ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ КРИТИЧЕСКИМИ ПО СПЕКТРУ[1]

Н. В. Маслова

Пусть G — конечная группа. *Спектром* группы G называется множество $\omega(G)$ всех порядков ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в $\omega(G)$, будем называть *простым спектром* группы G и обозначать через $\pi(G)$. Группа G называется *критической по спектру* (соответственно *критической по простому спектру*), если для любых подгрупп K и L группы G таких, что K — нормальная подгруппа в L, из равенства $\omega(L/K) = \omega(G)$ (соответственно $\pi(L/K) = \pi(G)$) следует, что $L = G$ и $K = 1$. В настоящей работе получено описание всех конечных простых групп, не являющихся критическими по спектру. Кроме того, показано, что минимальная относительно простого спектра группа G является критической по простому спектру тогда и только тогда, когда ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ — холлова подгруппа в G.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, спектр, простой спектр, критическая по спектру группа, критическая по простому спектру группа.

N. V. Maslova. Finite simple groups that are not spectrum critical.

Let G be a finite group. The *spectrum* of G is the set $\omega(G)$ of orders of all its elements. The subset of prime elements of $\omega(G)$ is called *prime spectrum* and is denoted by $\pi(G)$. A group G is called *spectrum critical* (*prime spectrum critical*) if, for any subgroups K and L of G such that K is a normal subgroup of L, the equality $\omega(L/K) = \omega(G)$ ($\pi(L/K) = \pi(G)$, respectively) implies that $L = G$ and $K = 1$. In the present paper, we describe all finite simple groups that are not spectrum critical. In addition, we show that a prime spectrum minimal group G is prime spectrum critical if and only if its Fitting subgroup $F(G)$ is a Hall subgroup of G.

Keywords: finite group, simple group, spectrum, prime spectrum, spectrum critical group, prime spectrum critical group.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [12; 13; 16]. Всюду в работе мы будем употреблять термин “группа” в значении “конечная группа”, а термин “граф” — в значении “конечный граф без петель и кратных ребер”.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, которые не принадлежат π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество его простых делителей, а для группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Подгруппа H группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G:H|) \subseteq \pi'$. *Холлова подгруппа* — это π-холлова подгруппа для некоторого множества π простых чисел.

Пусть q — натуральная степень простого числа и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетного n или $P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+,-\}$. Будем обозначать через V векторное пространство размерности n над полем F с соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = F_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = F_{q^2}$ для унитарных групп. В случае группы $P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ для четного n параметр ε называется *знаком* этой группы и соответствующего ей векторного пространства V.

Через $Soc(G)$ обозначается цоколь группы G (подгруппа, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами), через $F(G)$ — подгруппа Фиттинга

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), фонда Дмитрия Зимина “Династия”, Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.A03.21.0006).

группы G (ее наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа), а через $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G (пересечение всех ее максимальных подгрупп).

Спектром группы G называется множество $\omega(G)$ всех порядков ее элементов. Множество $\pi(G)$ будем называть *простым спектром группы* G. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, вершинами которого являются простые числа из $\pi(G)$, и две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда число rs принадлежит множеству $\omega(G)$.

Для данного множества ω натуральных чисел группа G называется *ω-критической*, если $\omega(G) = \omega$ и для любых подгрупп K и L группы G таких, что K — нормальная подгруппа в L, из равенства $\omega(L/K) = \omega$ следует, что $L = G$ и $K = 1$. Группу G, которая является ω-критической для некоторого множества ω (или, что то же самое, является $\omega(G)$-критической), естественно назвать *критической по спектру*.

В работе [6] было введено понятие ω-критической группы и поставлена проблема описания всех ω-критических групп для заданного множества чисел ω, а также поставлен вопрос: *Верно ли, что конечная простая группа G, не изоморфная $P\Omega_8^+(2)$ и $P\Omega_8^+(3)$, является $\omega(G)$-критической?*

Группа G называется *распознаваемой по спектру*, если из равенства $\omega(G) = \omega(H)$ следует изоморфизм групп G и H. Легко понять, что если группа G распознаваема по спектру, то она является критической по спектру.

Несмотря на то, что для многих конечных простых групп положительно решен вопрос распознаваемости по спектру, в настоящей работе дается отрицательный ответ на поставленный выше вопрос, более того, определены все конечные простые группы, не являющиеся критическими по спектру. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — конечная простая группа, K и L — подгруппы в G такие, что K — нормальная подгруппа в L. Тогда $\omega(L/K) = \omega(G)$, если, и только если $K = 1$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $G = PSp_4(q)$ *и* $L \cong PSL_2(q^2)\langle t\rangle$, *где q четно и t — автоморфизм порядка 2 группы* $PSL_2(q^2)$;

(2) $G = PSp_8(q)$ *и* $L \cong SO_8^-(q)$, *где q четно*;

(3) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ *и* $L \cong P\Omega_7(2)$;

(4) $G \cong P\Omega_8^+(3)$ *и* $L \cong P\Omega_7(3)$.

Доказательство. Пусть G — простая группа, K и L — подгруппы в G такие, что K — нормальная подгруппа в L, и $\omega(L/K) = \omega(G)$. Легко понять, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$. Ввиду [7, теорема] выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = A_n$, где n и $n-4$ — нечетные непростые натуральные числа, и $L \cong A_{n-1}$;

(2) $G = PSp_4(q)$ и $L \cong PSL_2(q^2)\langle t\rangle$, где q четно и t — автоморфизм порядка 2 группы $PSL_2(q^2)$;

(3) $G = PSp_8(q)$ и $L \cong SO_8^-(q)$, где q четно;

(4) $G = P\Omega_8^+(q)$ и $L \cong P\Omega_7(q)$;

(5) $G = PSL_6(2)$ и L — стабилизатор в G подпространства размерности 1 или 5 пространства V;

(6) $G = A_6$ и $L \cong A_5$;

(7) $G = A_{10}$ и $L \cong (S_7 \times S_3) \cap A_{10}$;

(8) $G = PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$ и $L \in \{2^4 : A_5, S_6, S_5\}$;

(9) $G = PSp_6(2)$ и $L \cong S_8$;

(10) $G = PSU_4(3)$ и $L \cong A_7$;

(11) $G = G_2(3)$ и $L \cong PSL_2(13)$;

(12) $G = M_{11}$ и $L \cong PSL_2(11)$;

(13) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ и $L \in \{2^6 : A_8, A_9, S_8\}$.

Если выполняется условие (1), то $\omega(G) \neq \omega(L)$, так как ввиду основного результата [4] конечные простые знакопеременные группы A_n при $n \notin \{6, 10\}$ распознаваемы по спектру.

Пусть выполняется условие (2). Ввиду [14, табл. 8.14] в группе $G = PSp_4(q)$, где q четно, существует максимальная подгруппа L, изоморфная расщепляемому расширению группы $PSL_2(q^2)$ посредством ее группы внешних автоморфизмов порядка 2. Спектры групп $PSp_4(q)$ и $PSL_2(q)$ хорошо известны. Ввиду [1, следствие 3] спектр группы $PSp_4(q)$ при четном q состоит из всех делителей следующих чисел:

$$q^2 + 1, q^2 - 1, 2(q + 1), 2(q - 1), 4.$$

Ввиду [2, следствие 3] спектр группы $PSL_2(q)$ состоит из всех делителей следующих чисел:

$$q + 1, q - 1, 2.$$

При четном q все внешние автоморфизмы порядка 2 группы $PSL_2(q^2)$ сопряжены с ее полевыми автоморфизмами (см., например, [17, теорема 4.9.1]). Доказательство совпадения спектров группы G и ее подгруппы L завершает применение следующей леммы.

Лемма 1 [5, следствие 14]. *Пусть q — степень простого числа, r — натуральное число и τ — полевой автоморфизм порядка r группы $PSL_n(q^r)$. Тогда*

$$\omega(PSL_n(q^r)\langle\tau\rangle) = \bigcup_{k|r} \frac{r}{k}\omega(PSL_n(q^k)).$$

Таким образом, если выполняется условие (2), то $\omega(G) = \omega(L)$.

Пусть выполняется условие (3). Ввиду [14, табл. 8.48] в группе $G = PSp_8(q)$, где q четно, существует максимальная подгруппа $L \cong SO_8^-(q)$. При четном q спектры групп $PSp_8(q)$ и $SO_8^-(q) \cong GO_8^-(q)$ совпадают ввиду [11, теорема 2].

Пусть выполняется одно из условий (4), (6), (10), (11) или (12). Тогда, поскольку G и L являются простыми группами, ввиду [15, теорема 1] имеем $\omega(G) = \omega(L)$, если, и только если $G \cong P\Omega_8^+(2)$ и $L \cong P\Omega_7(2)$ или $G \cong P\Omega_8^+(3)$ и $L \cong P\Omega_7(3)$.

Если выполняется условие (5), то $\omega(G) \neq \omega(L)$ ввиду [19, теорема 1].

Если выполняется условие (7), то $8 \in \omega(A_{10}) \setminus \omega(S_7 \times S_3)$, следовательно, $\omega(G) \neq \omega(L)$.

Если выполняется условие (8), то ввиду [13] имеем $12 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$, следовательно, $\omega(G) \neq \omega(L)$.

Если выполняется одно из условий (9) или (13), то $\omega(G) \neq \omega(L)$ ввиду [3, теорема 1].

Заметим, что во всех случаях совпадения спектров группы G и ее собственной подгруппы L имеем, что $Soc(L)$ — простая группа и либо $L = Soc(L)$, либо $|L : Soc(L)| = 2$. Поэтому $K = 1$.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Пункт (1) в [7, теорема] получен по модулю расширенной бинарной гипотезы Гольдбаха, однако доказательство теоремы 1 не зависит от ее справедливости ввиду распознаваемости по спектру конечных простых знакопеременных групп A_n при $n \notin \{6, 10\}$.

Группу G будем называть *минимальной относительно простого спектра*, если $\pi(G) \neq \pi(H)$ для любой собственной (эквивалентно, для любой максимальной) подгруппы H из G.

Исследование нормального строения групп, минимальных относительно простого спектра, представляет интерес, например, в связи с изучением свойств минимального контрпримера к гипотезе Шумяцкого (см. [10, проблема 17.125] и [8]). В [18] описаны конечные простые группы, минимальные относительно простого спектра, а в [9] для некоторых конечных простых групп, не минимальных относительно простого спектра, исследован вопрос их изоморфизма неабелеву композиционному фактору группы, минимальной относительно простого спектра.

Аналогично определению критической по спектру группы будем называть группу G *критической по простому спектру*, если для любых подгрупп K и L группы G таких, что K — нормальная подгруппа в L, из равенства $\pi(L/K) = \pi(G)$ следует, что $L = G$ и $K = 1$.

Легко видеть, что любая группа, являющаяся критической по простому спектру, будет также критической по спектру и минимальной относительно простого спектра. С другой стороны, исследование групп, критических по простому спектру, можно свести к исследованию групп, минимальных относительно простого спектра, ввиду следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, минимальная относительно простого спектра. Тогда G является группой, критической по простому спектру, если, и только если ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ является холловой подгруппой в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что G — группа, минимальная относительно простого спектра, и ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ является холловой подгруппой в G. Пусть K и L — подгруппы группы G такие, что K — нормальная подгруппа в L и $\pi(L/K) = \pi(G)$. Поскольку $\pi(G) = \pi(L/K) \subseteq \pi(L) \subseteq \pi(G)$ и группа G минимальна относительно простого спектра, имеем $L = G$. Следовательно, подгруппа K нормальна в G и $\pi(K) \subseteq \pi(G/K)$.

Допустим, что $K \neq 1$ и $p \in \pi(K)$. Рассмотрим силовскую p-подгруппу P группы K. Используя лемму Фраттини, получаем $G = KN_G(P)$. Далее, по соответствующей теореме о гомоморфизмах $KN_G(P)/K \cong N_G(P)/N_K(P)$, следовательно,

$$\pi(G) = \pi(G/K) = \pi(KN_G(P)/K) = \pi(N_G(P)/N_K(P)) \subseteq \pi(N_G(P)) \subseteq \pi(G),$$

откуда с учетом минимальности группы G относительно простого спектра получаем, что $G = N_G(P)$. Значит, подгруппа P нормальна в G, и следовательно, ввиду произвольности выбора простого числа $p \in \pi(K)$ заключаем, что подгруппа K нильпотентна, т. е. $K \leq F(G)$.

Пусть K_0 — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в K. Тогда $\pi(G) = \pi(G/K) = \pi(G/K_0)$, поэтому ввиду [12, 8.2 и 8.3] из включения $K_0 \leq F(G)$ следует, что K_0 является элементарной абелевой p_0-группой для некоторого простого числа $p_0 \in \pi(F(G))$.

Докажем, что $K_0 \leq \Phi(G)$. Действительно, если в G существует максимальная подгруппа M, не содержащая K_0, то $G = MK_0$ и подгруппа $M \cap K_0$ нормальна в M, следовательно, по соответствующей теореме о гомоморфизмах $G/K_0 \cong M/(M \cap K_0)$. Значит,

$$\pi(G) = \pi(G/K_0) = \pi(M/(M \cap K_0)) \subseteq \pi(M) \subseteq \pi(G),$$

откуда получаем, что $\pi(M) = \pi(G)$, следовательно, $M = G$. Противоречие. Итак, $K_0 \leq \Phi(G)$.

Пусть $Q \in Syl_{p_0}(G)$. Тогда $Q \leq F(G)$ ввиду холловости $F(G)$ в G. В частности, группа G является p_0-разрешимой. Следовательно, ввиду [16, теорема 6.3.5] множество холловых p_0'-подгрупп группы G непусто. Пусть H — холлова p_0'-подгруппа группы G и M — максимальная подгруппа группы G, содержащая H. Ввиду минимальности группы G относительно простого спектра имеем, что $H = M$. С другой стороны, $K_0 \leq \Phi(G) \leq H$. Противоречие. Значит, $K = 1$, следовательно, G является группой, критической по простому спектру.

Предположим теперь, что $F(G)$ — не холлова подгруппа в G. Пусть p — общий простой делитель чисел $|F(G)|$ и $|G/F(G)|$ и P — силовская p-подгруппа группы $F(G)$. Тогда P — характеристическая подгруппа в $F(G)$. Но подгруппа $F(G)$ нормальна в G, следовательно, подгруппа P нормальна в G. Легко понять, что в этом случае $\pi(G) = \pi(G/P)$, поэтому группа G не является критической по простому спектру.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутурлакин А.А.** Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. труды. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.
2. **Бутурлакин А.А.** Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.
3. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Мазуров В.Д.** О конечных группах, изоспектральных простым симплектическим и ортогональным группам // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1225–1247.

4. **Горшков И.Б.** Распознаваемость знакопеременных групп по спектру // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 57–63.
5. **Заварницин А.В.** Распознавание простых групп $U_3(q)$ по порядкам элементов // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 185–202.
6. **Мазуров В.Д., ШиВ.** Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243.
7. **Маслова Н.В.** О совпадении графов Грюнберга – Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 156–168.
8. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Порождаемость конечной группы с холловыми максимальными подгруппами парой сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 199–206.
9. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О неабелевых композиционных факторах конечной группы, минимальной относительно простого спектра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 155–166.
10. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь / Ин-т математики СО РАН. Изд. 17-е, доп. Новосибирск, 2010. 219 с.
11. **Старолетов А.М.** О распознавании некоторых простых ортогональных групп по спектру // Алгебра и комбинаторика: тез. междунар. конф. по алгебре и комбинаторике, посвящ. 60-летию А.А. Махнева. Екатеринбург: изд-во “УМЦ-УПИ”, 2013. С. 144.
12. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
13. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
14. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
15. **Buturlakin A.A.** Isospectral finite simple groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 111–114.
16. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Chelsea Publishing Company, 1968. 519 p.
17. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, 1998. 419 p. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40.3).
18. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** Transitive subgroups of primitive permutation groups // J. Algebra. 2000. Vol. 234, no. 2. P. 291–361.
19. On recognition of the projective special linear groups over binary fields / M.A. Grechkoseeva, M.S. Lucido, V.D. Mazurov, A.R. Moghaddamfar, A.V. Vasil’ev // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. Т. 2. С. 253–263.

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Поступила 30.07.2014