$\mathscr{D} = \mathscr{R} \vee \mathscr{L},\ \mathscr{H} = \mathscr{R} \cap \mathscr{L}.$$

Пусть H — произвольный $\mathscr{H}$-класс моноида S. Моноид $St_r(H) = \{x \in S \mid Hx \subseteq H\}$ называется *правым стабилизатором класса* H. На $St_r(H)$ определим отношение $\sim$, положив $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $hx = hy$ для любого $h \in H$. Это отношение является конгруэнцией на $St_r(H)$. Обозначим фактор-моноид моноида $St_r(H)$ по конгруэнции $\sim$ через $\Gamma_r(H)$ и назовем $\Gamma_r(H)$ *моноидом переходов класса* H. Моноид переходов $\Gamma_r(H)$ является просто транзитивной группой подстановок на H. Если $\mathscr{H}$-классы H_1 и H_2 содержатся в одном $\mathscr{D}$-классе, то группы $\Gamma_r(H_1)$ и $\Gamma_r(H_2)$ изоморфны. Абстрактная группа $\Gamma_r(H)$ называется *группой Шютценберже* $\mathscr{D}$*-класса* D, содержащего H. Также для произвольного $\mathscr{H}$-класса H обозначим через $Pw_r(H)$ множество элементов $St_r(H)$, поточечно стабилизирующих H.

Понятие правого стабилизатора переносится на случай произвольного подмножества $P \subseteq S$, а именно, $St_r(P) = \{x \in S \mid Px \subseteq P\}$. При этом фактор-моноид $St_r(P)/\sim$ называется *локальным моноидом* множества P. Локальный моноид, являющийся группой, назовем *локальной группой* множества P.

Обозначим через $\mathscr{R}^\sharp$ конгруэнцию, порожденную отношением $\mathscr{R}$.

Напомним, что рефлексивное и симметричное бинарное отношение называется *толерантностью.* Толерантность ρ на моноиде S называется *согласованной с умножением*, если для любых $a,b,x,y\in S$ из соотношений $a\,\rho\,x$ и $b\,\rho\,y$ следует $ab\,\rho\,xy$. Будем называть *ρ-классом* максимальное по включению подмножество элементов из S, находящихся попарно в отношении ρ. В общем случае элемент $x\in S$ может принадлежать нескольким ρ-классам. Толерантность ρ назовем *стабильной*, если для каждого ρ-класса K и каждого $x\in S$ из условия $Kx\cap K\neq\varnothing$ следует $Kx\subseteq K$.

Пусть классы толерантности ρ на S являются объединениями $\mathscr{R}$-классов моноида S. В этом случае толерантность ρ назовем $\mathscr{R}$-минимальной, если для произвольного фиксированного ρ-класса K любой $\mathscr{R}$-класс, лежащий в K, минимален во множестве всех $\mathscr{R}$-классов, лежащих в K относительно стандартного частичного порядка $\leq$ на множестве $\mathscr{R}$-классов моноида S: $R_a\leq R_b$ тогда и только тогда, когда $aS\subseteq bS$, где $a,b\in S$. Порядок $\leq$ порождает следующее бинарное отношение $\leq_{\mathscr{R}}$ на S: $a\leq_{\mathscr{R}} b$ тогда и только тогда, когда $aS\subseteq bS$, где $a,b\in S$.

2. Свойства конгруэнции $\mathscr{R}^\sharp$

В [?] была получена характеризация моноидов, принадлежащих **RH**, в терминах свойств толерантности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$, определенной в той же работе. Воспроизведем ее построение.

Построение $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$. Перенумеруем $\mathscr{R}$-классы моноида S в виде $K^0_1,\ldots,K^0_{n_0}$. Для каждого произведения вида $K^0_iK^0_j$ рассмотрим минимальное по включению объединение $\mathscr{R}$-классов, содержащее $K^0_iK^0_j$. Назовем эти объединения *$\mathscr{R}$-покрытиями*. Перенумеруем полученные $\mathscr{R}$-покрытия в виде $K^1_1,\ldots,K^1_{n_1}$ и для всех произведений вида $K^l_iK^m_j$ рассмотрим их $\mathscr{R}$-покрытия $K^2_1,\ldots,K^2_{n_2}$. Будем продолжать процедуру до тех пор, пока каждое новое $\mathscr{R}$-покрытие не будет содержаться в одном из уже построенных, что произойдет в силу конечности моноида. Максимальные по включению множества K^l_i являются классами толерантности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$. Отметим, что конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$ является транзитивным замыканием толерантности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$. □

Обозначим через T набор множеств K^j_i, построенных выше. Определим на T следующее бинарное отношение $\preceq$: для $A,B\in T$ соотношение $A\preceq B$ выполнено тогда и только тогда, когда найдется такой $X\in T$, что $AX\subseteq B$. Если $A\preceq B$, но $A\neq B$, будем писать $A\prec B$.

Предложение 1. *Отношение $\preceq$ является частичным порядком на множестве T.*

Доказательство. Пусть $A\in T$. Рассмотрим $\mathscr{R}$-класс R_e, содержащий единицу e моноида S. Для $a\in A$ и $x\in R_e$ рассмотрим произведение ax. Поскольку $x\,\mathscr{R}\,e$, то для некоторого $y\in R_e$ выполнено $xy=e$, то есть $axy=a$, откуда $a\,\mathscr{R}\,ax$. Поскольку A по построению содержит $\mathscr{R}$-класс элемента a, получаем $ax\in A$, то есть $AR_e\subseteq A$, откуда $A\preceq A$, то есть отношение $\preceq$ рефлексивно.

Пусть $A,B,C\in T$, причем $A\preceq B$ и $B\preceq C$. Тогда $AX\subseteq B$ и $BY\subseteq C$ для некоторых $X,Y\in T$, откуда $AXY\subseteq C$. Пусть $a\in A$, $x\in X$ и $y\in Y$, тогда $axy\in C$. Возьмем произвольный $h\in S$ со свойством $h\,\mathscr{R}\,xy$, тогда $ah\,\mathscr{R}\,axy$. Поскольку C по построению содержит $\mathscr{R}$-класс элемента axy, получаем $ah\in C$. Таким образом, если Z — $\mathscr{R}$-покрытие произведения XY, то $AZ\subseteq C$. Следовательно, $A\preceq C$, то есть отношение $\preceq$ транзитивно.

Пусть $A,B\in T$, причем $A\preceq B$ и $B\preceq A$. Тогда $AX\subseteq B$ и $BY\subseteq A$ для некоторых $X,Y\in T$, откуда $AXY\subseteq A$. Выбрав произвольно представителей $a,b,x,y\in S$ множеств A,B,X,Y, имеем $ax\,\mathscr{R}^\sharp_{cr}\,b$ и $axy\,\mathscr{R}^\sharp_{cr}\,a$. Так как $axy\leq_{\mathscr{R}} a$, то соотношение $axy\,\mathscr{R}^\sharp_{cr}\,a$ в силу $\mathscr{R}$-минимальности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ влечет $axy\,\mathscr{R}\,a$, то есть $axyz=a$ для некоторого $z\in S$, откуда $a\,\mathscr{R}\,ax$. Поскольку $ax,b\in B$ и B по построению содержит $\mathscr{R}$-класс элемента ax, то $a\in B$, откуда $A\subseteq B$. Из включения $BY\subseteq A$ аналогично получаем $B\subseteq A$, то есть $A=B$ в T. Отсюда заключаем, что отношение $\preceq$ антисимметрично и является таким образом частичным порядком на T. Предложение доказано. □

Предложение 2. *Конечный моноид S принадлежит псевдомногообразию* **RH** *тогда и только тогда, когда конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$ является $\mathscr{R}$-минимальной на S и для произвольного $\mathscr{R}^\sharp$-класса Q множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $\mathscr{H}$-классов $H\subseteq Q$.*

Доказательство. Пусть конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$ является $\mathscr{R}$-минимальной на S и для произвольного $\mathscr{R}^\sharp$-класса Q множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $\mathscr{H}$-классов $H \subseteq Q$. Обозначим через φ канонический гомоморфизм из S на $S/\mathscr{R}^\sharp$. Обозначим правое отношение Грина на моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$ через $\bar{\mathscr{R}}$, а $\mathscr{R}^\sharp$-класс элемента $a \in S$ — через $\bar{a}$. Пусть $\bar{a}\bar{\mathscr{R}}\bar{b}$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда найдутся такие элементы $x, y \in S$, что $\bar{a} = \bar{b}\bar{x}$ и $\bar{b} = \bar{a}\bar{y}$. Поднимаясь в моноид S, имеем $a\mathscr{R}^\sharp bx$ и $b\mathscr{R}^\sharp ay$. Отсюда, учитывая, что $\mathscr{R}^\sharp$ — конгруэнция, заключаем, что $a\mathscr{R}^\sharp ayx$. Поскольку выполнено $ayx \leq_{\mathscr{R}} a$, то в силу $\mathscr{R}$-минимальности конгруэнции $\mathscr{R}^\sharp$ получаем, что $a\mathscr{R}ayx$. Но тогда $a\mathscr{R}ay\mathscr{R}^\sharp b$, откуда $a\mathscr{R}^\sharp b$, то есть $\bar{a} = \bar{b}$. Таким образом, правое отношение Грина тривиально на моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$.

Зафиксируем произвольный $\mathscr{R}^\sharp$-класс Q и рассмотрим правый стабилизатор $St_r(Q)$. Возьмем произвольный элемент $x \in St_r(Q)$. Так как $St_r(Q)$ является подмоноидом в S, достаточно показать обратимость действия x на Q. Возьмем произвольный $a \in Q$. В силу $\mathscr{R}$-минимальности $\mathscr{R}^\sharp$ имеем $a\,\mathscr{R}\,ax$, а тогда найдется такой $y \in S$, что $axy = a$. Так как $Qy \cap Q \neq \varnothing$, то y также принадлежит $St_r(Q)$, и тогда $xy \in St_r(Q)$. Обозначим $\mathscr{H}$-класс элемента a через H_a. Элемент xy стабилизирует H_a поточечно, поскольку если $b\,\mathscr{H}\,a$, то $b = la$ для некоторого $l \in S$, откуда $bxy = laxy = la = b$. Действие элемента xy на H_a, таким образом, соответствует единице группы Шютценберже $\Gamma_r(H_a)$. Это означает, что действия элементов x и y взаимно обратны в группе $\Gamma_r(H_a)$, то есть элемент yx также поточечно стабилизирует H_a. Поскольку поточечные стабилизаторы $Pw_r(H)$ всех $\mathscr{H}$-классов, лежащих в Q, совпадают по условию, то элементы xy и yx должны поточечно стабилизировать все $\mathscr{H}$-классы, лежащие в Q. Это означает, что действия элементов x и y на Q взаимно обратны. Следовательно, локальный моноид $\mathscr{R}^\sharp$-класса Q является группой. Так как $\mathscr{R}^\sharp$-класс Q был выбран произвольно, то локальные моноиды всех $\mathscr{R}^\sharp$-классов являются группами.

Таким образом, гомоморфизм $\varphi\colon S \to S/\mathscr{R}^\sharp$ таков, что правое отношение Грина тривиально на $S/\mathscr{R}^\sharp$ и локальные моноиды всех $\mathscr{R}^\sharp$-классов являются группами. По теореме 1 из [**?**] теперь получаем, что S принадлежит псевдомногообразию **RH**.

Обратно, предположим, что моноид S принадлежит псевдомногообразию **RH**. Тогда согласно теореме 2 из [**?**] толерантность $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ является стабильной и $\mathscr{R}$-минимальной на S, и для произвольного $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класса K множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $\mathscr{H}$-классов $H \subseteq K$. Множества $Pw_r(H)$ будут тогда совпадать для любых двух пересекающихся $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов и, следовательно, будут совпадать на каждом $\mathscr{R}^\sharp$-классе по транзитивному замыканию. Покажем теперь $\mathscr{R}$-минимальность конгруэнции $\mathscr{R}^\sharp$. Зафиксируем произвольный $\mathscr{R}^\sharp$-класс Q и произвольный $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс $K_0 \subseteq Q$. Если $K_0 = Q$, то Q содержит только несравнимые $\mathscr{R}$-классы. Пусть K_0 не совпадает с Q. Будем рассуждать по индукции по длине цепочки $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов K_0, $K_1, \ldots, K_n \subseteq Q$ таких, что $K_0 \cap K_1 \neq \varnothing$, $K_i \cap K_{i+1} \neq \varnothing$ и $K_i \cap K_j = \varnothing$, если $j \neq i+1$.

База индукции. Пусть K_1 — произвольный $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс, пересекающийся с K_0. Предположим, что K_0 и K_1 содержат сравнимые, но несовпадающие $\mathscr{R}$-классы. Без ограничения общности будем считать, что для некоторого $x \in S$ и некоторого $\mathscr{R}$-класса $R \subseteq K_0$ выполнено $RR_x \cap K_n \neq \varnothing$, где через R_x обозначен $\mathscr{R}$-класс элемента x. При этом $RR_x \cap K_0 = \varnothing$, поскольку K_0 содержит лишь несравнимые $\mathscr{R}$-классы. Относительно множества K_0R_x имеем две возможности: $K_0R_x \subseteq K_1$ или $K_0R_x \nsubseteq K_1$. Предположим, что $K_0R_x \subseteq K_1$. Возьмем произвольный $\mathscr{R}$-класс $R_1 \subseteq K_0 \cap K_1$, тогда $R_1R_x \subseteq K_1$, то есть $K_1R_x \cap K_1 \neq \varnothing$, откуда $R_x \subseteq St_r(K_1)$, то есть $R_1R_x \subseteq R_1$. Но тогда $R_x \subseteq St_r(K_0)$, поскольку $R_1 \subseteq K_0$, откуда $RR_x \subseteq K_0$, противоречие с предположением.

Предположим теперь, что $K_0R_x \nsubseteq K_1$, тогда для любого $\mathscr{R}$-класса $R_1 \subseteq K_0 \cap K_1$ имеем $R_1R_x \nsubseteq K_1$, иначе вновь получим $K_1R_x \cap K_1 \neq \varnothing$, и будут справедливы приведенные выше рассуждения. Пусть K_2 — произвольный $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс, содержащий произведение K_0R_x, тогда $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$ и $K_1R_x \cap K_2 \neq \varnothing$, поскольку для любого $\mathscr{R}$-класса $R_1 \subseteq K_0 \cap K_1$ имеем $R_1R_x \subseteq K_2$. Вновь имеем две возможности: $K_1R_x \subseteq K_2$ или $K_1R_x \nsubseteq K_2$. Предположив $K_1R_x \subseteq K_2$, получим аналогично приведенным выше рассуждениям, что $R_x \subseteq St_r(K_1)$, противоречие с тем фактом, что $R_1R_x \nsubseteq K_1$. Значит, выполнено $K_1R_x \nsubseteq K_2$. Выберем такой $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс K_3, что $K_1R_x \subseteq K_3$, тогда K_3 пересекается с K_2. Поскольку $K_0R_x \nsubseteq K_0$ и $K_1R_x \nsubseteq K_1$, получаем, что $K_0 \prec K_2$ и $K_1 \prec K_3$ относительно частичного порядка $\preceq$ на множестве T, определенного в предложении 1. Предположив, что $K_2R_x \nsubseteq K_3$, на следующем шаге мы выберем $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс K_4, содержащий K_2R_x, и получим $K_0 \prec K_2 \prec K_4$ в T. Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим на некотором i-м шаге, что альтернатива $K_iR_x \nsubseteq K_{i+1}$ невозможна, поскольку цепи относительно частичного порядка $\preceq$ конечны. Таким образом, на некотором шаге мы получим противоречие с предположением, что пересекающиеся $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классы K_0 и K_1 содержат сравнимые $\mathscr{R}$-классы.

Шаг индукции. Предположим, что любая цепочка $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов $K_0, K_1, \ldots, K_l$, лежащих в Q, где $l \leq n-1$, может содержать лишь несравнимые $\mathscr{R}$-классы. Рассмотрим цепочку $K_0, K_1, \ldots, K_n$. Предположим, что для некоторого $x \in S$ выполнено $K_0R_x \cap K_n \neq \varnothing$. Если $K_0R_x \subseteq K_n$, то и для любого $\mathscr{R}$-класса $R \subseteq K_0 \cap K_1$ выполнено $RR_x \subseteq K_n$, то есть цепочка $K_1, \ldots, K_n$ содержит сравнимые $\mathscr{R}$-классы, что невозможно по предположению. Пусть K_{n+1} — произвольный $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс, содержащий K_0R_x, причем $K_n \cap K_{n+1} \neq \varnothing$. Имеем две возможности: $K_1R_x \subseteq K_{n+1}$ или $K_1R_x \nsubseteq K_{n+1}$. Предположив $K_1R_x \subseteq K_{n+1}$, получим для цепочки $K_1, \ldots, K_{n+1}$ противоречие аналогично приведенным выше рассуждениям. Значит, выполнено $K_1R_x \nsubseteq K_{n+1}$, тогда $K_1R_x \subseteq K_{n+2}$, где $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс K_{n+2} пересекается с K_{n+1}. Кроме того, получаем, что $K_0 \prec K_{n+1}$ относительно частичного порядка $\preceq$ на множестве T. Аналогичную схему рассуждений теперь можно применить к цепочке $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов $K_2, \ldots, K_{n+2}$. На каждом шаге мы либо получим противоречие с предположением, либо дойдем до момента, когда будет построен $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс K_{2n+2} такой, что $K_0 \prec K_{n+1} \prec K_{2n+2}$ в T. Будем продолжать процесс. Поскольку, как было указано выше, цепи относительно порядка $\preceq$ конечны, на некотором шаге альтернатива $K_jR_x \nsubseteq K_{j+n}$ станет невозможной, а включение $K_jR_x \subseteq K_{j+n}$ означает наличие сравнимых $\mathscr{R}$-классов в цепочке $K_{j+1}, \ldots, K_{j+n}$, что противоречит предположению. Таким образом, $\mathscr{R}^\sharp$-класс Q содержит только несравнимые $\mathscr{R}$-классы. Предложение доказано. □

Из предложения 2 следует, что для любого моноида $S \in \mathbf{RH}$ правое отношение Грина $\bar{\mathscr{R}}$ тривиально на фактор-моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$. Отсюда следует, что отношение $\leq_{\bar{\mathscr{R}}}$ будет отношением частичного порядка на $S/\mathscr{R}^\sharp$. В соответствии с предложением 0.1 из [2] существует такой линейный порядок $\leq_\sharp$ на $S/\mathscr{R}^\sharp$, что для $U, V \in S/\mathscr{R}^\sharp$ соотношение $U \leq_{\bar{\mathscr{R}}} V$ влечет $V \leq_\sharp U$. Пронумеруем $\mathscr{R}^\sharp$-классы моноида S по возрастанию в соответствии с порядком $\leq_\sharp$ и зафиксируем эту нумерацию. Очевидно, единица моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ будет наименьшим элементом относительно введенного линейного порядка. Договоримся начинать нумерацию с 1, тогда единица моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ будет иметь номер 1. Поскольку для любых элементов $X, U \in S/\mathscr{R}^\sharp$ выполнено $UX \leq_{\bar{\mathscr{R}}} U$, то $U \leq_\sharp UX$, т. е. с каждым элементом моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ связано направленное действие на $S/\mathscr{R}^\sharp$ относительно порядка $\leq_\sharp$. Следовательно, мы можем, аналогично рассуждениям в [8], рассматривать правые действия элементов моноида S на моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$ и характеризовать их в терминах плотных разложений и локальных групп. Приведем необходимые определения из [8].

Определение 1. Назовем $\mathscr{R}^\sharp$-классы K_i и K_j *соседними относительно действия $\mathscr{R}^\sharp$-класса* K, если $K_i \leq_\sharp K_j$, $K_iK \subseteq K_j$ и для любых $\mathscr{R}^\sharp$-классов P и Q таких, что $PQ \subseteq K$, выполнено в точности одно из двух условий

1) $K_iP \subseteq K_i$ и $K_iQ \subseteq K_j$;

2) $K_iP \subseteq K_j$ и $K_jQ \subseteq K_j$.

Определение 2. Пусть элемент b переводит K_i в K_j, т. е. $K_ib \subseteq K_j$. Пусть $b = b_1 \ldots b_p$, где $b_1 \ldots b_p \in S$ — такое разложение элемента b, а $K_{i_1}, \ldots, K_{i_{p+1}}$, где $K_{i_1} = K_i, K_{i_{p+1}} = K_j$, — такие $\mathscr{R}^\sharp$-классы, что

1) $K_{i_l} \neq K_{i_{l+1}}$ и $K_{i_1}b_1 \subseteq K_{i_2}, \ldots, K_{i_p}b_p \subseteq K_{i_{p+1}}$; K_{i_l} и $K_{i_{l+1}}$ — соседние относительно b_l;

2) для любого другого разложения $b = c_1 \ldots c_s$ элемента b (где $c_1 \ldots c_s \in S$) выполнено следующее условие: если $\{K_{i_1} \ldots K_{i_p}\} \subseteq \{K_{j_1} \ldots K_{j_s}\}$, то $\{K_{i_1} \ldots K_{i_p}\} = \{K_{j_1} \ldots K_{j_s}\}$.

Подобное разложение $b = b_1 \ldots b_p$ назовем *плотным.* Оно, очевидно, существует, поскольку частично упорядоченое множество $\mathscr{R}^\sharp$-классов конечно в силу конечности S.

Зафиксируем $\mathscr{R}^\sharp$-класс K и элемент $a \in K$ и рассмотрим $\mathscr{R}^\sharp$-классы K_i и K_j, соседние относительно действия класса K.

Лемма. *Для любого элемента $b \in K$ найдутся такие элементы $x \in St_r(K_i)$ и $y \in St_r(K_j)$, что действие элемента b на $\mathscr{R}^\sharp$-классе K_i поточечно совпадает с действием элемента xay на $\mathscr{R}^\sharp$-классе K_i.*

Доказательство. Поскольку элементы a и b лежат в одном $\mathscr{R}^\sharp$-классе, то найдется такая последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in S$, что $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_k = p_k z_k$ и $a_{k+1} = q_k z_k$, где $p_k, q_k, z_k \in S$ и $p_k \mathscr{R} q_k$.

Рассмотрим элементы $a_0 = p_0 z_0$ и $a_1 = q_0 z_0$. Имеем $K_i a_0, K_i a_1 \subseteq K_j$. Поскольку $p_0 \mathscr{R} q_0$, конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$ включает $\mathscr{R}$, а K_i и K_j — соседние $\mathscr{R}^\sharp$-классы относительно действия $\mathscr{R}^\sharp$-класса K, имеем две возможности:

1) $K_i p_0, K_i q_0 \subseteq K_i$, откуда $p_0, q_0 \in St_r(K_i)$. Зафиксируем произвольный элемент $h \in K_i$. Найдется такой элемент $x_0 \in St_r(K_i)$, что в локальной группе класса K_i действие элемента q_0 совпадает с действием элемента $x_0 p_0$, откуда получаем $ha_1 = hq_0 z_0 = hx_0 p_0 z_0 = hx_0 a_0$. Положим также $y_0 = e$, где e — единица моноида S. Поскольку h был выбран произвольно, заключаем, что действие элемента a_1 на классе K_i поточечно совпадает с действием элемента $x_0 a_0 y_0$ на K_i.

2) $K_i p_0, K_i q_0 \subseteq K_j$. Отсюда следует, что $z_0 \in St_r(K_j)$. Зафиксируем произвольный элемент $h \in K_i$. Так как $p_0 \mathscr{R} q_0$, то для некоторого $z \in S$ выполнено равенство $q_0 z = p_0$, откуда $zz_0 \in St_r(K_j)$. Тогда найдется такой элемент $y_0 \in St_r(K_j)$, что в локальной группе класса K_j действие z_0 совпадает с действием элемента $zz_0 y_0$, откуда получаем $ha_1 = hq_0 z_0 = hq_0 zz_0 y_0 = hp_0 z_0 y_0 = ha_0 y_0$. Положим также $x_0 = e$, где e — единица моноида S. Поскольку h был выбран произвольно, заключаем, что действие элемента a_1 на классе K_i поточечно совпадает с действием $x_0 a_0 y_0$ на K_i.

С помощью аналогичных рассуждений мы получим, что для элементов a_k и a_{k+1} найдутся элементы $x_k \in St_r(K_i)$ и $y_k \in St_r(K_j)$ такие, что действие a_{k+1} на классе K_i поточечно совпадает с действием $x_k a_k y_k$. Рассуждая по индукции, мы построим такие элементы $y = y_0 y_1 \ldots y_{n-1}$ и $x = x_{n-1} \ldots x_1 x_0$, что действие элемента $b = a_n$ на классе K_i поточечно совпадает с действием элемента $xay = xa_0 y$:

$$ha_n = hx_{n-1}a_{n-1}y_{n-1} = hx_{n-1}x_{n-2}a_{n-2}y_{n-2}y_{n-1} = \ldots = hxa_0 y$$

для любого $h \in K_i$. Переход вида $(hx_{n-1})a_{n-1}y_{n-1} = (hx_{n-1})x_{n-2}a_{n-2}y_{n-2}y_{n-1}$ корректен, поскольку $hx_{n-1} \in K_i$. Лемма доказана. ☐

Из леммы следует, что при фиксированном отображении между K_i и K_j, которое осуществляется элементом $a \in K$, элементу $b \in K$ при действии на K_i сопоставляется элемент группы $G_i \times G_j$, где G_i и G_j — локальные группы $\mathscr{R}^\sharp$-классов K_i и K_j, соответственно. Докажем теперь главный результат этой работы.

3. Доказательство основного результата

Любой конечный моноид, делящий $TM_n(G)$, принадлежит псевдомногообразию **RH**, поскольку моноиды $TM_n(G)$ принадлежат **RH** по предложению 1 из [8].

Пусть конечный моноид S принадлежит **RH**. Возьмем канонический гомоморфизм $\varphi\colon S \to S/\mathscr{R}^\sharp$. Рассмотрим прямое произведение групп $G_1 \times \ldots \times G_n$, где G_i — локальная группа $\mathscr{R}^\sharp$-класса K_i, $1 \le i \le n$, и $n = card(S/\mathscr{R}^\sharp)$. Нумерация $\mathscr{R}^\sharp$-классов $K_1 \ldots K_n$ дана в соответствии с ранее введенным порядком $\le_\sharp$.

В лемме мы описали действие произвольного элемента b из $\mathscr{R}^\sharp$-класса K в том случае, когда b действует из K_i в K_j и при этом классы K_i и K_j являются соседними относительно действия класса K. В этом случае при заранее фиксированном элементе $a \in K$ найдутся такие элементы $x \in St_r(K_i)$ и $y \in St_r(K_j)$, что для всякого элемента $h \in K_i$ выполнено $hb = hxay$.

Теперь охарактеризуем действие элемента $b \in K$ в общем случае, если $\mathscr{R}^\sharp$-классы K_i и K_j необязательно являются соседними относительно действия класса K. Пусть $b = b_1 \dots b_p$ — произвольное плотное разложение элемента b. Тогда по лемме каждому из элементов b_l, $1 \le l \le p$, ставится в соответствие пара $(g_{i_l}, g^*_{i_{l+1}}) \in G_{i_l} \times G_{i_{l+1}}$, определяющая действие элемента b_l на $\mathscr{R}^\sharp$-класс K_{i_l}. Поставим в соответствие элементу $b \in K$ элемент $(f_1, \dots, f_n)$ из группы $G_1 \times \dots \times G_n$ следующим образом:

1) $f_i = e_i$ (единица группы G_i), если $K_i \notin \{K_{i_1} \dots K_{i_p}\}$;

2) $f_{i_1} = g_{i_1}$, $f_{i_{p+1}} = g^*_{i_{p+1}}$;

3) $f_{i_l} = g^*_{i_{l-1}} g_{i_l}$ для $l = 2, \dots, p$.

В итоге получаем, что при действии элемента b из K_i в K_j ему сопоставляется набор $f_{ij}(b)$ элементов группы $G_1 \times \dots \times G_n$, построенных по всевозможным плотным разложениям элемента b. Элементы этого набора, построенные по описанной выше схеме, зависят от выбора $(g_{i_l}, g^*_{i_{l+1}}) \in (G_{i_l}, G_{i_{l+1}})$ для каждого элемента b_l из конкретного разложения и от выбора разложения. Если для пары (i, j) класс K не переводит K_i в K_j, то полагаем $f_{ij}(b) = \varnothing$.

Теперь сопоставим элементу $b \in K$ набор $f(b)$ верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц порядка n над $(G_1 \times \dots \times G_n) \cup 0$. Расстановка ненулевых элементов каждой матрицы определяется согласно тому, какая матрица соответствует $\mathscr{R}^\sharp$-классу K как элементу $\mathscr{R}$-тривиального моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ при вложении его в моноид направленных преобразований. Эта расстановка будет одинакова для всех элементов $b \in K$. Рассмотрев действие элемента b на каждый класс K_i, $1 \le i \le n$, и зафиксировав одно плотное разложение при каждом действии, мы таким образом полностью определим матрицу $B \in f(b)$. Полагаем

$$B_{ij} = \begin{cases} (f_1, \dots, f_n) \in f_{ij}(b), & \text{если } f_{ij}(b) \text{ непусто}, \\ 0, & \text{если } f_{ij}(b) \text{ пусто}, \end{cases}$$

т. е. все матрицы в $f(b)$ получаются, когда ненулевые элементы B_{ij} каждой матрицы $B \in f(b)$ независимо друг от друга пробегают элементы соответствующих наборов $f_{ij}(b)$.

Рассмотрим теперь множество $f(S) = \{f(z) \mid z \in S\}$. Определим отображение $\psi\colon f(S) \to S$ следующим образом: $\psi(Z) = z$ для каждой матрицы $Z \in f(z)$. Покажем корректность определения. Пусть $a, b \in S$ — произвольные элементы полугруппы и $a \neq b$. Тогда докажем, что $f(a) \cap f(b) = \varnothing$. Рассмотрим действие элементов a и b на $\mathscr{R}^\sharp$-класс K_1, содержащий единицу e моноида S. Предположим от противного, что найдется матрица $X \in f(a) \cap f(b)$. Тогда имеем два случая:

1) Пусть $a \in K_i$, $b \in K_j$ и $K_i \neq K_j$. Тогда, поскольку $K_1 a \subseteq K_i$ и $K_1 b \subseteq K_j$, имеем $X_{1i} \neq 0$ и $X_{1j} \neq 0$ при $i \neq j$, что противоречит мономиальности X.

2) Пусть $a, b \in K_i$, и пусть $X_{1i} = (f_1, \dots, f_n)$. Тогда этот элемент X_{1i} соответствует некоторым плотным разложениям $a = a_1 \dots a_p$, $b = b_1 \dots b_p$ и цепочке $\mathscr{R}^\sharp$-классов $K_1 = K_{i_1}, \dots, K_{i_{p+1}} = K_i$. Поскольку набор элементов $\{s_{i_l}\}$, определяющих отображения из K_{i_l} в $K_{i_{l+1}}$, $1 \le l \le p$, заранее зафиксирован, имеет место цепочка равенств

$$a = ea = e f_{i_1} s_{i_1} f_{i_2} s_{i_2} \dots s_{i_p} f_{i_{p+1}} = eb = b,$$

откуда $a = b$, что противоречит предположению (здесь умножение на f_{i_l} понимается как действие элемента соответствующей локальной группы).

Итак, $f(a) \cap f(b) = \varnothing$, и корректность доказана. Осталось показать, что $f(S)$ — моноид относительно операции умножения матриц и ψ — гомоморфизм. Сюръективность ψ очевидна из построения. Достаточно показать, что если $A \in f(a), B \in f(b)$, то $AB \in f(ab)$.

Пусть $AB = C$. Если $C_{ij} \neq 0$, то в соответствии с умножением мономиальных матриц для некоторого l имеем $A_{il}, B_{lj} \neq 0$ и $A_{il} B_{lj} = C_{ij}$. Элемент $A_{ik} \in f_{ik}(a)$ матрицы A соответствует некоторому плотному разложению $a_1 \dots a_p$ и набору классов $\{K_{i_1}, \dots, K_{i_p}\}$ при действии $K_i a$. Обозначим $A_{ik} = (f_1(a), \dots, f_n(a))$. Аналогично элемент $B_{kj} \in f_{kj}(b)$ матрицы B соответствует некоторому плотному разложению $b = b_1 \dots b_s$ и набору классов $\{K_{i_p} \dots K_{i_{p+s-1}}\}$.

Пусть $B_{kj} = (f_1(b) \dots f_n(b))$. Имеем $C_{ij} = (f_1(a)f_1(b), \dots, f_n(a)f_n(b))$, где

$$f_i(a)f_i(b) = \begin{cases} e_ie_i = e_i, & \text{для } i \notin \{i_1 \dots i_{p+s-1}\}, \\ f_i(a)e_i = f_i(a), & \text{для } i \in \{i_1 \dots i_{p-1}\}, \\ f_{i_p}(a)f_{i_p}(b), & \text{для } i = i_p, \\ e_if_i(b) = f_i(b), & \text{для } i \notin \{i_{p+1} \dots i_{p+s-1}\}. \end{cases}$$

С другой стороны, имеем $K_ia \subseteq K_l$, $K_lb \subseteq K_j$. Значит, $K_ic = K_iab \subseteq K_j$. Теперь заметим, что для $c = ab$ разложение $c = a_1 \dots a_pb_1 \dots b_s$ плотное, поскольку иначе $a = a_1 \dots a_p$ или $b = b_1 \dots b_s$ можно было бы уплотнить, а это не так. При действии $K_ic \subseteq K_j$ этому разложению соответствует в точности элемент C_{ij}. Так как рассуждение проводилось для произвольного $C_{ij} \neq 0$, имеем $C \in f(c) = f(ab)$. Следовательно, множество $f(S) = \{f(z) \mid z \in S\}$ образует подмоноид в $TM_n(G)$, поскольку единице моноида S соответствует единичная матрица E_n. Отображение $\psi\colon f(S) \to S$, определяемое правилом $\psi(Z) = z$ для каждой матрицы $Z \in f(z)$, является гомоморфизмом $f(S)$ на S. Таким образом, S делит $TM_n(G)$. Теорема доказана. $\square$

Автор выражает глубокую признательность А. Н. Плющенко за внимание к работе и ряд ценных замечаний, которые помогли существенно улучшить изложение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Almeida J.** Finite semigroups and universal algebra. Singapore: World Scientific, 1994. 511 p.
2. **Pin J.-E.** Varieties of formal languages. London: North Oxford Academic Publishers, 1986. 148 p.
3. **Rhodes J., Steinberg B.** The q-theory of finite semigroups. New York: Springer, 2009. 666 p.
4. **Schützenberger M.P.** On finite monoids having only trivial subgroups // Inf. Control. 1965. Vol. 8. P. 190–194.
5. **Simon I.** Piecewise testable events // Lect. Notes in Comp. Sci. 1975. Vol. 33. P. 214–222.
6. **Straubing H.** On finite $\mathscr{J}$-trivial monoids // Semigroup Forum. 1980. Vol. 19. P. 107–110.
7. **Лаллеман Ж.** Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985. 440 с.
8. **Первухина Т.В.** Структура конечных моноидов, удовлетворяющих соотношению $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 181–191.
9. **Первухина Т.В.** О псевдомногообразии, порожденном всеми конечными моноидами со свойством $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. Р. 215–220.

Первухина Татьяна Вячеславовна
младший науч. сотрудник
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им Б. Н. Ельцина
e-mail: cristofory@gmail.com

Поступила 03.04.2014