ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.927.2:517.928

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Ф. Х. Мукминов, Т. Р. Гадыльшин

В работе рассматривается нелинейная задача Дирихле на отрезке для уравнения второго порядка, возмущенная дельта-образным потенциалом $\varepsilon^{-1}Q\left(\varepsilon^{-1}x\right)$, где $Q(\xi)$ — финитная функция, $0<\varepsilon\ll 1$. На основе метода согласования асимптотических разложений построено решение этой краевой задачи с точностью до $O(\varepsilon)$. Для обоснования построенного асимптотического приближения используется теорема о неподвижной точке. Для линейной краевой задачи рассмотрены все типы граничных условий.

Ключевые слова: уравнение второго порядка, дельта-образный потенциал, малый параметр, асимптотика.

F. Kh. Mukminov, T. R. Gadyl'shin. Boundary-value problem for a second-order nonlinear equation with delta-like potential.

A Dirichlet nonlinear problem for a second-order equation is considered on an interval. The problem is perturbed by the delta-like potential $\varepsilon^{-1}Q\left(\varepsilon^{-1}x\right)$, where the function $Q(\xi)$ is compactly supported and $0<\varepsilon\ll 1$. A solution of this boundary-value problem is constructed with accuracy up to $O(\varepsilon)$ with the use of the method of matched asymptotic expansions. The obtained asymptotic approximation is validated by means of the fixed-point theorem. All types of boundary conditions are considered for a linear boundary-value problem.

Keywords: second-order equation, delta-like potential, small parameter, asymptotics.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $k\in C^2[a,b]$, $q\in C[a,b]$, $p\in C^2(-\infty,\infty)$, $Q\in C_0(-\infty,\infty)$, $\{0\}\in(a,b)$,

$$\mathcal{L}^{\varkappa}u:=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\,(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(u)+q\,(x)\,u,\quad x\in(a,b),\quad \mathcal{L}^{\varkappa}_{\varepsilon}:=\mathcal{L}^{\varkappa}+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $\varkappa\geqslant 0$, $0<\varepsilon\ll 1$. Здесь и всюду далее $k\,(x)\geqslant k_0>0$, $q\,(x)\geqslant q_0>0$, $Q(\tau)\geqslant 0$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}^{\varkappa}_{\varepsilon}u^{\varepsilon}=f,\quad x\in(a,b),\quad u^{\varepsilon}(a)=u^{\varepsilon}(b)=0. \tag{1.1}$$

В случае отсутствия дельта-образного потенциала $\varepsilon^{-1}Q\left(\varepsilon^{-1}x\right)$ известно (см., например, [1, гл. 10, § 38]), что при любом фиксированном $f\in C[a,b]$ эта задача однозначно разрешима при достаточно малых $\varkappa$. Обозначим

$$\langle Q\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \langle Q\rangle_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tau Q(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \{g\}\,(0)=g(+0)-g(-0).$$

Основной целью работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.1. *При любом фиксированном $f\in L_2(a,b)$ и любом достаточно малом фиксированном $\varkappa>0$ для решения u^{ε} краевой задачи* (1.1) *справедливо равенство*

$$\|u^{\varepsilon}-u_0\|_{C[a,b]}=O(\varepsilon), \tag{1.2}$$

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-07920). Второй автор частично поддержан РНФ.

где u_0 — решение краевой задачи

$$\mathcal{L}^{\varkappa} u_0 = f, \quad x \in (a,0) \cup (0,b), \quad u_0(a) = u_0(b) = 0, \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q \rangle \, u_0(0). \tag{1.3}$$

Доказательство этого утверждения будет проводится на основе метода согласования асимптотических приближений [1–3].

2. Разрешимость краевых задач (1.3) и (1.1)

Вначале рассмотрим при $\langle Q \rangle \geqslant 0$ следующую линейную краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^0 u_0 = f, \quad x \in (a,0) \cup (0,b), \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q \rangle \, u_0(0), \\ &l_a u_0 := h_a u_0(a) - H_a \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}(a) = 0, \quad l_b u_0 := h_b u_0(b) + H_b \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}(b) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где h_a, h_b, H_a, $H_b \geqslant 0$, $h_a + H_a > 0$, $h_b + H_b > 0$.

Пусть $f \in L_2(a,b)$. Положим $\widetilde{h}_a = k(a) h_a H_a^{-1}$, $\widetilde{h}_b = k(b) h_b H_b^{-1}$ ($\widetilde{h}_a = 0$, если $H_a = 0$, и $\widetilde{h}_b = 0$, если $H_b = 0$). При $H_a H_b \neq 0$ под обобщенным (слабым) решением краевой задачи (2.1) понимается функция $u_0 \in W_2^1(a,b)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$(u_0, v)' := \int\limits_a^b \left(k u_0' v' + q u_0 v\right) \mathrm{d}x + \langle Q \rangle \, u_0(0) v(0) + \widetilde{h}_a u_0(a) v(a) + \widetilde{h}_b u_0(b) v(b) = \int\limits_a^b f v \mathrm{d}x \tag{2.2}$$

для любого $v \in W_2^1(a,b)$. Линейное нормированное пространство $W_2^1(a,b)$ вложено в $C[a,b]$ (см., например, [4, гл. III, § 6]). Следовательно,

$$u \in C[a,b], \quad \|u\|_{C[a,b]} \leqslant C \|u\|_{W_2^1(a,b)} \quad \forall u \in W_2^1(a,b). \tag{2.3}$$

Поэтому скалярное произведение $(u,v)'$ в силу условий $k_1 \geqslant k(x) \geqslant k_0 > 0$, $q_1 \geqslant q(x) \geqslant q_0 > 0$, $\langle Q \rangle \geqslant 0$ эквивалентно исходному в пространстве $W_2^1(a,b)$. Аналогично при $H_a = H_b = 0$ (при $H_a = 0$, $H_b \neq 0$ или при $H_a \neq 0$, $H_b = 0$) под обобщенным решением краевой задачи (2.1) понимается элемент $u_0 \in W_2^1(a,b)$, обращающийся в нуль при $x = a$ и $x = b$ (при $x = a$, или при $x = b$) и удовлетворяющий интегральному тождеству (2.2) для любого $v \in W_2^1(a,b)$, обращающегося в нуль при $x = a$ и $x = b$ (при $x = a$, или при $x = b$).

По теореме Рисса (см., например, [4, гл. II, § 3, п. 2]) краевая задача (2.1) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|u_0\|_{W_2^1(a,b)} \leqslant C \|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{2.4}$$

В (2.3), (2.4) и в дальнейшем постоянные C, вообще говоря, разные.

Покажем, что

$$u_0 \in W_2^2(a,0), \quad u_0 \in W_2^2(0,b), \quad \|u_0\|_{W_2^2(a,0)} + \|u_0\|_{W_2^2(0,b)} \leqslant C \|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{2.5}$$

Хорошо известно, что для $F \in L_2(a,0)$ решение краевой задачи

$$\mathcal{L}^0 w = F, \quad x \in (a,0), \quad w(a) = 0, \quad w(0) = 0, \tag{2.6}$$

принадлежит $W_2^2(a,0)$ и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{W_2^2(a,0)} \leqslant C \|F\|_{L_2(a,0)}. \tag{2.7}$$

(Для n-мерных эллиптических операторов этот результат имеется, например, в [4, гл. IV, § 2, п. 3], при $n = 1$ доказательство элементарно.) Будем искать $u_0(x)$ в виде $u_0(x) = w(x) +$

$w_1(x)$, где $w_1(x) = (u_0(a) - u_0(0))x/a + u_0(0)$. В силу (2.3), (2.4) получаем, что $\|w_1\|_{W_2^2(a,0)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}$. Легко видеть, что для w получаем краевую задачу (2.6), причем $\|F\|_{L_2(a,0)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}$ опять же в силу (2.3), (2.4). Следовательно, $u_0 \in W_2^2(a,0)$ и $\|u_0\|_{W_2^2(a,0)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}$ исходя из (2.7). Аналогичная оценка справедлива и для интервала $(0,b)$, т. е. получили (2.5).

Так как $W_2^2(c,d)$ вложено в $C^1[c,d]$ (см., например, [4, гл. III, § 6]), т. е.

$$w \in C^1[a,b], \quad \|w\|_{C^1[c,d]} \leqslant C\|w\|_{W_2^2(c,d)} \quad \forall w \in W_2^2(c,d), \tag{2.8}$$

то в силу (2.3), (2.4) и (2.8), (2.5) имеем

$$\begin{aligned} &u_0 \in C[a,b], \quad \|u_0\|_{C[a,b]} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}, \\ &u_0 \in C^1[a,0], \quad u_0 \in C^1[0,b], \quad \|u_0\|_{C^1[a,0]} + \|u_0\|_{C^1[0,b]} \leqslant \ C\|f\|_{L_2(a,b)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Аналогично определяются обобщенные решения нелинейных краевых задач (1.1) и (1.3) как функции $u^\varepsilon \in W_2^1(a,b)$ и $u_0 \in W_2^1(a,b)$, обращающиеся в нуль на концах интервала (a,b) и удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int_a^b k(u^\varepsilon)'v'\mathrm{d}x + \varkappa \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(u^\varepsilon)\right)v\mathrm{d}x + \int_a^b qu^\varepsilon v\mathrm{d}x + \varepsilon^{-1}\int_a^b Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon v\mathrm{d}x = \int_a^b fv\mathrm{d}x,$$

$$(u_0, v)' + \varkappa \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(u_0)\right)v\mathrm{d}x = \int_a^b fv\mathrm{d}x$$

соответственно при любых $v \in W_2^1(a,b)$, равных нулю на концах интервала (a,b).

Доказательство следующих трех утверждений для нелинейных краевых задач (1.3) и (1.1) основано на подходе, предложенном в [1] при доказательстве теорем существования и оценок для решений нелинейных краевых задач с операторами с быстроосциллирующими коэффициентами.

Теорема 2.1. *Пусть f — произвольная фиксированная функция из $L_2(a,b)$. Тогда при любом достаточно малом $\varkappa > 0$ и любом неотрицательном $\langle Q\rangle$ краевая задача* (1.3) *однозначно разрешима в* $W_2^1(a,b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В подпространстве функций из $W_2^1(a,b)$ рассмотрим шар

$$S_M := \left\{v \colon v(a) = v(b) = 0,\ \|v\|_{W_2^1(a,b)} \leqslant M\right\},$$

где постоянную M выберем позднее.

Так как $p' \in C^1(-\infty,\infty)$, а $v \in C[a,b]$ согласно (2.3), то $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(v) = p'(v)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \in L_2(a,b)$. Определим оператор $A : S_M \to W_2^1(a,b)$ следующим образом: $u = Av$, если при $f \in L_2(a,b)$ функция u является решением следующей однозначно разрешимой в $W_2^1(a,b)$ линейной краевой задачи

$$\begin{gathered} \mathcal{L}^0 u = f - \varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(v), \quad x \in (a,0)\cup(0,b), \quad u(a) = u(b) = 0, \\ k(0)\{u'\}(0) = \langle Q\rangle\, u(0), \end{gathered}$$

причем в силу теорем о повышении гладкости решений $u \in W_2^2(a,0)$, $u \in W_2^2(0,b)$.

В этих обозначениях краевая задача (1.3) приобретает вид $u_0 = Au_0$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что можно выбрать постоянные M и $\varkappa$ так, чтобы оператор A был сжимающим в S_M. Из (2.4) следует, что

$$\|u\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant C^2\Big\|f - \varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(v)\Big\|^2_{L_2(a,b)} \leqslant 2C^2\left(\|f\|^2_{L_2(a,b)} + \varkappa^2\Big\|p'(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big\|^2_{L_2(a,b)}\right). \tag{2.10}$$

Из неравенства (2.3) вытекает, что в шаре S_M справедливы оценки

$$|v(x)| \leqslant CM, \quad |p'(v)| \leqslant M_1. \tag{2.11}$$

Следовательно,

$$\|u\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant 2C^2 \left(\|f\|^2_{L_2(a,b)} + \varkappa^2 M_1^2 M^2\right)$$

в силу (2.10). Отсюда для фиксированного f получаем, что

$$\|Av\|^2_{W_2^1(a,b)} < M^2,$$

если последовательно выбрать M достаточно большим, а $\varkappa$ — достаточно малым. Следовательно, при таких M и $\varkappa$ оператор A переводит шар S_M в себя.

Покажем, что при достаточно малом $\varkappa$ оператор A является сжимающим. Пусть $u_1 = Av_1$, $u_2 = Av_2$. Запишем соотношение (2.2) для u_1, u_2 и вычтем из первого второе:

$$(u_1 - u_2, v)' = \varkappa \int\limits_a^b v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(v_2) - p(v_1)\right) \mathrm{d}x.$$

Подставим в это равенство $v = u_1 - u_2$ и проинтегрируем по частям:

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2)' = \varkappa \int\limits_a^b \left(p(v_1(x) - p(v_2(x))\right)(u_1(x) - u_2(x))' \,\mathrm{d}x.$$

Учитывая, что $\min\{k_0; q_0\}\|u_1 - u_2\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant (u_1 - u_2, u_1 - u_2)'$, приходим к неравенству

$$\min\{k_0; q_0\}\|u_1 - u_2\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant \varkappa \max_{v \in S_M} |p'(v)| \int\limits_a^b |v_1(x) - v_2(x)| \cdot \left|u_1'(x) - u_2'(x)\right| \mathrm{d}x.$$

С учетом(2.11) последовательно получаем

$$\|u_1 - u_2\|^2_{W_2^1[a,b]} \leqslant \frac{\varkappa M_1}{\min\{k_0; q_0\}} \|v_1 - v_2\|_{L_2(a,b)} \|u_1 - u_2\|_{L_2(a,b)},$$
$$\|Av_1 - Av_2\|_{W_2^1[a,b]} \leqslant \frac{\varkappa M_1}{\min\{k_0; q_0\}} \|v_1 - v_2\|_{W_2^1(a,b)}.$$

Откуда вытекает, что при достаточно малом положительном $\varkappa$ оператор A является сжимающим и, следовательно, краевая задача (1.3) однозначно разрешима. Теорема 2.1 доказана.

Так как решение u_0 нелинейной краевой задачи (1.3) можно рассматривать как решение линейной краевой задачи

$$\mathcal{L}^0 u_0 = F, \quad x \in (a, 0) \cup (0, b), \quad u_0(a) = u_0(b) = 0, \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q \rangle \, u_0(0)$$

при $F = f - \varkappa \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(u_0)$, то получаем справедливость следующего утверждения (см. (2.5)).

Следствие 2.1. *Решение краевой задачи* (1.3) *принадлежит* $W_2^2(a, 0) \cup W_2^2(0, b)$.

Теорема 2.2. *Пусть f — произвольная фиксированная функция из $L_2(a, b)$. Тогда существует число $\varkappa_0 > 0$ такое, что для любых $Q \geqslant 0$, $0 < \varkappa < \varkappa_0$ и $\varepsilon > 0$ краевая задача* (1.1) *однозначно разрешима в $W_2^1(a, b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая уравнение из однозначно разрешимой краевой задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0 u^\varepsilon = f, \quad x \in (a,b), \quad u^\varepsilon(a) = u^\varepsilon(b) = 0,$$

на u^ε и интегрируя полученное равенство по частям по интервалу (a,b) с учетом того, что $Q \geqslant 0$, получаем следующий аналог оценки (2.4):

$$\|u^\varepsilon\|_{W_2^1(a,b)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}, \tag{2.12}$$

где постоянная C от ε не зависит. В рассматриваемом случае определим оператор $A : S_M \to W_2^1(a,b)$ следующим образом: $u^\varepsilon = Av$, если u^ε является решением однозначно разрешимой в $W_2^1(a,b)$ линейной краевой задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0 u^\varepsilon = f - \varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(v), \quad x \in (a,b), \quad u^\varepsilon(a) = u^\varepsilon(b) = 0.$$

В этих обозначениях краевая задача (1.1) приобретает вид

$$u^\varepsilon = Au^\varepsilon.$$

С учетом оценки (2.12) (вместо (2.4)) и неравенства $Q \geqslant 0$ дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 2.1. Теорема 2.2 доказана.

Справедливость следующего утверждения устанавливается аналогично следствию 2.1.

Следствие 2.2. *Решение краевой задачи* (1.1) *принадлежит* $W_2^2(a,b)$.

Для доказательства теоремы 1.1 понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\widehat{W}_\varepsilon$ является решением краевой задачи*

$$\mathcal{L}_\varepsilon^\varkappa \widehat{W}_\varepsilon = f + \varphi_\varepsilon, \quad x \in (a,b), \quad \widehat{W}_\varepsilon(a) = \widehat{W}_\varepsilon(b) = 0, \tag{2.13}$$

причем

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L_2(a,b)} = O(\varepsilon), \quad \|\widehat{W}_\varepsilon\|_{C[a,b]} = O(1). \tag{2.14}$$

Тогда

$$\|u^\varepsilon - \widehat{W}_\varepsilon\|_{W_2^1[a,b]} = O(\varepsilon). \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.1) и (2.13) следует, что

$$\mathcal{L}_\varepsilon^\varkappa \widehat{W}_\varepsilon - \mathcal{L}_\varepsilon^\varkappa u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon(x). \tag{2.16}$$

Обозначим

$$v_\varepsilon(x) = \widehat{W}_\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x). \tag{2.17}$$

Следуя доказательству теоремы 2.1, умножим обе части равенства (2.16) на v_ε и проинтегрируем по частям на (a,b). В результате получаем, что

$$\int_a^b \left(k(x)v_\varepsilon'^2(x) + \left(q(x) + \varepsilon Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)v_\varepsilon^2\right)\mathrm{d}x = \varkappa\int_a^b v_\varepsilon'(x)\left(p\left(\widehat{W}_\varepsilon(x)\right) - p\left(u^\varepsilon(x)\right)\right)\mathrm{d}x + \int_a^b v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x.$$

Отсюда следует, что

$$\min\{k_0; q_0\}\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant \varkappa \sup_{x\in[a,b],\theta\in(0,1)} |p'(\widetilde{u}_\varepsilon)| \int_a^b |v_\varepsilon'(x)|\cdot|v_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |v_\varepsilon(x)|\cdot|\varphi_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x,$$

где $\widetilde{u}_\varepsilon(x) = \theta(x)u^\varepsilon(x) + (1-\theta(x))\widehat{W}_\varepsilon(x)$, $0 < \theta(x) < 1$. Так как $\|u^\varepsilon\|_{C[a,b]} \leqslant CM$ в силу (2.3), а $\|\widehat{W}_\varepsilon\|_{C[a,b]} \leqslant C$ в силу (2.14), то $|\widetilde{u}_\varepsilon(x)| \leqslant C_1$ и, следовательно, $\sup\limits_{x\in[a,b],\theta\in(0,1)} |p'(\widetilde{u}_\varepsilon)| \leqslant M_1$. Тогда из последнего интегрального неравенства и из (2.14) вытекает, что

$$\min\{k_0; q_0\}\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant M_1\varkappa\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(a,b)} + \varepsilon M_2\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(a,b)},$$
$$\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant \varepsilon\frac{M_2}{\min\{k_0; q_0\} - M_1\varkappa}.$$

При достаточно малых $\varkappa$ это дает $\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(a,b)} = O(\varepsilon)$. Отсюда с учетом определения (2.17) получаем оценку (2.15). Лемма 2.1 доказана.

3. Линейная краевая задача с дельта-образным потенциалом

Целью этого раздела является доказательство следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Для решения краевой задачи*

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon u^\varepsilon = f, \quad x \in (a,b), \quad l_a u^\varepsilon = l_b u^\varepsilon = 0 \tag{3.1}$$

справедлива равномерная оценка

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C[a,b]} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(a,b)}, \tag{3.2}$$

где u_0 — решение краевой задачи

$$\mathcal{L}^0 u_0 = f, \quad x \in (a,0)\cup(0,b), \quad l_a u_0 = l_b u_0 = 0, \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q\rangle\, u_0(0). \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $k(x) \equiv 1$ и граничных условий Дирихле сходимость решений краевой задачи (3.1) к решению краевой задачи (3.3) была показана в [5]. Также известно (см. [6; 7] и содержащийся в этих работах обзор литературы), что для оператора Шредингера с дельта-образным потенциалом на оси предельным будет оператор Шредингера со скачком производной (как в (3.3)). Поэтому и в рассматриваемом нами случае вне малой окрестности нуля в качестве внешнего приближения решения $u^\varepsilon(x)$ краевой задачи (3.1) возьмем решение $u_0(x)$ краевой задачи (3.3).

Функция $u_0(x)$ не удовлетворяет уравнению из (3.1) в окрестности нуля. Поэтому в этой окрестности будем строить внутреннее приближение $V(\xi,\varepsilon)$, где $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Функция $u_0(x)$ имеет в нуле односторонние производные, поэтому

$$u_0(x) = u_0(0) + u_0'(\mp 0)x + O(x^2), \quad \mp x > 0.$$

Переходя в этом равенстве к переменной ξ, получаем, что

$$u_0(x) = u_0(0) + \varepsilon u_0'(\mp 0)\xi + O(\varepsilon^2\xi^2), \quad \mp\xi > 0, \quad \varepsilon\xi \to \mp 0.$$

Из этих равенств и условия согласования внешнего и внутреннего разложений [1–3] вытекает, что внутреннее приближение следует искать в виде

$$V(\xi,\varepsilon) = v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi), \tag{3.4}$$

требуя от $v_0(\xi)$ и $v_1(\xi)$ следующего поведения на бесконечности:

$$v_0(\xi) = u_0(0) + o(1), \qquad \xi \to \mp\infty, \tag{3.5}$$
$$v_1(\xi) = u_0'(\mp 0)\xi + C_\mp + o(1), \quad \xi \to \mp\infty. \tag{3.6}$$

Переходя в определении $\mathcal{L}_\varepsilon^0$ к переменной ξ, получаем

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0 V = \Big(-\varepsilon^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big(k(\varepsilon\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big) + \big(q(\varepsilon\xi) + \varepsilon^{-1}Q\,(\xi)\,\big)\Big)(v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi))$$

$$= -\varepsilon^{-2}k(0)\frac{\mathrm{d}^2 v_0}{\mathrm{d}\xi^2} + \varepsilon^{-1}\left(-k(0)\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\xi\frac{\mathrm{d}^2 v_0}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\xi} + Q(\xi)v_0\right)$$

$$-\varepsilon^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(k(x) - k(0) - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((k(x) - k(0))\,\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + q(x)v_0(\xi) + Q(\xi)v_1(\xi) + \varepsilon q(x)v_1(\xi). \tag{3.7}$$

Приравнивая в правой части коэффициент при ε^{-2}, получаем уравнение для v_0:

$$k(0)\frac{\mathrm{d}^2 v_0}{\mathrm{d}\xi^2} = 0. \tag{3.8}$$

Очевидно, что функция

$$v_0(\xi) \equiv u_0(0) \tag{3.9}$$

является решением уравнения (3.8) с асимптотикой (3.5).

Приравнивая в правой части (3.7) коэффициент при ε^{-1} с учетом последнего тождества, выводим уравнение для v_1:

$$k(0)\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2} = u_0(0)Q(\xi). \tag{3.10}$$

Таким образом, получаем справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Если функция $v_0(\xi)$ определяется равенством* (3.9), *а функция $v_1(\xi)$ является решением уравнения* (3.10), *то справедливо равенство*

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0 V\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(k(x) - k(0) - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$+ q\,(x)\,V\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right) + Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right). \tag{3.11}$$

Легко видеть, что функция

$$v_1(\xi) = \left(\mathcal{K} + \frac{u_0(0)}{k(0)}\int\limits_{-\infty}^{\xi} Q(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\xi - \frac{u_0(0)}{k(0)}\int\limits_{-\infty}^{\xi}\tau Q(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.12}$$

является решением уравнения (3.10) при любом выборе числа $\mathcal{K}$.

Из этого равенства следует, что

$$v_1(\xi) = \begin{cases} \mathcal{K}\xi & \text{при } \xi \text{ левее } \operatorname{supp} Q(\xi), \\ \left(\mathcal{K} + \dfrac{u_0(0)}{k(0)}\langle Q\rangle\right)\xi - \dfrac{u_0(0)}{k(0)}\langle Q\rangle_1 & \text{при } \xi \text{ правее } \operatorname{supp} Q(\xi). \end{cases} \tag{3.13}$$

Приравнивая в (3.13) с (3.6) коэффициенты при ξ для $\xi \to \mp\infty$, получаем систему уравнений для $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = u_0'(-0), \tag{3.14}$$

$$\mathcal{K} + \frac{u_0(0)}{k(0)}\langle Q\rangle = u_0'(+0). \tag{3.15}$$

В силу условия на скачок производной из (3.3) эта переопределенная система однозначно разрешима относительно $\mathcal{K}$ (что косвенно подтверждает правильный выбор u_0). Таким образом, определив $v_0(\xi)$, $v_1(\xi)$ и $\mathcal{K}$ в соответствии с (3.9), (3.12) и (3.14), мы добились равенства (3.5) и исходя из (3.13)–(3.15) равенства

$$v_1(\xi) = \begin{cases} u_0'(-0)\xi & \text{при } \xi < -r, \\ u_0'(+0)\xi - \dfrac{u_0(0)}{k(0)} \langle Q \rangle_1 & \text{при } \xi > r, \end{cases} \tag{3.16}$$

где $r = \operatorname{dist}(\{0\}, \operatorname{supp} Q(\xi)) + |\operatorname{supp} Q(\xi)|$. Равенство (3.16) соответствует требованию (3.6).

Согласованные члены внешнего и внутреннего приближений обозначим через $\widehat{U}(x)$ и $\widehat{V}(\xi,\varepsilon)$ соответственно, т. е.

$$\widehat{U}(x) := u_0(0) + u_0'(\mp 0)x = u_0(0) + \varepsilon u_0'(\mp 0)\xi := \widehat{V}(\xi,\varepsilon), \quad \mp x, \mp\xi > 0. \tag{3.17}$$

Положим

$$Z_\varepsilon(x) := u_0(x) + V\Big(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\Big) - \widehat{U}(x) = u_0(x) + V\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right) - \widehat{V}\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right), \tag{3.18}$$

$$\widehat{v}_1(\xi) := v_1(\xi) - u_0'(\mp 0)\xi, \quad \mp\xi > 0. \tag{3.19}$$

Тогда с учетом равенств (3.4), (3.9) и (3.17) последовательно получаем, что

$$V(\xi,\varepsilon) - \widehat{V}(\xi,\varepsilon) = \varepsilon\widehat{v}_1(\xi), \tag{3.20}$$

$$Z_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon\widehat{v}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{3.21}$$

А так как $u_0 \in \big(W_2^2(a,0) \cup W_2^2(0,b)\big) \cap W_2^1(a,b)$ в силу (2.5), то из (3.18), (3.17) следует, что

$$Z_\varepsilon \in W_2^2(a,b). \tag{3.22}$$

Ввиду (3.19) и (3.16) имеем

$$\widehat{v}_1(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < -r, \\ -\dfrac{u_0(0)}{k(0)} \langle Q \rangle_1 & \text{при } \xi > r. \end{cases} \tag{3.23}$$

Из (3.21) и последнего равенства с учетом граничных условий для u_0 из (3.3) следует, что

$$l_a Z_\varepsilon = 0, \quad l_b Z_\varepsilon = -\varepsilon h_b \frac{u_0(0)}{k(0)} \langle Q \rangle_1. \tag{3.24}$$

В силу равенств (3.19), (3.12), (3.14) и (3.23) получаем, что

$$|\widehat{v}_1(\xi)| \leqslant C_1 |u_0(0)| + C_2 \left|u_0'(-0)\right| + C_3 \left|u_0'(+0)\right|. \tag{3.25}$$

Из этой оценки, равенства (3.21) и неравенств (2.9) вытекает, что

$$\|Z_\varepsilon - u_0\|_{C[a,b]} \leqslant \varepsilon C \|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.26}$$

В силу определения (3.18), уравнения из (3.3) и равенства (3.11) имеем

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0 Z_\varepsilon = f(x) + \varepsilon^{-1} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\big(u_0(x) - \widehat{U}(x)\big) + q(x)\left(V\Big(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\Big) - \widehat{V}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\Big)\right) + Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(k(x) - k(0) - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right) - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi) + \xi\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)-k(0)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)u_0'(\mp 0)+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)u_0'(\mp 0), \quad \mp x>0.$$

С учетом (3.17), (3.19) и (3.20) это равенство можно переписать в виде

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon Z_\varepsilon = f(x)+I_\varepsilon(x)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi)+\xi\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}+Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{3.27}$$

где

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(x) =& I^1_\varepsilon(x)+I^2_\varepsilon(x)+I^3_\varepsilon(x),\\
I^1_\varepsilon(x) =& \varepsilon^{-1}Q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\big(u_0(x)-u_0(0)-u_0'(\mp 0)x\big), \quad \mp x>0, \quad I^2_\varepsilon(x)=\varepsilon q(x)\widehat{v}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\\
I^3_\varepsilon(x) =& -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(k(x)-k(0)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\\
=& -\varepsilon^{-1}\Big(k(x)-k(0)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\Big(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(x)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Используя для $I^1_\varepsilon(x)$ формулу остаточного члена ряда Тейлора в интегральной форме, в силу уравнения из (3.3) имеем

$$I^1_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\int\limits_0^x\frac{(x-t)}{k(t)}\big(q(t)u_0(t)-k'(t)u_0'(t)-f(t)\big)\,\mathrm{d}t. \tag{3.29}$$

А так как

$$\int\limits_a^b\left(Q\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\int\limits_0^s(s-t)F(t)\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}s\leqslant C_1\int\limits_{\mathrm{supp}Q(\varepsilon^{-1}x)}\left(\int\limits_0^s(s-t)F(t)\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_1\int\limits_{\mathrm{supp}Q(\varepsilon^{-1}x)}\left|\int\limits_0^s(s-t)^2\,\mathrm{d}t\int\limits_0^s F^2(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}s\leqslant C_1\|F\|^2_{L_2(a,b)}\int\limits_{\mathrm{supp}Q(\varepsilon^{-1}x)}|s|^3\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon^4C_2\|F\|_{L_2(a,b)},$$

то из (3.29) и (2.4) следует, что

$$\|I^1_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.30}$$

Из определения (3.28) функции $I^2_\varepsilon(x)$ и неравенств (3.25) и (2.9) имеем, что

$$\|I^2_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.31}$$

Из определения (3.28) функции $I^3_\varepsilon(x)$ и равенства (3.23) следует, что $\mathrm{supp}I^3_\varepsilon\subset[-\varepsilon r,\varepsilon r]$. Из определений (3.12), (3.14) и (3.19) функций $v_1(\xi)$ и $\widehat{v}_1(\xi)$ вытекает, что

$$\left|v_1''(\xi)\right|+\left|\widehat{v}_1'(\xi)\right|\leqslant C_1\left|u_0(0)\right|+C_2\left|u_0'(-0)\right|+C_3\left|u_0'(+0)\right|. \tag{3.32}$$

Из этого неравенства и оценок (2.9) получаем, что

$$\|I^3_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.33}$$

Из определения (3.28) функции $I_\varepsilon(x)$ и оценок (3.30), (3.31) и (3.33) вытекает, что

$$\|I_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.34}$$

Легко видеть, что функции

$$v_{2,\varepsilon}(x)=\int\limits_a^x Q\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\int\limits_t^x \frac{1}{k(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{3.35}$$

$$v_{3,\varepsilon}(x)=-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\int\limits_a^x\Big(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi)+\xi\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}t}\int\limits_t^x\frac{1}{k(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{3.36}$$

являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}v_{2,\varepsilon}}{\mathrm{d}x}(x)\Big)=&Q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)v_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}v_{3,\varepsilon}}{\mathrm{d}x}(x)\Big)=&-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi)+\xi\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}.\end{aligned}$$

Поэтому, применяя оператор $\mathcal{L}^0_\varepsilon$ к $v_{2,\varepsilon}$ и $v_{3,\varepsilon}$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^0_\varepsilon v_{2,\varepsilon}(x)=&-Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+q(x)v_{2,\varepsilon}(x)+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{2,\varepsilon}(x),\\ \mathcal{L}^0_\varepsilon v_{3,\varepsilon}(x)=&\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi)+\xi\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}+q(x)v_{3,\varepsilon}(x)+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{3,\varepsilon}(x).\end{aligned} \tag{3.37}$$

Обозначим

$$W_\varepsilon(x)=Z_\varepsilon(x)+v_{2,\varepsilon}(x)+v_{3,\varepsilon}(x). \tag{3.38}$$

Тогда, во-первых,

$$W_\varepsilon\in W^2_2(a,b) \tag{3.39}$$

в силу (3.22) и определений (3.35) и (3.36) функций $v_{2,\varepsilon}$ к $v_{3,\varepsilon}$, а во-вторых, в силу равенств (3.27), (3.37) получаем, что

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon W_\varepsilon(x)=f(x)+\mathcal{I}_\varepsilon(x), \tag{3.40}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varepsilon(x)=&I_\varepsilon(x)+I^4_\varepsilon(x)+I^5_\varepsilon(x),\\ I^4_\varepsilon(x)=&q(x)\left(v_{2,\varepsilon}(x)+v_{3,\varepsilon}(x)\right),\quad I^5_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(v_{2,\varepsilon}(x)+v_{3,\varepsilon}(x)\right),\end{aligned} \tag{3.41}$$

а $I_\varepsilon(x)$ определено в (3.28).

Из определения (3.12), (3.14) функции $v_1(\xi)$ и неравенств (2.9) последовательно получаем:

$$\|v_1\|_{C(\mathrm{supp}Q)}\leqslant C_1\left|u_0(0)\right|+C_2\left|u_0'(-0)\right|+C_3\left|u_0'(+0)\right|\leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.42}$$

Из этого неравенства и определения (3.35) следует, что

$$\|v_{2,\varepsilon}\|_{C[a,b]}\leqslant C_1\int\limits_{\mathrm{supp}Q(\varepsilon^{-1}x)}\Big|v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big|\mathrm{d}t=\varepsilon C_1\int\limits_{\mathrm{supp}Q(\xi)}|v_1(\xi)|\mathrm{d}\xi\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.43}$$

А так как

$$v'_{2,\varepsilon}(x)=-\frac{1}{k(x)}\int\limits_a^x Q\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\mathrm{d}t,$$

то аналогично доказывается, что

$$\|v'_{2,\varepsilon}\|_{C[a,b]}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.44}$$

Из (3.35) и (3.42) также следует, что

$$\|v_{2,\varepsilon}\|_{C\left(\mathrm{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)} \leqslant C_1\Biggl(\max_{\mathrm{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}|x|\int\limits_{\mathrm{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}\Bigl|v_1\Bigl(\frac{t}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr|\mathrm{d}t+\int\limits_{\mathrm{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}|t|\Bigl|v_1\Bigl(\frac{t}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr|\mathrm{d}t\Biggr)\leqslant\varepsilon^2C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.45)$$

В свою очередь, так как носитель функции $(\widehat{v}_1'(\xi)+\xi v_1''(\xi))$ лежит в $[-r,r]$, то аналогично оценкам (3.43)–(3.45), но с использованием неравенств (3.32) и (2.9) вместо (3.42), получаем справедливость следующих оценок:

$$\|v_{3,\varepsilon}\|_{C^1[a,b]}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)},\quad \|v_{3,\varepsilon}\|_{C[-\varepsilon r,\varepsilon r]}\leqslant\varepsilon^2C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.46)$$

Из определения (3.38) функции $W_\varepsilon(x)$, граничных условий (3.24) для функции $Z_\varepsilon(x)$, определений (3.35), (3.36) функций $v_{2,\varepsilon}$, $v_{3,\varepsilon}$ и неравенств (3.43), (3.44) и (3.46) следует, что

$$l_aW_\varepsilon=0,\quad |l_bW_\varepsilon|\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.47)$$

Аналогично в силу равенства (3.38) и неравенств (3.26), (3.43) и (3.46) получаем, что

$$\|W_\varepsilon-u_0\|_{C[a,b]}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.48)$$

Из определения (3.41) функции $I_\varepsilon^4(x)$ и оценок (3.43) и (3.46) выводим, что

$$\|I_\varepsilon^4\|_{L_2(a,b)}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.49)$$

Так как $\mathrm{supp}\,I_\varepsilon^5(x)=\mathrm{supp}\,Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, то с учетом неравенств (3.45) и (3.46) получаем, что

$$\|I_\varepsilon^5\|_{L_2(a,b)}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.50)$$

Из (3.41), (3.49), (3.50) и (3.34) следует, что

$$\|\mathcal{I}_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.51)$$

Обозначим

$$w_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{b}{2},\\ \Bigl(h_b\dfrac{b^2}{4}+H_bb\Bigr)^{-1}\Bigl(x-\dfrac{b}{2}\Bigr)^2l_bW_\varepsilon, & x\geqslant\dfrac{b}{2}\end{cases},$$

$$\widehat{W}_\varepsilon(x)=W_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(x).$$

Из (3.39), определения $\widehat{W}_\varepsilon(x)$, равенства (3.40) и неравенств (3.51), (3.47) следует, что $\widehat{W}_\varepsilon\in W_2^2(a,b)$ является решением краевой задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0\widehat{W}_\varepsilon=f+\varphi_\varepsilon,\quad x\in(a,b),\quad l_a\widehat{W}_\varepsilon=l_b\widehat{W}_\varepsilon=0, \quad (3.52)$$

где

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(a,b)}, \quad (3.53)$$

причем в силу (3.48) имеем

$$\|\widehat{W}_\varepsilon-u_0\|_{C[a,b]}\leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.54)$$

Из (3.52), (3.1) следует, что

$$\int\limits_a^b\mathcal{L}_\varepsilon^0\bigl(\widehat{W}_\varepsilon-u^\varepsilon\bigr)\bigl(\widehat{W}_\varepsilon-u^\varepsilon\bigr)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\varphi_\varepsilon\bigl(\widehat{W}_\varepsilon-u^\varepsilon\bigr)\mathrm{d}x.$$

Интегрируя левую часть этого равенства по частям и учитывая неравенство (3.53), получаем, что

$$\min\{k_0;q_0\}\|\widehat{W}_\varepsilon-u^\varepsilon\|_{W_2^1(a,b)}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}.$$

Отсюда и из (2.9) следует, что $\|\widehat{W}_\varepsilon-u^\varepsilon\|_{C[a,b]}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}$. Из этой оценки и неравенства (3.54) вытекает оценка (3.2). Теорема 3.1 доказана.

Так как $\|v\|_{L_2(a,b)}\leqslant\sqrt{b-a}\,\|v\|_{C[a,b]}$, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Для решения краевой задачи* (3.1) *справедлива равномерная оценка*

$$\|u^\varepsilon-u_0\|_{L_2(a,b)}\leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(a,b)},$$

где u_0 *— решение краевой задачи* (3.3).

В [8, § 5.2, п. 3] показано, что собственные значения краевой задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0\psi^\varepsilon=\lambda^\varepsilon\psi^\varepsilon,\quad x\in(a,b),\quad l_a\psi^\varepsilon=l_b\psi^\varepsilon=0$$

являются простыми. Аналогично легко показать, что и собственные значения краевой задачи со скачком производной

$$\mathcal{L}^0\psi_0=\lambda_0\psi_0,\quad x\in(a,0)\cup(0,b),\quad l_a\psi_0=l_b\psi_0=0,\quad k(0)\{u_0'\}(0)=\langle Q\rangle\,\psi_0(0)$$

также являются простыми. Поэтому из последнего утверждения и [9, гл. IV, теорема 3.16, гл. V, § 3] вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 3.2. *Все собственные значения* λ^ε *сходятся к собственным значениям* λ_0*, а для соответствующих нормированных собственных функций имеет место сходимость в* $L_2(a,b)$*. И наоборот, к любому собственному значению* λ_0 *сходится собственное значение* λ^ε*, причем*

$$\lambda^\varepsilon=\lambda_0+O(\varepsilon).\tag{3.55}$$

Заметим, что вопрос сходимости собственных значений в случае, когда вместо дельтаобразного потенциала $\varepsilon^{-1}Q(\varepsilon^{-1}x)$ рассматривался потенциал $\mu^{-1}Q(\varepsilon^{-1}x)$ при $\mu^{-1}\varepsilon\to0$, был исследован в [10]. Отметим также, что равенство, аналогичное (3.55), в задаче Дирихле для оператора со “средней” массой следует из [11].

4. Доказательство теоремы 1.1

Сохраним для $v_i(\xi)$, $\widehat{v}_1(\xi)$, $V(\xi,\varepsilon)$, $\widehat{U}(x)$, $\widehat{V}(\xi,\varepsilon)$, $Z_\varepsilon(x)$, $v_{2,\varepsilon}(x)$, $v_{3,\varepsilon}(x)$ и $W_\varepsilon(x)$ прежние обозначения, понимая, конечно, под $u_0(x)$ уже решение краевой задачи (1.3), а не решение краевой задачи (3.3) (как в предыдущем разделе).

Легко видеть, что функция

$$v_{4,\varepsilon}(x)=\varkappa\int\limits_a^x p'(u_0)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\int\limits_s^x\frac{1}{k(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\tag{4.1}$$

является решением следующего уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}v_{4,\varepsilon}}{\mathrm{d}x}(x)\Big)=\varkappa p'(u_0)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Поэтому, применяя оператор $\mathcal{L}_\varepsilon^0$ к $v_{4,\varepsilon}$, имеем

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0v_{4,\varepsilon}=-\varkappa p'(u_0)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+qv_{4,\varepsilon}+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{4,\varepsilon}.\tag{4.2}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_\varepsilon(x) =&W_\varepsilon(x) + v_{4,\varepsilon}(x) = Z_\varepsilon(x) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x)\\ =&u_0(x) + \widehat{v}_1(x) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x).\end{aligned} \tag{4.3}$$

(см. (3.38), (3.21)). Тогда

$$\widetilde{W}_\varepsilon \in W_2^2(a,b) \tag{4.4}$$

в силу (3.39) и определения (4.1) функции $v_{4,\varepsilon}$.

Применяя $\mathcal{L}_\varepsilon^\varkappa$ к $\widetilde{W}_\varepsilon(x)$, с учетом (3.40), (4.2), (4.3) и (1.3) получаем

$$\mathcal{L}_\varepsilon^\varkappa \widetilde{W}_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon^0 \widetilde{W}_\varepsilon + \varkappa p'(\widetilde{W}_\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\widetilde{W}_\varepsilon}{\mathrm{d}x} = f + \mathcal{J}_\varepsilon, \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon(x) =&\mathcal{I}_\varepsilon(x) + I_\varepsilon^6(x) + I_\varepsilon^7(x) + I_\varepsilon^8(x) + I_\varepsilon^9(x),\\ I_\varepsilon^6(x) =&\varkappa\left(p'(\widetilde{W}_\varepsilon) - p'(u_0)\right)\left(u_0'(x) + \widehat{v}_1'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),\\ I_\varepsilon^7(x) =&\varkappa p'(\widetilde{W}_\varepsilon)\left(v_{2,\varepsilon}'(x) + v_{3,\varepsilon}'(x) + v_{4,\varepsilon}'(x)\right),\\ I_\varepsilon^8(x) =&q(x)v_{4,\varepsilon}(x), \quad I_\varepsilon^9(x) = \varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{4,\varepsilon}(x),\end{aligned} \tag{4.6}$$

а $\mathcal{I}_\varepsilon(x)$ определяется равенством (3.41).

Полностью аналогично доказательству оценок (3.43)–(3.46) доказывается справедливость следующих равенств:

$$\|v_{4,\varepsilon}\|_{C^1[a,b]} = O(\varepsilon), \quad \|v_{4,\varepsilon}\|_{C\left(\mathrm{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)} = O(\varepsilon^2). \tag{4.7}$$

Из определения (4.3) функции $\widetilde{W}_\varepsilon(x)$, граничных условий для функции $W_\varepsilon(x)$, определения (4.1) функции $v_{4,\varepsilon}$ и оценок (4.7) следует, что

$$\widetilde{W}_\varepsilon(a) = 0, \quad \widetilde{W}_\varepsilon(b) = O(\varepsilon). \tag{4.8}$$

Аналогично в силу равенства (4.3), неравенства (3.48) и оценок (4.7) получаем, что

$$\|\widetilde{W}_\varepsilon - u_0\|_{C[a,b]} = O(\varepsilon). \tag{4.9}$$

Пользуясь формулой остаточного члена ряда Тейлора в форме Лагранжа, из (4.6), (4.3), (2.9), (3.25), (3.43), (3.46), (4.7), конечности носителя функции $\widehat{v}_1'(\xi)$ и (3.32) выводим

$$\|I_\varepsilon^6\|_{L_2(a,b)} \leqslant \varkappa \sup_{x\in[a,b],\theta\in(0,1)}\left(\left|p''\left(u_0(x) + \theta\left(\varepsilon\widehat{v}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x)\right)\right)\right|\right.$$

$$\left.\times\left|\left(\varepsilon\widehat{v}_{1,\varepsilon}(x) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x)\right)\right|\right) \times \sqrt{\|u_0'\|_{L_2(a,b)}^2 + \varepsilon\int\limits_{-r}^{r}|\widehat{v}_1'(\xi)|^2\mathrm{d}\xi} = O(\varepsilon). \tag{4.10}$$

Из (4.6), (4.3), (2.9), (3.25), (3.43), (3.44), (3.46) и (4.7) следует, что

$$\|\mathcal{I}_\varepsilon^7(x)\|_{L_2(a,b)} \leqslant \varkappa \max_{x\in[a,b]}|p'(u_0(x) + \varepsilon\widehat{v}_{1,\varepsilon}(x) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x))|$$

$$\times \max_{x\in[a,b]}\left(|v_{2,\varepsilon}'(x)| + |v_{3,\varepsilon}'(x)| + |v_{4,\varepsilon}'(x)|\right)\sqrt{b-a} = O(\varepsilon). \tag{4.11}$$

Аналогично оценкам (3.49), (3.50) для $I_\varepsilon^4(x)$, $I_\varepsilon^5(x)$ с учетом (4.7) получаем, что

$$\|I_\varepsilon^8\|_{L_2(a,b)} = O(\varepsilon), \quad \|I_\varepsilon^9\|_{L_2(a,b)} = O(\varepsilon).$$

Из определения (4.6), последнего равенства и оценок (3.51), (4.10), (4.11) вытекает, что

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon\|_{L_2(a,b)} = O(\varepsilon). \tag{4.12}$$

Обозначим

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{4}{b^2}\widetilde{W}_\varepsilon(b)\Big(x - \dfrac{b}{2}\Big)^2, & x \geqslant \dfrac{b}{2} \end{cases},$$

$$\widehat{W}_\varepsilon(x) = \widetilde{W}_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x).$$

Из (4.4), определения $\widehat{W}_\varepsilon(x)$, равенств (4.5), (4.12), (4.8), (4.9) и формулы остаточного члена ряда Тейлора в форме Лагранжа следует, что $\widehat{W}_\varepsilon$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Следовательно, справедливо равенство (2.15). Из этого равенства, вложения $W_2^1(a,b)$ в $C[a,b]$ и равенства (4.9) вытекает равенство (1.2). Теорема 1.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
3. **Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х.** Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, № 3. С. 55–66.
4. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1971. 512 с.
5. **Олейник О.А.** О собственных колебаниях тел с концентрированными массами // Современные проблемы прикладной математики и математической физики. М.: Наука, 1988. С. 101–127.
6. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёэг-Крон, Х. Хольден. М.: Мир, 1991. 568 с.
7. On point interactions one dimension / S. Albeverio, F. Gesztezy, R. Hoegh-Krohn, W. Kirch // J. Operator Theory. 1984. Vol. 12. P. 101–126.
8. **Владимиров В.С., Жаринов В.В.** Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
9. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
10. **Бикметов А.Р., Гадыльшин Т.Р., Хуснуллин И.Х.** Возмущение узким потенциалом операторов, ассоциированных с полуторалинейными секториальными формами // Проблемы мат. анализа. 2014. Вып. 75. С. 21–26.
11. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой / Ю.Д. Головатый, С.А. Назаров, О.А. Олейник, Т.С. Соболева // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 71–91.

Мукминов Фарит Хамзаевич
д-р физ.-мат., профессор
Башкирский государственный университет
e-mail: mfkh@rambler.ru

Поступила 1.12.2014

Гадыльшин Тимур Рустемович
студент
Уфимский государственный авиационный технический университет
e-mail: gtimr@yandex.ru