ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.983.23

СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ В ОПЕРАТОРНЫЕ ЛИНЕЙНОГО ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

В работе изучаются классы функций линейного инъективного оператора, построенных на базе соответствующих скалярных функций, аналитических в областях, лежащих вне некоторого угла Δ с вершиной в нуле, содержащего отрицательную вещественную полуось; функции имеют степенные оценки модуля в бесконечности и, возможно, в нуле. Предполагается, что регулярное множество оператора содержит угол с вершиной в нуле, лежащий в Δ и включающий отрицательную вещественную полуось, причем известна асимптотическая оценка нормы резольвенты в нуле и бесконечности. Данная работа продолжает исследования авторов свойств функций оператора соответствующих классов. В предположении ограниченности обратного оператора предлагается новое достаточное условие равенства, связанного с возведением степени оператора в степень.

Ключевые слова: линейный замкнутый оператор, функции от оператора, мультипликативное свойство, обратимость.

L. F. Korkina, M. A. Rekant. Properties of mappings of scalar functions to operator functions of a linear closed operator.

We study classes of functions of a linear injective operator constructed on the basis of corresponding scalar functions that are analytic in domains lying outside some angle Δ with vertex at zero containing the negative real semiaxis. The functions have power estimates for the modulus at infinity and, possibly, at zero. It is assumed that the regular set of the operator contains an angle with vertex at zero lying in Δ and containing the negative real semiaxis and that an asymptotic estimate for the norm of the resolvent is known at zero and infinity. This paper continues the authors' studies of the properties of operator functions from relevant classes. Under the assumption of boundedness of the inverse operator, we propose a new sufficient condition for an equality related to raising a power of an operator to a power.

Keywords: linear closed operator, functions of an operator, multiplicative property, invertibility.

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — линейный оператор, действующий в X. При определенных ограничениях на оператор A разными авторами вводились и исследовались операторные функции по заданным скалярным функциям (см., например, [1–8]). В частности, изучались комплексные степени оператора и их свойства, вопросы, связанные с возведением степени оператора в степень.

Пусть A — линейный инъективный оператор с плотной в X областью определения $D(A)$ и множеством значений $\mathrm{Im}A \subset X$; известна оценка нормы резольвенты $R(\lambda)$ оператора A в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей отрицательную вещественную полуось. В [9] введен класс операторных функций в случае ограниченности оператора A^{-1}, а в [10] — два таких класса без предположения ограниченности оператора A^{-1}. Все они строятся на базе соответствующих классов скалярных функций. В [9; 10] изучались свойства введенных операторных функций, при этом в [10] рассматривались связи между этими определениями. В данной работе вводится еще один класс операторных функций в случае ограниченности A^{-1}. Продолжены исследования свойств функций этих классов и связей между ними как в случае ограниченного, так и в случае неограниченного оператора A^{-1}. В предположении ограниченности A^{-1} предлагается новое достаточное условие (в частности, при более общих ограничениях на асимптотическую оценку нормы резольвенты в бесконечности) равенства $(A^x)^\beta = A^{x\beta}$ при соответствующих определениях степени оператора. Это равенство при различных предположениях получено в работах ряда авторов (см., например, [5–7]).

Переходим к изложению результатов работы.

Пусть $\Delta(\varphi)$ $(0 < \varphi < \pi)$ — область в $\mathbb{C}$, содержащая отрицательную вещественную полуось с границей $L(\varphi) = L_1(\varphi) \cup L_2(\varphi)$, где $L_1(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = te^{i\varphi}, t \geqslant 0\}$, $L_2(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = te^{-i\varphi}, t \geqslant 0\}$. Обход контура $L(\varphi)$ задается так, что область $\Delta(\varphi)$ остается справа.

Предположение 1. *Будем считать, что в резольвентном множестве* $\overline{\rho(A)}$ *плотно определенного в* X *линейного инъективного оператора* A *лежит множество* $\overline{\Delta(\varphi_0)} \setminus \{0\}$ *при некотором* $\varphi_0 \in (0, \pi)$ *и на нем справедлива оценка нормы его резольвенты* $R(\lambda) = R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ (E *— единичный оператор*):

$$\forall \lambda \in \overline{\triangle(\varphi_0)} \setminus \{0\} \quad \|R(\lambda)\| \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|^{\rho}(|\lambda| + 1)^{\gamma-\rho}} \quad (C_0 > 0, \rho \geqslant 0, \gamma \leqslant 1). \tag{1}$$

Заметим, что при $\rho = 0$ (случай непрерывности оператора A^{-1}) и $\gamma = 1$ в предположении справедливости неравенства из (1) на $(-\infty, 0]$ (следовательно, внутри некоторого угла, содержащего $(-\infty, 0]$) дробные степени оператора изучались в работах многих математиков (см., например, [3–6]. При $\rho = 0$, $0 < \gamma < 1$ степени оператора изучались, например, в работах [7; 11], а при $\rho = 0$ и произвольном $\gamma \leq 1$ — в [12]. При $\rho = \gamma = 1$ степени оператора строятся, например, в [5; 6]. При $\rho \geq 1$, $\gamma = 1$ степени оператора изучались в [13].

Для $\varphi \in (\varphi_0, \pi), \tau, \sigma \in \mathbb{R}$ через $F(\varphi, \tau, \sigma)$ обозначим множество функций f, аналитических в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta(\varphi)}$, причем при некотором $C = C(f) \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda \notin \overline{\Delta(\varphi)}$ имеет место неравенство

$$|f(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{\tau}(|\lambda| + 1)^{\sigma-\tau}.$$

Через $\mathcal{F}$ обозначим объединение всех таких классов $F(\varphi, \tau, \sigma)$.

С помощью скалярной функции $g(\lambda; m, n, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)^m \lambda^{-n}$ и операторной функции $g(A; m, n, \lambda_0) = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n}$ для $f \in F(\varphi, \tau, \sigma)$ в [10] введены операторные функции

$$f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda) d\lambda,$$

$$\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda) d\lambda \; g(A; m, n, \lambda_0).$$

Здесь

$$\lambda_0 \in \Delta(\varphi_0), \quad m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad m \geqslant n, \quad \rho - \tau - n < 1, \quad \gamma - \sigma + m - n > 1. \tag{2}$$

В [10] установлено, что $\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) \subset f(A; m, n, \lambda_0)$, оператор $f(A; m, n, \lambda_0)$ замкнут, не зависит от m, n и λ_0, удовлетворяющих (2). Такими же свойствами обладает оператор $\overline{\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)}$ (замыкание оператора $\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)$) при условии, что $\overline{\mathrm{Im} A} = X$. В этих предположениях в [10] определены операторы $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$ формулами

$$f(A) = f(A; m, n, \lambda_0), \quad \widetilde{f}(A) = \overline{\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)},$$

установлен ряд их свойств и соотношение

$$\widetilde{f}(A) \subset f(A). \tag{3}$$

В дальнейшем (до теоремы 13) считается выполненным

Предположение 2. *Оператор* A^{-1} *непрерывен на* X*, причем*

$$\forall \lambda \in \overline{\Omega(a_0, \varphi_0)} \quad \|R(\lambda)\| \leqslant \frac{C_0}{(|\lambda| + 1)^{\gamma}} \quad (C_0 > 0, \gamma \leqslant 1), \tag{4}$$

где $\Omega(a_0,\varphi_0)=\Delta(\varphi_0)\cup B(0,a_0)$ $(B(0,a_0)$ *— открытый круг в* $\mathbb{C}$ *с центром в точке* 0 *радиуса* $a_0>0)$ *с границей* $\Gamma(a_0,\varphi_0)$*, которая обходится так, что* $\Omega(a_0,\varphi_0)$ *остается справа (заметим, что из* (4) *следует* (1) *при любом* $\rho\geqslant 0)$.

Для $\varphi\in(\varphi_0,\pi)$, $a\in(0,a_0)$, $\sigma\in\mathbb{R}$ через $F_0(a,\varphi,\sigma)$ обозначим множество функций f, аналитических в $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega(a,\varphi)}$, удовлетворяющих при $\lambda\notin\overline{\Omega(a,\varphi)}$ неравенству $|f(\lambda)|\leqslant C|\lambda|^{\sigma}\quad(C\in\mathbb{R})$. Через $\mathcal{F}_0$ обозначим объединение всех таких классов.

Для $f\in F_0(a,\varphi,\sigma)$ в [9] введена операторная функция

$$\widehat{f}(A,m)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-m}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda\ A^m$$

при

$$m>\sigma-\gamma+1\quad(m\in\mathbb{N}\cup\{0\}).\tag{5}$$

Там доказано, что существует не зависящее от m замыкание $\widehat{f}(A)=\overline{\widehat{f}(A,m)}$.

Определим для $f\in F_0(a,\varphi,\sigma)$ при условии (5) операторную функцию

$$\overleftarrow{f}(A;m)=-\frac{1}{2\pi i}A^m\int_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-m}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda.\tag{6}$$

В силу сделанных предположений интеграл в (6) сходится абсолютно к непрерывному оператору, т. е. $\overleftarrow{f}(A;m)$ — замкнутый оператор.

Лемма 1. *Пусть выполнено* (4) *и* $f\in F_0(a,\varphi,\sigma)$. *Тогда* $\overleftarrow{f}(A;m)$ *не зависит от*

$$m>\sigma-\gamma+1.$$

Доказательство. Имеем

$$\overleftarrow{f}(A;m+1)=-\frac{1}{2\pi i}A^m\cdot A\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-m-1}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}A^m\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-m-1}f(\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi i}A^m\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-m}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda=\overleftarrow{f}(A;m),$$

так как $\displaystyle\int_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-m-1}f(\lambda)d\lambda=0$ (см. [9]). Лемма доказана.

Лемма 1 позволяет для $f\in F_0(a,\varphi,\sigma)$ при выполнении (5) определить операторную функцию $\overleftarrow{f}(A)$ формулой

$$\overleftarrow{f}(A)=\overleftarrow{f}(A;m).\tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено* (4) *и* $f\in\mathcal{F}_0$. *Тогда*

$$\widehat{f}(A)\subset\overleftarrow{f}(A).\tag{8}$$

Доказательство проводится так же, как и доказательство соотношения (3).

Следствие 1. *Операторы* $\widehat{f}(A)$, $\overleftarrow{f}(A)$ *плотно определены.*

Здесь учтено, что при достаточно большом m $D(\widehat{f}(A))\supset D(\widehat{f}(A;m))=D(A^m)$ — плотное множество в X [5].

Следствие 2. *Если* $\widehat{f}(A)$ *или* $\overleftarrow{f}(A)$ *— непрерывный оператор, то в соотношении* (8) *из леммы* 2 *имеет место равенство.*

Замечание 1. Если $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$ с $\sigma < \gamma - 1$, то согласно [9] $\widehat{f}(A)$, а потому и $\overleftarrow{f}(A)$, — непрерывные операторы на X.

Теорема 1. *Пусть выполнено* (4) *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_0$. *Тогда*

$$\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A)\cdots\overleftarrow{f}_n(A) \subset (\overleftarrow{f_1f_2\cdots f_n})(A). \tag{9}$$

$$\overline{\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A)\cdots\widehat{f}_n(A)} \supset (\widehat{f_1f_2\cdots f_n})(A). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $f_j \in F_0(a_j,\varphi_j,\sigma_j)$,

$$m_j \in \mathbb{N}, \quad m_j > \sigma_j - \gamma + 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{11}$$

Возьмем $a = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} a_j$, $\varphi = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \varphi_j$. Тогда $f_j \in F_0(a,\varphi,\sigma_j)$ и согласно [9, утверждение 2]

$$(\widehat{f_1f_2\cdots f_n})(A; m_1+m_2+\cdots+m_n) \subset \widehat{f}_1(A,m_1)\widehat{f}_2(A,m_2)\cdots\widehat{f}_n(A,m_n)$$

(в [9] это включение установлено для $n = 2$ и на случай n сомножителей распространяется по индукции). Из этого включения следует (10).

Установим теперь (9) при $n = 2$.

$$\begin{gathered}\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A) = \overleftarrow{f}_1(A;m_1)\overleftarrow{f}_2(A;m_2)\\ = \Big(-\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 A^{m_1}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m_1}f_1(\lambda)R(\lambda)d\lambda\; A^{m_2}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m_2}f_2(\lambda)R(\lambda)d\lambda\\ \subset A^{m_1}A^{m_2}(\widehat{\lambda^{-m_1}f_1})(A;0)(\widehat{\lambda^{-m_2}f_2})(A;0).\end{gathered} \tag{12}$$

Поскольку

$$(\widehat{\lambda^{-m_1}f_1})(A;0)(\widehat{\lambda^{-m_2}f_2})(A;0) \supset (\widehat{\lambda^{-m_1-m_2}f_1f_2})(A;0) \tag{13}$$

и в силу (11) операторы в (13) непрерывны, то в (13) имеет место равенство. Поэтому

$$\begin{gathered}\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A) \subset A^{m_1+m_2}(\widehat{\lambda^{-(m_1+m_2)}f_1f_2})(A;0)\\ = -\frac{1}{2\pi i}A^{m_1+m_2}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-(m_1+m_2)}f_1(\lambda)f_2(\lambda)R(\lambda)d\lambda = \overleftarrow{(f_1f_2)}(A;m_1+m_2) = \overleftarrow{(f_1f_2)}(A),\end{gathered}$$

т. е. имеет место (9) при $n = 2$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ (9) устанавливается по индукции. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнено* (4) *и* $f, 1/f \in \mathcal{F}_0$. *Тогда существует оператор* $(\overleftarrow{f}(A))^{-1}$, *причем*

$$(\overleftarrow{f}(A))^{-1} = \overleftarrow{(1/f)}(A). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $x \in D(\overleftarrow{(1/f)}(A))$. Тогда для $m \in \mathbb{N}$, достаточно больших, используя последовательно (7), теорему 1 и представление целой степени оператора из [11], получаем

$$\begin{gathered}-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda\; A^m\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m}\frac{1}{f(\lambda)}R(\lambda)d\lambda x\\ = -\frac{1}{4\pi^2}A^m\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m}\frac{1}{f(\lambda)}R(\lambda)d\lambda x\\ = -\frac{1}{2\pi i}A^m\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-2m}R(\lambda)d\lambda x = A^mA^{-2m}x = A^{-m}x \in D(A^m).\end{gathered}$$

Поэтому $(\overleftarrow{1/f})(A)x \in D(\overleftarrow{f}(A))$ и $\overleftarrow{f}(A)(\overleftarrow{1/f})(A)x = x$. Аналогично для $x \in D(\overleftarrow{f}(A))$ $\overleftarrow{f}(A)x \in D((\overleftarrow{1/f})(A))$ и $(\overleftarrow{1/f})(A)\overleftarrow{f}(A)x = x$. Теорема доказана.

Замечание. 2. В предположениях теоремы 2 равенство

$$(\widehat{f}(A))^{-1} = \widehat{(1/f)}(A) \tag{15}$$

доказано в [9].

Теорема 3. *Пусть выполнено* (4) *и* $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_0$. *Если* $1/f_1 \in \mathcal{F}_0$ *и оператор* $(\overleftarrow{f}_1(A))^{-1}$ *непрерывен или оператор* $\overleftarrow{f}_2(A)$ *непрерывен, то*

$$(\overleftarrow{f_1 f_2})(A) = \overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A). \tag{16}$$

Если оператор $\widehat{f}_1(A)$ *непрерывен или* $1/f_2 \in \mathcal{F}_0$ *и* $(\widehat{f}_2(A))^{-1}$ — *непрерывный оператор, то*

$$(\widehat{f_1 f_2})(A) = \overline{\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A)}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $1/f_1 \in \mathcal{F}_0$ и $(\overleftarrow{f}_1(A))^{-1}$ — непрерывный оператор. Используя теоремы 1 и 2, имеем $\overleftarrow{f}_2(A) = (\overleftarrow{f_1^{-1} f_1 f_2})(A) \supset (\overleftarrow{1/f_1})(A)(\overleftarrow{f_1 f_2})(A) = (\overleftarrow{f}_1(A))^{-1}(\overleftarrow{f_1 f_2})(A)$. Поэтому

$$\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A) \supset \overleftarrow{f}_1(A)(\overleftarrow{f}_1(A))^{-1}(\overleftarrow{f_1 f_2})(A) = (\overleftarrow{f_1 f_2})(A),$$

т. е. с учетом (9) получаем (16).

Пусть теперь $\overleftarrow{f}_2(A)$ — непрерывный оператор. Если в последнем из соотношений (12) исключить в обеих частях оператор A^{m_1}, то имеющее место и в этом случае включение является равенством, так как слева будет стоять непрерывный на X оператор. Поэтому и в (12) включение в действительности есть равенство, т. е. имеет место (16).

Предположим теперь, что оператор $\widehat{f}_1(A)$ непрерывен. Тогда согласно [9]

$$\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A) \subset (\widehat{f_1 f_2})(A). \tag{18}$$

Из (10) и (18) следует (17).

Рассмотрим теперь случай, когда $1/f_2 \in \mathcal{F}_0$ и оператор $(\widehat{f}_2(A))^{-1}$ непрерывен. По теоремам 1 и 2 $\widehat{f}_1(A) = (\widehat{f_1 f_2 f_2^{-1}})(A) \subset (\widehat{f_1 f_2})(A)\widehat{(1/f_2)}(A) = (\widehat{f_1 f_2})(A)(\widehat{f}_2(A))^{-1}$. Отсюда

$$\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A) \subset (\widehat{f_1 f_2})(A)\widehat{(1/f_2)}(A)\widehat{f}_2(A) = (\widehat{f_1 f_2})(A)|_{D(\widehat{f}_2(A))} \subset (\widehat{f_1 f_2})(A),$$

поэтому с учетом (10) получаем (17). Теорема доказана.

Замечание 3. Без предположения непрерывности $\widehat{f}_1(A)$ или $(\widehat{f}_2(A)^{-1}$ равенство (17) устанавливалось в [9]. Однако при его доказательстве была допущена ошибка.

Лемма 3. *Пусть выполнено* (4) *и* P_1, P_2 — *многочлены,* $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant \deg P_1$. *Тогда*

$$\overline{[P_1(A) + P_2(A^{-1})]|_{D(A^p)}} = P_1(A) + P_2(A^{-1}). \tag{19}$$

Доказательство. Так как $P_1(A)$ — замкнутый оператор [1, с. 642], а $P_2(A^{-1})$ — непрерывный (поскольку A^{-1} непрерывен), то оператор $P_1(A) + P_2(A^{-1})$ замкнут. Поэтому достаточно доказать, что

$$P_1(A) + P_2(A^{-1}) \subset \overline{[P_1(A) + P_2(A^{-1})]|_{D(A^p)}}. \tag{20}$$

Пусть $x \in D(P_1(A))$ и $[P_1(A)+P_2(A^{-1})]x = y$, т. е. $P_1(A)x = y - P_2(A^{-1})x$. Обозначим через z вектор $y - P_2(A^{-1})x$. Так как $\overline{P_1(A)|_{D(A^p)}} = P_1(A)$ [10], то существует такая последовательность $\{x_n\} \subset D(A^p)$, что $x_n \to x$, $P_1(A)x_n \to z$ при $n \to \infty$. Тогда $[P_1(A) + P_2(A^{-1})]x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z + P_2(A^{-1})x = y$, т. е. имеет место (20), а следовательно, (19). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть операторы* B, C_1, C_2 *действуют в* X, *причем* B *линеен,* $D(BC_1) = X$. *Тогда* $B(C_1 + C_2) = BC_1 + BC_2$.

Доказательство леммы опускаем ввиду его простоты.

Лемма 5. *Пусть* $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant l$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ $(j = k, \ldots, l)$, $\alpha_l \neq 0$ *и выполнено* (4). *Тогда*

$$A^p \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-p} = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j.$$

Доказательство сводится к рассмотрению нескольких случаев.

1. $l \leqslant 0$. Доказываемое равенство верно, так как оператор в его правой части непрерывен на X и содержится в операторе слева.

2. $p \leqslant l$. Доказательство ведем индукцией по p. При $p = 0$ равенство верно. Предположим, что оно верно для $p - 1$ $(p \geqslant 1)$. Тогда с учетом леммы 4

$$A^p \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-p} = A^{p-1} A\Big(\sum_{j=k}^{p-1} \alpha_j A^{j-p} + \sum_{j=p}^{l} \alpha_j A^{j-p}\Big)$$
$$= A^{p-1}\Big(\sum_{j=k}^{p-1} \alpha_j A^{j-(p-1)} + \sum_{j=p}^{l} \alpha_j A^{j-(p-1)}\Big) = A^{p-1} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-(p-1)} = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j.$$

3. $p > l > 0$. В этом случае

$$A^p \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-p} = A^l A^{p-l} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{(j-l)-(p-l)} = A^l A^{p-l} \sum_{j'=k-l}^{0} \alpha_{j'+l} A^{j'-(p-l)}$$
$$= A^l \sum_{j'=k-l}^{0} \alpha_{j'+l} A^{j'} = A^l \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-l} = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j$$

(здесь используется справедливость доказываемого равенства в первом (при $l = 0$) и во втором (при $p = l$) случаях).

4. $k < 0 < l$. Так как $A^p \sum_{j=k}^{-1} \alpha_j A^{j-p} = \sum_{j=k}^{-1} \alpha_j A^j$ (по первому случаю) — непрерывный на X оператор, $A^p \sum_{j=0}^{l} \alpha_j A^{j-p} = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j A^j$ (по второму и третьему случаям), то по лемме 4

$$A^p \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-p} = A^p\Big(\sum_{j=k}^{-1} \alpha_j A^{j-p} + \sum_{j=0}^{l} \alpha_j A^{j-p}\Big) = \sum_{j=k}^{-1} \alpha_j A^j + \sum_{j=0}^{l} \alpha_j A^j = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant l$, $f(\lambda) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j \lambda^j$ $(\alpha_j \in \mathbb{C}, \alpha_k, \alpha_l \neq 0)$ *и выполнено* (4). *Тогда*

$$\widehat{f}(A) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j = \overleftarrow{f}(A).$$

Доказательство. Так как $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j$ — сумма многочлена от A и непрерывного оператора (здесь учтено, что оператор A^{-1} непрерывен на X), то для достаточно больших $p \in \mathbb{N}$ с учетом леммы 3

$$\sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j = \overline{\sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j|_{D(A^p)}} = \overline{\sum_{j=k}^{l} \frac{-1}{2\pi i} \alpha_j \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{j-p} R(\lambda) d\lambda \; A^p}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-p} f(\lambda) R(\lambda) d\lambda \; A^p} = \widehat{f}(A).$$

С другой стороны, для тех же p по лемме 5

$$\sum_{j=k}^{l}\alpha_j A^j = A^p\sum_{j=k}^{l}\alpha_j A^{j-p} = -\frac{1}{2\pi i}A^p\sum_{j=k}^{l}\alpha_j\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{j-p}R(\lambda)d\lambda$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}A^p\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-p}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda = \overleftarrow{f}(A).$$

Теорема доказана.

Следствие 3. $\widehat{g}(A;m,n,\lambda_0) = g(A;m,n,\lambda_0) = \overleftarrow{g}(A;m,n,\lambda_0)$.

Теорема 5. *Пусть выполнено* (4) *и* $f \in \mathcal{F}$. *Тогда*

$$\widehat{f}(A) = \widetilde{f}(A), \tag{21}$$

$$\overleftarrow{f}(A) = f(A). \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $f \in F(\varphi,\tau,\sigma)$, числа λ_0, m, n удовлетворяют (2). Поскольку

$$\int\limits_{\partial(B(0,a_0)\setminus\Delta(\varphi_0))}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}R(\lambda)d\lambda = 0,$$

то

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}R(\lambda)d\lambda\ g(A;m,n,\lambda_0)}.$$

Поэтому по следствиям леммы 1 из [10] и теоремы 4 для достаточно больших $p \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{4\pi^2}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}R(\lambda)d\lambda\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}g(\lambda;m,n,\lambda_0)\lambda^{-p}R(\lambda)d\lambda\ A^p}.$$

На основании утверждения 3 из [9] выводим

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}f(\lambda)\lambda^{-p}R(\lambda)d\lambda\ A^p} = \widehat{f}(A).$$

Аналогично при достаточно больших $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}g(A;m,n,\lambda_0)\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\frac{f(\lambda)R(\lambda)d\lambda}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2}A^p\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-p}g(\lambda;m,n,\lambda_0)R(\lambda)d\lambda\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\frac{f(\lambda)R(\lambda)d\lambda}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}A^p\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-p}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda = \overleftarrow{f}(A).$$

Теорема доказана.

Следствие 4. *Если* $f(\lambda) = \sum_{j=k}^{l}\alpha_j\lambda^j$ $(k,l \in \mathbb{Z},\ k \leqslant l,\ \alpha_j \in \mathbb{C},\ \alpha_k,\ \alpha_l \neq 0)$, *то*

$$f(A) = \overleftarrow{f}(A) = \widehat{f}(A) = \widetilde{f}(A) = \sum_{j=k}^{l}\alpha_j A^j.$$

Замечание 4. Равенства (21), (22) справедливы, если $f(\lambda) = \lambda^z$ $(z \in \mathbb{C})$, где $\lambda^z = e^{z \ln \lambda}$ при $|\arg \lambda| < \pi$.

Лемма 6. *Пусть B, C — действующие в X допускающие замыкание линейные операторы с $D(B) \subset D(C)$, $\bar{C}$ — непрерывный на X оператор. Тогда оператор $B + C$ имеет замыкание и $\overline{B + C} = \bar{B} + \bar{C}$.*

Доказательство. Так как $B+C \subset \bar{B}+\bar{C}$, то нужно установить, что $\bar{B}+\bar{C} \subset \overline{B + C}$. Пусть $x \in D(\bar{B} + \bar{C})$. Тогда $x \in D(\bar{B})$. Возьмем такую последовательность $\{x_n\} \subset D(B)$, что $x_n \to x$, $Bx_n \to \bar{B}x$. При этом $(B + C)x_n = Bx_n + \bar{C}x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{B}x + \bar{C}x = (\bar{B} + \bar{C})x$. Поэтому $x \in D(\overline{B + C})$ и $\overline{B + C}x = \bar{B}x + \bar{C}x$. Лемма доказана.

Теорема 6. *Если выполнено (4) и $f, h \in \mathcal{F}_0$, $\overleftarrow{h}(A)$ — непрерывный оператор, то*

$$\overleftarrow{f}(A) + \overleftarrow{h}(A) = (\overleftarrow{f + h})(A), \quad \widehat{f}(A) + \widehat{h}(A) = (\widehat{f + h})(A).$$

Если $f, h \in \mathcal{F}$ (ограниченность A^{-1} не предполагается) и $h(A)$ — непрерывный оператор, то

$$f(A) + h(A) = (f + h)(A), \quad \widetilde{f}(A) + \widetilde{h}(A) = (\widetilde{f + h})(A).$$

Доказательство. Пусть $f, h \in \mathcal{F}_0$, оператор $\overleftarrow{h}(A)$ (а следовательно, и $\widehat{h}(A)$) непрерывен. Тогда при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ по лемме 4 получаем

$$\overleftarrow{f}(A) + \overleftarrow{h}(A) = -\frac{1}{2\pi i} A^n \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \mu^{-n}(f(\mu) + h(\mu))R(\mu)d\mu = (\overleftarrow{f + h})(A),$$

а по лемме 6

$$\widehat{f}(A) + \widehat{h}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \mu^{-n}[f(\mu) + h(\mu)]R(\mu)d\mu A^n} = (\widehat{f + h})(A).$$

Аналогично рассматривается случай $f, h \in \mathcal{F}$. Теорема доказана.

Пусть $f(\lambda) = \lambda^z = e^{z \ln \lambda}$ $(|\arg \lambda| < \pi, z \in \mathbb{C})$, $\widehat{A^z} = \widehat{f}(A)$, $\overleftarrow{A^z} = \overleftarrow{f}(A)$. Для $x > 1 - \gamma$ $(\widehat{A^x}) = (\overleftarrow{A^x})$, так как эти операторы имеют ограниченные обратные. В этом случае через A^x будем обозначать каждый из этих операторов.

Целью следующих далее рассмотрений является теорема о возведении степени оператора A в степень (теорема 9).

Теорема 7. *Пусть выполнено* (4) *и* $x+\gamma > 1$, $a \in (0, a_0]$, $0 < \varphi_0 x \leqslant \varphi x < \pi$, $\lambda \in \Omega(a^x, \varphi x)$. *Тогда резольвента R_{A^x} оператора A^x задается формулой*

$$R_{A^x}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a,\varphi)} \frac{R(\mu)}{\mu^x - \lambda} d\mu. \tag{23}$$

Доказательство. При сделанных предположениях интеграл в (23) сходится абсолютно и потому представляет собой (при фиксированном λ) непрерывный на X оператор. Так как $f(\mu) = \mu^x - \lambda \in \mathcal{F}_0$, $h(\mu) = 1/(\mu^x - \lambda) \in \mathcal{F}_0$, то по теореме 6 $f(A) = A^x - \lambda E$, т. е. в силу (14) получаем $h(A) = (A^x - \lambda E)^{-1}$, с учетом непрерывности $h(A)$ (правой части в (23)) $R_{A^x}(\lambda) = h(A)$ и имеет место (23). Теорема доказана.

Следствие 5. *Для $\gamma \in (0, 1)$, $x \in (1 - \gamma, 1)$ справедливо равенство*

$$R_{A^x}(\lambda) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{s^x R(-s) ds}{s^{2x} - 2\lambda s^x \cos(\pi x) + \lambda^2} \tag{24}$$

в области $D = \{\lambda : \pi x < |\arg \lambda| \leqslant \pi\}$.

Доказательство получается с помощью рассуждений, приведенных в [5, с. 144]. При $\lambda < 0$

$$-2\pi i R_{A^x}(\lambda) = \lim_{\substack{a\to+0\\ \varphi\to\pi-0}} \int\limits_{\Gamma(a,\varphi)} \frac{R(\mu)}{\mu^x-\lambda}d\mu = \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(-s)ds}{s^x e^{i\pi x}-\lambda} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(-s)ds}{s^x e^{-i\pi x}-\lambda}$$
$$= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{s^x(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x})R(-s)ds}{(s^x e^{i\pi x}-\lambda)(s^x e^{-i\pi x}-\lambda)} = -2i\sin(\pi x)\int\limits_0^{+\infty} \frac{s^x R(-s)ds}{(s^x e^{i\pi x}-\lambda)(s^x e^{-i\pi x}-\lambda)},$$

откуда вытекает (24). В силу аналитичности в D обеих частей формулы (24) она справедлива в D. Следствие доказано.

Теорема 8. *Пусть выполнено (4) и $x+\gamma>1$, $a\in(0,a_0)$, $\varphi_0 x<\varphi x<\pi$. Тогда при некотором $C\in\mathbb{R}$ и всех $\lambda\in\overline{\Omega(a^x,\varphi x)}$ справедлива оценка*

$$\|R_{A^x}(\lambda)\| \leqslant C(|\lambda|+1)^{(1-\gamma)/x-1}. \tag{25}$$

Доказательство. При $\gamma=1$ (25) имеется в [5]. Будем считать поэтому, что $\gamma<1$. Согласно (23)

$$-2\pi i R_{A^x}(\lambda) = \sum_{j=1}^{3} I_j,$$

где

$$I_j = \int\limits_{\Gamma_j} \frac{R(\mu)}{\mu^x-\lambda}d\mu,$$

$\Gamma_1=\{\mu\in\mathbb{C}\colon \mu=te^{i\varphi_0}, t\geqslant a_0\}$, $\Gamma_2=\{\mu\in\mathbb{C}\colon \mu=a_0e^{i\psi}, |\psi|\leqslant\varphi_0\}$, $\Gamma_3=\{\mu\in\mathbb{C}\colon \mu=te^{-i\varphi_0}, t\geqslant a_0\}$. Оценим для $\lambda\in\overline{\Omega(a^x,\varphi x)}\setminus B(0,a^x)$ норму каждого из интегралов I_j. Представим λ в виде $\lambda=|\lambda|e^{i\theta x}$ ($\varphi x\leqslant|\theta|x\leqslant\pi$). Справедлива оценка

$$\|I_1\| \leqslant C_0\int\limits_{\Gamma_1}\frac{(|\mu|+1)^{-\gamma}|d\mu|}{||\mu|^x e^{i\varphi_0 x}-|\lambda|e^{i\theta x}|} \leqslant C_1\int\limits_a^{+\infty}\frac{s^{-\gamma}ds}{|s^x e^{i\varphi_0 x}-|\lambda|e^{i|\theta|x}|}$$

(здесь использовано, что $|z_1-z_2|\leqslant|z_1-\bar z_2|$, если для $j=1,2$ $\mathrm{Im}z_j\geqslant0$). После замены переменной $s^x=|\lambda|u$ имеем

$$\|I_1\| \leqslant C_1\int\limits_{a^x/|\lambda|}^{+\infty}\frac{u^{-\gamma/x}|\lambda|^{-\gamma/x}|\lambda|^{1/x}\frac{1}{x}u^{1/x-1}du}{|\lambda||ue^{i\varphi_0 x}-e^{i|\theta|x}|} = C_2|\lambda|^{(1-\gamma)/x-1}\int\limits_{a^x/|\lambda|}^{+\infty}\frac{u^{(1-\gamma)/x-1}du}{\sqrt{u^2+1-2u\cos(|\theta|x-\varphi_0 x)}}$$
$$\leqslant C_2|\lambda|^{\frac{1-\gamma}{x}-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{(1-\gamma)/x-1}du}{\sqrt{u^2+1-2u\cos(\varphi-\varphi_0)x}} = C_3|\lambda|^{(1-\gamma)/x-1}.$$

Аналогично $\|I_3\|\leqslant C_3|\lambda|^{(1-\gamma)/x-1}$. Оценим $\|I_2\|$:

$$\|I_2\| \leqslant C_0\int\limits_{\Gamma_2}\frac{(|\mu|+1)^{-\gamma}|d\mu|}{|\mu^x-\lambda|} = \frac{C_0}{|\lambda|}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{(a_0+1)^{-\gamma}|d\mu|}{|1-\nu\mu^x|},$$

где $\nu=1/\lambda$. Множество K точек ν при добавлении нуля компактно, поэтому непрерывная на компакте $\Gamma_2\times\bar K$ функция $\varphi(\mu,\nu)=1/|1-\nu\mu^x|$ ограниченна, т. е. $\|I_2\|\leqslant C_4/|\lambda|$.

В итоге для $\lambda \in \overline{\Omega(a^x, \varphi x)} \setminus B(0, a^x)$ имеем

$$\|R_{A^x}(\lambda)\| \leqslant C_5(|\lambda| + 1)^{(1-\gamma)/x-1}.$$

Учитывая, что резольвента $R_{A^x}(\lambda)$ на компакте $\overline{B(0, a^x)}$ ограниченна, получаем (25). Теорема доказана.

Замечание 5. При $\gamma \in (0, 1)$, $x \in (1 - \gamma, 1)$, $\lambda < 0$ (25) имеется в [7].

Теорема 9. *Пусть выполнено* (4) *и* $\varphi_0(1 - \gamma) < \pi$, $x \in (1 - \gamma, \dfrac{\pi}{\varphi_0})$, $\beta \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$(\overleftarrow{(A^x)^\beta}) = (\overleftarrow{A^{x\beta}}), \quad (\widehat{(A^x)^\beta}) = (\widehat{A^{x\beta}}).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mathrm{Re}\beta < -1$. Пусть $0 < a_1 < a_0^x$, $\varphi_0 x < \varphi_1 < \pi$. Тогда

$$(\overleftarrow{(A^x)^\beta}) = (\widehat{(A^x)^\beta}) = (A^x)^\beta = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a_1, \varphi_1)} \lambda^\beta R_{A^x}(\lambda) d\lambda$$

(интеграл абсолютно сходится в силу ограничения на β и теоремы 8). Используя теорему 7, в которой полагаем $a = a_0$, $\varphi = \varphi_0$, получаем

$$(A^x)^\beta = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma(a_1, \varphi_1)} d\lambda \int\limits_{\Gamma(a_0, \varphi_0)} \frac{\lambda^\beta R(\mu) d\mu}{\mu^x - \lambda}. \tag{26}$$

Имеют место неравенства

$$\frac{\|\lambda^\beta R(\mu)\|}{|\mu^x - \lambda|} \leqslant \frac{C_0 |\lambda|^\beta (|\mu| + 1)^{-\gamma}}{|\mu^x - \lambda|} \leqslant \frac{C_1 |\lambda|^\beta |\mu|^{-\gamma}}{|\mu^x - \lambda|} = \frac{C_1 |\lambda|^\beta |\mu|^{-\gamma - x}}{\left|1 - \dfrac{\lambda}{\mu^x}\right|}$$
$$\leqslant C_2 |\lambda|^\beta |\mu|^{-\gamma - x} \quad (\lambda \in \Gamma(a_1, \varphi_1), \mu \in \Gamma(a_0, \varphi_0)).$$

Здесь учитываем, что

$$\inf \left\{ \left|1 - \frac{\lambda}{\mu^x}\right| : \lambda \in \Gamma(a_1, \varphi_1), \mu \in \Gamma(a_0, \varphi_0) \right\} > 0.$$

Установим последнее неравенство. Пусть $\lambda \in \Gamma_1(a_1, \varphi_1)$, $\mu \in \Gamma_1(a_0, \varphi_0)$, $\lambda = s e^{i\varphi_1}$, $\mu = t e^{i\varphi_0}$ $(s \geqslant a_1, t \geqslant a_0)$. Тогда

$$\left|1 - \frac{\lambda}{\mu^x}\right| = \left|1 - \frac{s}{t^x} e^{i(\varphi_1 - x\varphi_0)}\right| \geqslant \rho(1, \Lambda) > 0,$$

где Λ — луч $\{u e^{i(\varphi_1 - x\varphi_0)} : u \geqslant 0\}$.

Пусть теперь $\lambda \in \Gamma_1(a_1, \varphi_1)$, $\mu \in \Gamma_2(a_0, \varphi_0)$, $\lambda = s e^{i\varphi_1}$, $\mu = a_0 e^{i\psi}$ $(s \geqslant a_1, |\psi| \leqslant \varphi_0)$. Для $s \geqslant 2a_0^x$ получаем $\left|\dfrac{\lambda}{\mu^x}\right| = \dfrac{s}{a_0^x} \geqslant 2$, т. е. $\left|1 - \dfrac{\lambda}{\mu^x}\right| \geqslant 1$. Для $a_1 \leqslant s \leqslant 2a_0^x$ (если такие s есть) $\left|1 - \dfrac{\lambda}{\mu^x}\right| \neq 0$ и, следовательно,

$$\inf \left\{ \left|1 - \frac{\lambda}{\mu^x}\right| : a_1 \leqslant s \leqslant 2a_0^x, \mu \in \Gamma_2(a_0, \varphi_0) \right\} > 0.$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Из неравенства

$$\frac{\|\lambda^\beta R(\mu)\|}{|\mu^x - \lambda|} \leqslant C_2 |\lambda|^\beta |\mu|^{-\gamma - x}$$

в условиях теоремы вытекает сходимость интеграла

$$\int\limits_{\Gamma(a_1,\varphi_1)} |d\lambda| \int\limits_{\Gamma(a_0^x,\varphi_0 x)} \frac{\|\lambda^\beta R(\mu)\|}{|\mu^x-\lambda|}|d\mu|,$$

и поэтому в интеграле (26) можно менять порядок интегрирования. Получаем

$$(A^x)^\beta = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} d\mu \int\limits_{\Gamma(a_1,\varphi_1)} \frac{\lambda^\beta R(\mu)}{\mu^x-\lambda}d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \mu^{x\beta}R(\mu)d\mu = A^{x\beta}.$$

Здесь использовано равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(a_1,\varphi_1)} \frac{\lambda^\beta d\lambda}{\lambda-\mu^x} = (\mu^x)^\beta$$

для $\mu \in \Gamma(a_0,\varphi_0)$, вытекающее из интегральной формулы Коши с учетом ограничений на параметры.

Пусть теперь $\beta \in \mathbb{C}$ произвольно и $B = A^x$. Возьмем такое $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, что $\mathrm{Re}\beta - n < -1$ и, следовательно, $\mathrm{Re}\beta - n < (\gamma-1)/x$. Тогда в силу теоремы 8 оператор $B^{\beta-n}$ непрерывен. Поэтому в силу теоремы 5 данной статьи, теоремы 11 из [10] и зная, что $(A^x)^{\beta-n} = A^{x(\beta-n)}$ и $(A^x)^n = A^{xn}$ (так как $(A^x)^{-n} = A^{-xn}$), имеем

$$(\overleftarrow{(A^x)^\beta}) = (\overleftarrow{B^\beta}) = B^n B^{\beta-n} = A^{nx}A^{(\beta-n)x} = (\overleftarrow{A^{\beta x}}),$$
$$(\widehat{(A^x)^\beta}) = (\widehat{B^\beta}) = \overline{B^{\beta-n}B^n} = \overline{A^{(\beta-n)x}A^{nx}} = (\widehat{A^{\beta x}}).$$

Теорема доказана.

Продолжаем исследование свойств функций от оператора.

Теорема 10. *Пусть выполнено* (4) *и* $\sigma < 0$, $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$, *причем операторы* $\widehat{f}(A)$, $\overleftarrow{f}(A)$ *неограниченны. Тогда регулярные множества* $\rho(\widehat{f}(A))$, $\rho(\overleftarrow{f}(A))$ *операторов* $\widehat{f}(A)$ *и* $\overleftarrow{f}(A)$ *пусты.*

Доказательство. Предположим, что $\rho(\widehat{f}(A)) \neq \varnothing$. Так как оператор $\widehat{f}(A)$ линеен, замкнут и неограничен, то $D(\widehat{f}(A)) \neq X$. Кроме того, для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор $(\widehat{f}(A))^n$ замкнут. Поэтому по теореме 1

$$(\widehat{f^n})(A) \subset (\widehat{f}(A))^n. \tag{27}$$

Возьмем теперь $n \in \mathbb{N}$, $n > (\gamma-1)/\sigma$. В этом случае $(\overleftarrow{f^n})(A)$ — непрерывный на X оператор. Но это противоречит (27), так как $D((\widehat{f}(A))^n) \subset D(\widehat{f}(A)) \neq X$.

Предположим теперь, что $\rho(\overleftarrow{f}(A)) \neq \varnothing$. По теореме 1 для $n \in \mathbb{N}$ имеем $(\overleftarrow{f^n})(A) \supset (\overleftarrow{f}(A))^n$. Для $n \in \mathbb{N}$, $n > (\gamma-1)/\sigma$ получаем, что $(\overleftarrow{f^n})(A)$ — непрерывный на X оператор. Поэтому $(\overleftarrow{f}(A))^n$ — также непрерывный оператор на своей области определения. В силу его замкнутости и плотной определенности $D((\overleftarrow{f}(A))^n) = X$, что противоречит тому, что $D((\overleftarrow{f}(A))^n) \subset D(\overleftarrow{f}(A)) \neq X$. Теорема доказана.

Следствие 6. *Если* $x = \mathrm{Re}z < 0$ *и операторы* $\widehat{A^z}$, $\overleftarrow{A^z}$ *неограниченны, то* $\rho(\overleftarrow{A^z}) = \rho(\widehat{A^z}) = \varnothing$.

Замечание 6. В работах [14;15] имеются примеры операторов A, степени которых A^z неограниченны для $\mathrm{Re}z \in (\gamma-1,0)\setminus\mathbb{Z}$.

Замечание 7. Пусть $f, 1/f \in \mathcal{F}$. Если $\rho(\widehat{f}(A)) = \varnothing$, то $\rho((\widehat{1/f})(A)) = \varnothing$; если $\rho(\overleftarrow{f}(A)) = \varnothing$, то $\rho((\overleftarrow{1/f})(A)) = \varnothing$.

Замечание вытекает из соотношений (14), (15).

В теореме 7 был дан вид резольвенты степени A^z при ряде ограничений на параметры. Соответствующий факт имеет место и в более общем случае функции от оператора.

Теорема 11. *Пусть выполнено* (4) *и* $\varphi_0 < \bar{\varphi} < \pi$, $f \in \mathcal{F}_0$, $1/f \in F_0(\bar{a}, \bar{\varphi}, -\sigma)$, $\gamma + \sigma > 1$, $a \in (\bar{a}, a_0)$, $\varphi \in (\varphi_0, \bar{\varphi})$. *Тогда* $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a,\varphi))} \subset \rho(A)$ *и для любого* $\lambda \notin \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a,\varphi))}$

$$R_{\widehat{f}(A)}(\lambda) = R_{\overleftarrow{f}(A)}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \frac{R(\mu)}{f(\mu) - \lambda} d\mu.$$

Доказательство. Из включений $\Omega(\bar{a}, \bar{\varphi}) \subset \Omega(a, \varphi) \subset \Omega(a_0, \varphi_0)$ имеем

$$\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(\bar{a}, \bar{\varphi}))} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a, \varphi))} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a_0, \varphi_0))}.$$

Тогда для $\lambda \notin \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a,\varphi))}$ $f(\mu) \neq \lambda$ при $\mu \notin \Omega(a,\varphi)$, т. е. функция $\dfrac{1}{f(\mu) - \lambda}$ аналитична по μ в $\mathbb{C} \setminus \Omega(a,\varphi)$. Поскольку из неравенства $\sigma + \gamma > 1$ следует, что $\sigma > 0$ (ведь $\gamma \leqslant 1$), то $\dfrac{1}{f(\mu)} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0$, т. е. $f(\mu) \xrightarrow[\mu\to\infty]{} \infty$ и $\dfrac{1}{f(\mu) - \lambda} \underset{\mu\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{f(\mu)}$, а потому $\dfrac{1}{f(\mu) - \lambda} \in F_0(a, \varphi, -\sigma)$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 7. Теорема доказана.

Замечание 8. Если оператор A ограничен (ограниченность A^{-1} предполагается) и $f \in \mathcal{F}_0$, то оператор $f(A)$ ограничен.

Действительно, пусть $f \in F_0(a, \varphi, \sigma)$, $\sigma - n < \gamma - 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда оператор $\Big(\dfrac{f(\lambda)}{\lambda^n}\Big)(A)$ ограничен и потому ограничен оператор $f(A) = \Big(\dfrac{f(\lambda)}{\lambda^n}\Big)(A)A^n$.

Теорема 12. *Пусть выполнено* (4) *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_0$, *оператор* $\widehat{f}_n(A)$ *неограничен, оператор* $(f_1\widehat{f_2 \cdots} f_n)(A)$ *ограничен. Тогда операторы* $\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A)\cdots\widehat{f}_n(A)$ *и* $\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A)\cdots\overleftarrow{f}_n(A)$ *незамкнуты.*

Доказательство вытекает из включений (9), (10).

Аналогичная теорема имеет место для функций из $\mathcal{F}$ в случае неограниченности A^{-1}. Ей предшествует

Теорема 13. *Пусть выполнено* (1) *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$. *Тогда*

$$f_1(A)f_2(A)\cdots f_n(A) \subset (f_1 f_2 \cdots f_n)(A), \tag{28}$$

а если $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, *то*

$$\overline{\widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A)\cdots\widetilde{f}_n(A)} \supset (f_1\widetilde{f_2\cdots} f_n)(A). \tag{29}$$

Доказательство. Включения (28), (29) при $n = 2$ совпадают с (32), (33) из [10] и аналогично устанавливаются при произвольном $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Теорема 14. *Пусть выполнено* (1) *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$, $f_n(A)$ *неограничен, а оператор* $(f_1 f_2 \cdots f_n)(A)$ *ограничен. Тогда оператор* $f_1(A)f_2(A)\cdots f_n(A)$, *а если* $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, *то и оператор* $\widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A)\cdots\widetilde{f}_n(A)$, *незамкнут.*

Доказательство вытекает из включений (28), (29).

Следствие 7. *Если* $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, *оператор* A^{z_n} *неограничен, оператор* $A^{z_1+z_2+\cdots+z_n}$ *ограничен, то операторы* $A^{z_1}A^{z_2}\cdots A^{z_n}$, $\widetilde{A^{z_1}}\widetilde{A^{z_2}}\cdots\widetilde{A^{z_n}}$ *незамкнуты.*

Следствие 8. *Если* $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *оператор* A^z *неограничен, оператор* A^{nz} *ограничен, то операторы* $(A^z)^n$, $(\widetilde{A^z})^n$ *незамкнуты. В частности,* $(A^z)^n \neq A^{nz}$, $(\widetilde{A^z})^n \neq A^{nz}$.

Замечание 9. Пусть оператор A^{-1} ограничен на X. Если оператор $A^{-1/n}$ ($n \in \mathbb{N}$) неограничен, то $(A^{1/n})^n \neq A$.

Действительно, $(A^{-1/n})^n \neq A^{-1}$. Перейдя здесь к обратным операторам, получаем требуемое.

В заключение рассмотрим случай полной непрерывности оператора A^{-1}.

Теорема 15. *Пусть выполнено* (4) *и оператор* A^{-1} *вполне непрерывен,* $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$ *с* $\sigma < \gamma - 1$. *Тогда оператор* $\widehat{f}(A)$ *вполне непрерывен, а если* $\overline{\mathrm{Im}A} = X$, *то* $\widehat{f}(A) = \overleftarrow{f}(A)$.

Справедливость теоремы вытекает из полной непрерывности резольвенты $R(\lambda)$ при каждом $\lambda \in \rho(A)$ и абсолютной сходимости интеграла в представлении

$$\widehat{f}(A) = \overleftarrow{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} f(\lambda)R(\lambda)d\lambda.$$

Данное доказательство аналогично приведенному в [4, с.299] для $f(\lambda) = \lambda^z$, $\gamma = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
2. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
3. **Balakrishnan A.V.** Fructional powers of closed operators and the semigroups generated by them // Pacific J. Math. Soc. 1960. Vol. 3. P. 419–437.
4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. М.: Наука, 1966. 499 с.
5. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
6. **Komatsu H.** Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces // Pacific J. Math. 1967. Vol. 21, no. 1. P. 89–111.
7. **Соболевский П.Е., Чеботарёва Л.М.** О дробных степенях плохо позитивных операторов // Тр. мат. фак-та Воронеж. ун-та. Воронеж, 1971. Вып. 3. С. 112–118.
8. **Martinez C., Sanz M., Pastor J.** A functional calculus and fractional powers for multivalued linear operators // Osaca J. Math. 2000. Vol. 37. P. 551–576.
9. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Расширение класса степенных операторных функций // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 38, вып. 8. С. 80–90. (Математика и механика).
10. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Некоторые классы функций линейного замкнутого оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 186–200.
11. **Сильченко Ю.Т.** Об одном классе полугрупп // Операторные уравнение в функциональных пространствах: сб. ст. Воронеж, 1986. С. 80–90.
12. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Дробные степени одного класса операторов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 81–83.
13. **Коркина Л.Ф.** О классе корректности операторных уравнений первого рода // Тр. ИММ Уральск. научн. центра АН СССР: сб. ст. 1976. Вып. 23. С. 49–60.
14. **Евзеров И.Д.** Оценки резольвенты и области определения дробных степеней абстрактных дифференциальных операторов // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. Свердловск, 1985. С. 29–37.
15. **Коркина Л.Ф., Цэвээнсурэн Ц.** Об ограниченности дробных степеней замкнутого оператора // Исследования по функциональному анализу и топологии. Свердловск, 1990. С. 56–68.

Коркина Людмила Федоровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

Рекант Марк Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru