ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.11+512.5

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ИДЕАЛОВ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР[1]

В. П. Кривоколеско, В. М Левчук

В известных перечислениях характеристических идеалов алгебры $NT(n, K)$ (нижних) нильтреугольных $n \times n$-матриц над полем K и в близких работах для нильпотентных матричных групп и колец случай $|K| = 2$, как правило, исключается из рассмотрения: здесь каждый идеал оказывается характеристическим. Мы находим формулу числа всех идеалов алгебры $NT(n, K)$ над любым конечным полем K.

Ключевые слова: унитреугольная группа, нильтреугольная матрица, нильпотентные матричные кольца, идеалы, комбинаторные перечисления.

V. P. Krivokolesko, V. M. Levchuk. Enumeration of ideals of exceptional nilpotent matrix algebras.

In well-known enumerations of characteristic ideals of the algebra $NT(n, K)$ of all (lower) niltriangular $n \times n$ matrices over a field K and in related papers for nilpotent matrix groups and rings, the case $|K| = 2$ is, as a rule, excluded from consideration; in this case, every ideal is characteristic. We find a formula for the number of all ideals of the algebra $NT(n, K)$ over any finite field K.

Keywords: unitriangular group, niltriangular matrix, nilpotent matrix rings, ideal, combinatorial enumerations.

Введение

Пусть $NT(n, K)$ — кольцо нижних нильтреугольных (т. е. с нулями на главной диагонали и над ней) $n \times n$-матриц над полем K. В 1970-х гг. В. М. Левчук описал его идеалы и идеалы ассоциированного кольца Ли, показав также, что в лиевом случае это, в точности, нормальные подгруппы присоединенной группы кольца $NT(n, K)$, изоморфной унитреугольной группе $UT(n, K)$ [1;2]. В обоих кольцах идеалы, инвариантные относительно подгруппы D диагональных автоморфизмов, при $|K| > 2$ оказались характеристическими идеалами алгебры $NT(n, K)$; последние, как показали еще в 1951 г. Дюбиш и Перлис [3] (наряду с описанием идеалов и автоморфизмов алгебры $NT(n, K)$), при $|K| > 2$ порождаются подалгебрами вида Ke_{ij}. Г. П. Егорычев [4, теорема 2.1.2] указал комбинаторное выражение их числа методами интегрального представления комбинаторных сумм.

Итак, при ограничении $|K| > 2$ на основное поле в [1–4] установлено, что число $1 + \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n-1}$ совпадает с каждым из следующих чисел:

– число D-инвариантных нормальных подгрупп группы $UT(n, K)$;

– число характеристических идеалов алгебры $NT(n, K)$;

– число D-инвариантных идеалов кольца $NT(n, K)$;

– число D-инвариантных идеалов ассоциированного кольца Ли $NT(n, K)$.

В [5–7] перечисления переносились на нильпотентную подалгебру $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле над K, ассоциированной с системой корней Φ (см. [8]), и на унипотентную подгруппу групп лиева типа. Соответствие нормальных подгрупп унипотентной подгруппы и идеалов кольца Ли $N\Phi(K)$ см. в [9].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00968).

В исключительном случае $|K| = 2$ условие D-инвариантности вырождается и в [6, § 5] записаны проблемы 1 и 2 перечисления идеалов лиевых колец и алгебр $N\Phi(K)$ классических типов над любым конечным полем K. Для лиева типа A_n и простого $|K|$ проблемы 1 и 2 равносильны вопросам перечисления идеалов, соответственно, алгебры $NT(n,K)$ и ассоциированной алгебры Ли.

В настоящей статье установлена формула числа идеалов алгебры $NT(n,K)$ $(n \geq 2)$ над произвольным конечным полем $K = GF(q)$. (При $t = 1, 2$ произведение $\prod_{k=2}^{t-1} \cdots$ в формуле считаем равным 1.)

Теорема 1. *Число ненулевых идеалов алгебры $NT(n,K)$ равно*

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{t=1}^{m}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m}\frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}\Big(\frac{q^k-1}{q-1}\Big)^{j_{k+1}-j_k-1}. \tag{0.1}$$

В исключенном в работах [3; 4] случае $|K| = q = 2$ формулу числа идеалов алгебры $NT(n,K)$ получаем как следствие.

Следствие. *Все идеалы алгебры $NT(n,K)$ над полем K порядка 2 являются характеристическими и их число равно*

$$1+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{t=1}^{m}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m}(2^t-1)^{m-j_t}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}(2^k-1)^{j_{k+1}-j_k-1}.$$

1. Характеризация идеалов множеством углов и собственным подпространством

Для описания идеалов в кольцах и алгебрах $NT(n,K)$ над полем K нам потребуются некоторые понятия и определения.

Квадратную матрицу порядка n с единицей на месте (i,j) и нулем на остальных местах обозначают через e_{ij}, называя матричной единицей. Очевидно,

$$e_{uv}e_{ts} = \begin{cases} e_{us} & \text{при} \quad v = t, \\ 0 & \text{в} \quad \text{остальных} \quad \text{случаях}. \end{cases}$$

Аддитивные подгруппы Ke_{ij}, $1 \leq j < i \leq n$, аддитивно порождают кольцо $NT(n,K)$, так как

$$\|a_{uv}\| = \sum_{u=2}^{n}\sum_{v=1}^{u-1} a_{uv}e_{uv} \qquad (\|a_{uv}\| \in NT(n,K)).$$

Полагая $(u,v) \geq (i,j)$, если $1 \leqslant v \leqslant j < i \leqslant u \leqslant n$, получаем частичное упорядочение на множестве матричных позиций. Выделим идеалы

$$T(i,j) := \sum_{(u,v)\geq(i,j)} Ke_{uv}, \quad Q(i,j) := \sum_{(u,v)>(i,j)} Ke_{uv}.$$

Определение 1. Множеством углов степени n называют всякое множество матричных позиций вида

$$L = \{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_m,j_m)\}, \tag{1.2}$$
$$1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m < n, \quad 1 < i_1 < \ldots < i_m \leqslant n, \quad j_t < i_t \quad (1 \leq t \leq m).$$

Множеством углов всякого непустого и ненулевого подмножества $H \subseteq NT(n,K)$ называем множество $L = L(H)$ матричных позиций такое, что

$$H \subseteq T(L) := \sum_{(i,j)\in L} T(i,j),$$

но при любой замене $T(i,j)$ на $Q(i,j)$ в сумме включение нарушается. Ясно, что $L = L(H)$ однозначно представляется в виде (1.2) и является множеством углов степени n. Полагаем также $Q(L) := \sum_{(i,j)\in L} Q(i,j)$. В [6, § 5] введено

О п р е д е л е н и е 2. Аддитивную подгруппу S пространства V_m строк длины m над полем K называем m-собственной (кратко, собственной), если при любом i, $1 \leqslant i \leqslant m$, в S существует элемент с ненулевой i-й координатой.

Пусть H — произвольный ненулевой идеал кольца $NT(n,K)$. Тогда для любого угла (i,j) в H, как и в [2, теорема 2], из включений

$$H \supset Ke_{si}H(Ke_{jt}) + Ke_{si}H + H(Ke_{jt})$$

получаем $Q(i,j) \subset H$. Поэтому $Q(L) \subset H$ и $(H,+)$ есть прямая сумма

$$H = Q(L) + H \cap \sum_{(i,j)\in L(H)} Ke_{ij}.$$

Второе слагаемое (в терминологии [9, § 4] это фрейм для H) однозначно определяет собственную аддитивную подгруппу (подпространство, когда H — идеал алгебры) S в V_m, $m := |L(H)|$ с условием

$$H \cap \sum_{(i,j)\in L(H)} Ke_{ij} = \Big\{ \sum_{t=1}^{m} a_t e_{i_t,j_t} \ \mid \ (a_1,\ldots,a_m) \in S \Big\}.$$

Таким образом, идеал H однозначно записывается в виде

$$H(L,S) = Q(L) + \big\{ a_1 e_{i_1,j_1} + \ldots + a_m e_{i_m,j_m} \ \mid \ (a_1,\ldots,a_m) \in S \big\}. \tag{1.3}$$

Обратно. Любому множеству L из m углов степени n сопоставляем *m-ступенчатую лестницу* в $n \times n$-матрице, обозначаемую также через L:

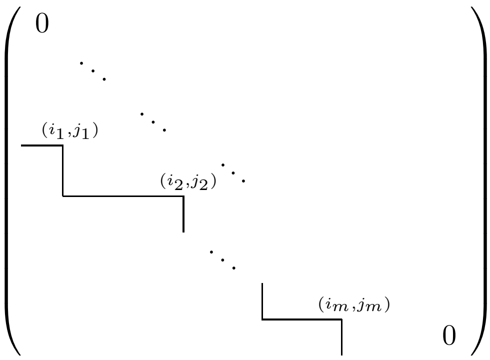

Рисунок.

Выбрав также собственную аддитивную подгруппу S пространства V_m, по формуле (1.3) получаем идеал $H(L,S)$ кольца $NT(n,K)$ (и даже алгебры, когда S — подпространство) с множеством L углов степени n. Все ненулевые элементы матриц из $H(L,S)$ на рисунке лежат на лестнице L или под ней, причем для различных пар (L,S) идеалы $H(L,S)$ различны. Поэтому справедлива (см. также [3, теорема 9; 2, теорема 2])

Теорема 2. *Всякий ненулевой идеал кольца $NT(n,K)$ над полем K однозначно представляется идеалом $H(L,S)$ вида* (1.3) *при подходящем выборе множества L углов степени n и собственной аддитивной подгруппы S в V_m. При этом различным парам (L,S) соответствуют различные идеалы.* □

Когда порядок $|K|$ основного поля K простой, классы идеалов колец и алгебр $NT(n,K)$ (аналогично ассоциированных колец и алгебр Ли), очевидно, совпадают.

2. Доказательство теоремы 1

Произвольное конечное поле $K = GF(q)$ в этом разделе фиксируем.

Отметим, что нулевой идеал алгебры $NT(n,K)$ единственный, у которого нет углов. В силу теоремы 2, для доказательства теоремы 1 достаточно найти число пар (L,S) со множеством L углов степени n и собственным подпространством S в V_m. Из теоремы 2 вытекает

Лемма 1. *Число всех идеалов алгебры $NT(n,K)$ $(n \geq 2)$ равно*

$$1 + \sum_{m=1}^{n-1} B(m,n)\,\tilde{V}_m, \tag{2.4}$$

где $B(m,n)$ — число всех множеств с m углами степени n, $\tilde{V}_m$ — число всех собственных подпространств пространства V_m.

Комбинаторное выражение числа $B(m,n)$ формулой в замкнутом виде

$$B(m,n) = \frac{1}{n}\binom{n}{m+1}\binom{n}{m} \qquad \left(\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\right) \tag{2.5}$$

указал Г. П. Егорычев [4, теорема 2.1.2], используя метод интегрального представления комбинаторных сумм (метод коэффициентов из [4]) и метод перечисления определенных путей в решетке [10].

Обозначая число всех собственных t-мерных подпространств в V_m через $\tilde{V}_{m,t}$, очевидно, имеем

$$\tilde{V}_m = \sum_{t=1}^{m} \tilde{V}_{m,t}. \tag{2.6}$$

Найдем все числа $\tilde{V}_{m,t},\ \ 1 \leq t \leq m$.

Лемма 2. *Число $\tilde{V}_{m,t}$ всех собственных t-мерных подпространств пространства V_m над конечным полем $K = GF(q)$ при $1 \leq t \leq m$ равно*

$$\tilde{V}_{m,t} = \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} \left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}. \tag{2.7}$$

(Формула с $j_1 = 1$ определена также для случаев $t = 1, 2$; здесь произведение $\prod_{k=2}^{t-1}\cdots$ равно 1 и его можно опустить.)

Доказательство. Ясно, что $\tilde{V}_{m,m} = \tilde{V}_1 = 1$ $(m \geq 1)$. Произвольное одномерное собственное подпространство в V_m записывается в виде $K\alpha$, где α — вектор из V_m, все координаты которого ненулевые. Это позволяет выбрать α с единичной первой координатой. Каждая из оставшихся $m-1$ координат в α может принимать любое из $q-1$ ненулевых значений в поле $K = GF(q)$, причем таким выборам α соответствуют различные собственные подпространства в V_m. Таким образом,

$$\tilde{V}_{m,1} = (q-1)^{m-1}\ (m \geq 1).$$

Базу $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ произвольного t-мерного собственного подпространства S в V_m строим следующим образом.

Вектор α_1 выбираем в S с ненулевой первой координатой, более того, ее можем считать единичной. Остальные базисные векторы выбираем в подпространстве S_1 векторов из S с нулевой первой координатой.

Пусть $j_1 = 1$ и j_2 — наименьший номер ненулевой координаты для векторов из S_1. Тогда вектор α_2 можно выбрать в S_1 с единичной j_2-й координатой. Остальные базисные векторы

$\alpha_3, \cdots, \alpha_t$ выбираем в подпространстве S_2 векторов из S_1, у которых координаты с номерами $\le j_2$ нулевые. Продолжая аналогично процесс построения, находим базу в S и целые числа

$$j_1 = 1 < j_2 < \cdots < j_t \le m$$

такие, что j_k-я координата вектора α_k при любом k единична, а его координаты с номерами $< j_k$ или j_l с $l \neq k$ нулевые.

Легко видеть, что в S такая "каноническая" база единственна и имеет вид

$$\alpha_1 = (1, a_2^1, \ldots, a_{j_2-1}^1, 0, a_{j_2+1}^1, \ldots, a_{j_t-1}^1, 0, a_{j_t+1}^1, \ldots, a_m^1),$$

$$\alpha_2 = (0, \ldots, 0, 1, a_{j_2+1}^2, \ldots, a_{j_3-1}^2, 0, a_{j_3+1}^2, \ldots, a_{j_t-1}^2, 0, a_{j_t+1}^2, \ldots, a_m^2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_t = (0, \ldots, 0, 1, a_{j_t+1}^t, \ldots, a_{m-1}^t, a_m^t).$$

Каждый из $j_2 - 2$ коэффициентов $a_2^1, a_3^1, \ldots, a_{j_2-1}^1$ вектора α_1, очевидно, может принимать независимо любое из $q-1$ значений в $K \setminus \{0\}$. В то же время каждая из $j_3 - j_2 - 1$ пар $(a_i^1,\, a_i^2)$ при $j_2 < i < j_3$ может принимать независимо любое из $q^2 - 1$ значений в декартовом квадрате $(K \times K)$, кроме нулевого $(0,0)$ (иначе подпространство S не будет собственным). Значение любой тройки (a_i^1, a_i^2, a_i^3) при $i = j_3+1, \ldots, j_4-1$ может быть любым из $(K \times K \times K) \setminus \{(0,0,0)\}$, т. е. имеем всего $(q^3-1)^{j_4-j_3-1}$ возможных способов.

Аналогично для базисных векторов устанавливаем возможные значения всех координат с номерами $\le j_t$.

Наконец, при каждом $i,\ j_t < i \le m$, значение набора $(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^t)$ может быть любым из t-й декартовой степени K^t, исключая нулевое, так что здесь получаем всего $(q^t-1)^{m-j_t}$ способов.

Таким образом, число собственных t-мерных подпространств в V_m определяем как

$$\tilde{V}_{m,t} = \sum_{j_1=1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \Bigl(\prod_{k=1}^{t-1} (q^k-1)^{j_{k+1}-j_k-1}\Bigr) \cdot (q^t-1)^{m-j_t}$$

$$= (q-1)^{m-t} \cdot \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \Bigl(\frac{q^t-1}{q-1}\Bigr)^{m-j_t} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} \Bigl(\frac{q^k-1}{q-1}\Bigr)^{j_{k+1}-j_k-1}$$

$$= \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} \Bigl(\frac{q^k-1}{q-1}\Bigr)^{j_{k+1}-j_k-1}.$$

Это завершает доказательство формулы (2.7) леммы 2.

Теперь мы можем найти число

$$\Lambda(n,q) := \sum_{m=1}^{n-1} B(m,n)\, \tilde{V}_m$$

ненулевых идеалов алгебры $NT(n,K)$ над полем $K = GF(q)$ и завершить доказательство теоремы 1.

Ясно, что $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{m,m} = 1 \ \ (m \ge 1)$. По лемме 2 получаем

$$\tilde{V}_{m,2} = (q-1)^{m-2} \sum_{k=0}^{m-2} (q+1)^k = (q-1)^{m-2} \frac{(q+1)^{m-1}-1}{q} \qquad (m \ge 2).$$

Учитывая также выписанное выше число $\tilde{V}_{m,1}$, легко находим числа $\Lambda(n,q)$ для малых n:

$$\Lambda(2,q) = 1, \qquad \Lambda(3,q) = B(1,3)\tilde{V}_1 + B(2,3)\tilde{V}_2 = 3 + q = q + 3,$$

$$\Lambda(4,q) = B(1,4)\tilde{V}_1 + B(2,4)\tilde{V}_2 + B(3,4)\tilde{V}_3 = 2q^2 + 5q + 6.$$

Числа $\Lambda(n,q)$ для случаев $n = 5, 6$ и 7 находим аналогично. Итоги вычислений приведены в следующей таблице.

Значения $\Lambda(n,q)$ для малых n

n	$\Lambda(n,q)$
2	1
3	$q+3$
4	$2q^2+5q+6$
5	$q^4+3q^3+16q^2+11q+10$
6	$2q^6+2q^5+16q^4+36q^3+46q^2+14q+15$
7	$q^9+3q^8+4q^7+37q^6+39q^5+16q^4+144q^3+48q^2+15q+21$

В общем случае формулы (2.4)–(2.7) позволяют записать число $\Lambda(n,q)$ в виде

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{t=1}^{m}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m}\frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}(\frac{q^k-1}{q-1})^{j_{k+1}-j_k-1},$$

и поэтому это число совпадает с (0.1). Тем самым, доказательство теоремы 1 завершается. □

Следствие из нее получаем упрощением формулы в исключительном случае $q = 2$.

З а м е ч а н и е. Наряду с представлением числа $\Lambda(n,q)$ в виде (0.1) естественно возникает вопрос о получении для $\Lambda(n,q)$ рекуррентных соотношений в виде формулы в замкнутом виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Левчук В. М.** Подгруппы унитреугольной группы // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1974. Т. 38. С. 1202–1220.
2. **Левчук В. М.** Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 5. С. 558–578.
3. **Dubish R. and Perlis S.** On total nilpotent algebras // Amer. J. Math. 1951. Vol. 73, no. 2. P. 439–452.
4. **Егорычев Г.П.** Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977. 271 с.
5. **Egorychev G.P., Levchuk V.M.** Enumeration of characteristic subgroups of unipotent Lie-type groups // Algebra: Proc. of the III Intern. Conf. Berlin; New-York: Walter de Gruyter, 1996. P. 68–79.
6. **Egorychev G.P., Levchuk V.M.** Enumeration in the Chevalley algebras // ACM SIGSAM Bull. 2001. Vol. 35, no. 2. P. 20–34.
7. **Egorychev G.P., Kuzucuoglu F., Levchuk V.M.** Enumeration of ideals of some nilpotent matrix rings // J. Algebra and Its Applications, 2013. Vol. 12, no. 1. C. 1250140-1–1250140-11.
8. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: J. Wiley, 1972. 331 p.
9. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. Vol. 349. C. 98–116.
10. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967. 499 с.

Левчук Владимир Михайлович
д-р физ.- мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Сибирский федеральный университет
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

Поступила 30.11.2014

Кривоколеско Вячеслав Павлович
канд. физ.- мат. наук, доцент
Сибирский федеральный университет
e-mail: krivokolesko@gmail.com