ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.958

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ВДОЛЬ ТВЕРДЫХ СТЕНОК

М. А. Артемов, Е. С. Барановский

Изучаются граничные задачи, описывающие движение полимерных жидкостей с проскальзыванием вдоль твердых стенок области течения. В качестве условия проскальзывания используется нелинейное условие Навье. Доказано существование слабых стационарных решений краевой задачи в модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров. Доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений Осколкова. Установлены оценки норм решений.

Ключевые слова: модель движения водных растворов полимеров, уравнения Осколкова, условие проскальзывания, краевые задачи, слабые решения

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii. Boundary value problems for motion equations of polymeric fluids with nonlinear slip condition on solid walls.

We study boundary value problems describing flows of polymeric fluids with slip on solid walls of the flow domain. We use the nonlinear Navier slip condition. The existence of stationary weak solutions is proved for a boundary value problem in the model of motion of low-concentration aqueous polymer solutions. The global solvability of an initial boundary value problem for Oskolkov's system is also proved. Estimates for the norms of solutions are obtained.

Keywords: motion model for aqueous polymer solutions, Oskolkov's system, slip boundary condition, boundary value problems, weak solutions.

Введение

Для описания динамики слабоконцентрированных водных растворов полимеров может быть использована система [1]

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \tag{0.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial t} + \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}, \tag{0.2}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0, \tag{0.3}$$

где n — размерность пространства, $x_1, \ldots, x_n$ — пространственные координаты, t — время, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ — скорость, $p = p(t, \boldsymbol{x})$ — давление, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ — известная плотность внешних сил, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{x})$ — девиатор тензора напряжений, $\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}$ — вектор с координатами

$$(\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma})_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k},$$

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ — тензор скоростей деформации,

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = [\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T]/2,$$

ν — коэффициент вязкости, $\varkappa$ — коэффициент, характеризующий релаксационные свойства среды, $\nu, \varkappa > 0$.

Отметим, что в предельном случае, когда $\varkappa = 0$, уравнения (0.1)–(0.3) переходят в хорошо известную систему Навье — Стокса.

При изучении модели (0.1)–(0.3) часто используется упрощенный вариант реологического соотношения (0.2)

$$\boldsymbol{\sigma} = \nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial t}. \tag{0.4}$$

Комбинируя (0.1) и (0.4), получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \frac{\nu}{2} \Delta \boldsymbol{v} - \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial \Delta \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \boldsymbol{f}. \tag{0.5}$$

Уравнения (0.5), (0.3) называют *уравнениями Осколкова.* Используются также названия *модель Фойгта* и *модель Кельвина — Фойгта.*

Уравнения модели движения растворов полимеров изучали многие авторы. Прежде всего следует отметить работы А. П. Осколкова [2–4], в которых исследуются условия разрешимости краевых и начально-краевых задач для различных модификаций модели. Случай слабосжимаемой полимерной жидкости рассмотрен в статье [5]. Задача о разрушении решений системы уравнений Осколкова исследована в [6]. В работе [7] получен ряд точных решений начально-краевых задач, описывающих течения полимерных жидкостей с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных.

В перечисленных выше работах используются однородные краевые условия, т. е. рассматривается ситуация, когда частицы жидкости прилипают к неподвижным стенкам сосуда, в котором происходит течение. Однако в некоторых задачах граничное поле скоростей нельзя считать нулевым. Например, в задачах граничного управления течением полимерных жидкостей [8] используются неоднородные краевые условия типа Дирихле; более сложные неоднородные краевые условия возникают при изучении течений *с проскальзыванием вдоль границы.*

Важность учета эффекта проскальзывания при моделировании течений полимерных сред хорошо известна (см., например, статьи [9–11] и приведенную там литературу). Известно также, что проскальзывание частиц среды может происходить по-разному. Подробное обсуждение основных граничных условий, которые используются в механике жидкостей, приводится в обзоре [11]. В настоящей работе мы остановимся на следующем варианте проскальзывания:

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ на } \Gamma, \tag{0.6}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|)\boldsymbol{v}_\tau = -(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_\tau \ \text{ на } \Gamma, \tag{0.7}$$

где Γ — граница области течения, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ, $\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{v}$, $\mathbf{n}$ в $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$ — касательная составляющая вектора $\boldsymbol{v}$, λ — коэффициент проскальзывания, $\lambda : \Gamma \times [0, \infty) \to [0, \infty)$.

Соотношения (0.6), (0.7) — это нелинейный вариант *условия проскальзывания Навье* [11]. Краевые и начально-краевые задачи для уравнений Навье — Стокса с условиями типа Навье рассматриваются во многих работах (см, например, [12–15]).

Отметим результаты двух работ, в которых изучаются начально-краевые задачи с проскальзыванием для модели движения растворов полимеров. В [16] доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи в случае двух пространственных переменных при нестандартном *условии проскальзывания частиц и вихрей.* В [17, гл. 3] установлено существование решений задачи оптимального управления течением фойгтовской жидкости в ограниченной области при линейном условии проскальзывания Навье на границе.

Опишем теперь кратко задачи, которые рассматриваются в предлагаемой работе, и полученные результаты.

В разд. 1 изучается стационарный вариант уравнений модели (0.1)–(0.3) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, при краевых условиях (0.6), (0.7). Основной результат — теорема о существовании слабых решений и некоторых их свойствах (теорема 1).

Заметим, что в уравнения движения водных растворов полимеров входят члены, содержащие производные скорости $\boldsymbol{v}$ до третьего порядка включительно, а априорная оценка имеется только для функции $\boldsymbol{v}$ и ее производных первого порядка. Поэтому для доказательства разрешимости краевой задачи нельзя использовать стандартную схему метода Галеркина. Прием, который применяется в таких ситуациях, основан на решении регуляризованной задачи с дополнительными членами, содержащими малый числовой параметр, и последующем предельном переходе к исходной модели (см., например, [3]). Однако при неоднородных краевых условиях предельный переход осложняется из-за появления (при интегрировании по частям) в уравнениях новых дополнительных членов, величины которых не стремятся к нулю. Поэтому для доказательства теоремы 1 нами предложен другой подход, основанный на выборе специальной полной системы функций в используемых функциональных пространствах (см. разд. 1, лемма).

В разд. 2 рассматривается начально-краевая задача для уравнений Осколкова с краевыми условиями проскальзывания (0.6), (0.7). Установлена глобальная (по времени) разрешимость задачи в слабой постановке и получены оценки решения (теорема 2). Для доказательства существования решения используется метод Фаэдо — Галеркина. Для приближенных решений удается получить более сильные, чем в случае уравнений Навье — Стокса, априорные оценки. Это связано с наличием в системе Осколкова нестационарных членов, учитывающих релаксационные свойства среды. На основе полученных оценок и обобщенной теоремы Арцела — Асколи [18] доказана сходимость приближенных решений к слабому решению исходной задачи и установлена непрерывная зависимость нормы слабого решения $\|\boldsymbol{v}(t,\cdot)\|_{L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)}$ от времени.

1. Краевая задача, описывающая стационарное течение раствора полимеров при условии проскальзывания вдоль твердых стенок

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, с локально-липшицевой границей Γ. Рассмотрим систему уравнений, описывающую стационарные течения полимерных растворов в области Ω:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \operatorname{Div}\Big(\nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}\Big) + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{в } \Omega. \tag{1.1}$$

Предположим, что выполнены условие несжимаемости (0.3), условие непротекания (0.6) и краевое условие

$$\lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|)\boldsymbol{v}_\tau = -\Big(\Big[\nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}\Big]\mathbf{n}\Big)_\tau \quad \text{на } \Gamma. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) получается в результате подстановки тензора $\boldsymbol{\sigma}$, определенного по формуле (0.2), в соотношение (0.7).

Задачу (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) мы будем изучать в слабой постановке.

Сначала введем необходимые обозначения и функциональные пространства.

Условимся использовать стандартные обозначения $L_p(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $H^m(\Omega,\mathbb{R}^n) = W_2^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$ для пространств Лебега и Соболева функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение в $L_2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ будем обозначать с помощью круглых скобок $(\cdot,\cdot)$.

Напомним, что сужение функции $\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ на Γ определяется по формуле $\boldsymbol{v}|_\Gamma = \gamma_\Gamma \boldsymbol{v}$, где γ_Γ — оператор следа (см., например, [19]).

Пусть

$$\mathcal{X}(\Omega,\mathbb{R}^n) = \{\boldsymbol{v} \in C^\infty\left(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n\right) : \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0\}.$$

Определим пространство $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$ как замыкание множества $\mathcal{X}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ в пространстве $H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Предположим, что функция $\lambda:\Gamma\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ непрерывна и существуют константы $\lambda_0,\lambda_1>0$ такие, что

$$\lambda_0\le\lambda(\boldsymbol{x},\xi)\le\lambda_1,\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma,\quad \xi\in[0,\infty).$$

Определим скалярное произведение в $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$ с помощью формулы

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}=\nu\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}),\mathbf{D}(\boldsymbol{w})\big)+\lambda_0\int\limits_\Gamma \boldsymbol{v}_\tau\cdot\boldsymbol{w}_\tau\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{1.3}$$

Для обоснования корректности (1.3) приведем следующий вариант неравенства Корна [20]:

$$\|\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n})}+\|\gamma_\Gamma\boldsymbol{v}\|^2_{L_2(\Gamma,\mathbb{R}^n)}\ge C\|\boldsymbol{v}\|^2_{H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)},\ \ \boldsymbol{v}\in H^1(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Ясно, что норма, соответствующая скалярному произведению (1.3), эквивалентна норме, индуцированной из $H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\boldsymbol{f}\in L_2(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 1. *Слабым решением* задачи (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) назовем функцию $\boldsymbol{v}\in X(\Omega,\mathbb{R}^n)$, для которой справедливо равенство

$$-\sum_{i=1}^n\Big(v_i\boldsymbol{v},\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\Big)+\nu\big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})\big)-\varkappa\sum_{i=1}^n\Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}),v_i\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i}\Big)$$
$$+\int\limits_\Gamma\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau|)\boldsymbol{v}_\tau\cdot\boldsymbol{\psi}_\tau\,d\Gamma=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}) \tag{1.4}$$

при любой функции $\boldsymbol{\psi}\in\mathcal{X}(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

З а м е ч а н и е. При определении слабых решений мы используем стандартный для задач “с проскальзыванием” подход (ср., например, с [17; 20; 21]). Поясним, как возникает тождество (1.4).

Пусть пара $(\boldsymbol{v},p)$ — классическое решение задачи (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) и

$$\boldsymbol{\sigma}=\nu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})+\varkappa\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}. \tag{1.5}$$

Перепишем равенство (1.1) в виде

$$\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}-\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma}+\nabla p=\boldsymbol{f}. \tag{1.6}$$

Умножим скалярно в L_2 равенство (1.6) на функцию $\boldsymbol{\psi}\in\mathcal{X}(\Omega,\mathbb{R}^n)$:

$$\sum_{i=1}^n\Big(v_i\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i},\boldsymbol{\psi}\Big)-(\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\psi})+(\nabla p,\boldsymbol{\psi})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}). \tag{1.7}$$

Преобразуем по правилу интегрирования по частям члены из левой части (1.7):

$$-\sum_{i=1}^n\Big(v_i\boldsymbol{v},\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\Big)+(\boldsymbol{\sigma},\nabla\boldsymbol{\psi})-\int\limits_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\psi}\,d\Gamma=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}). \tag{1.8}$$

Используя свойство симметричности матрицы $\boldsymbol{\sigma}$, получаем

$$(\boldsymbol{\sigma},\nabla\boldsymbol{\psi})=\frac12(\boldsymbol{\sigma},\nabla\boldsymbol{\psi})+\frac12\big(\boldsymbol{\sigma}^T,(\nabla\boldsymbol{\psi})^T\big)=\frac12(\boldsymbol{\sigma},\nabla\boldsymbol{\psi})+\frac12\big(\boldsymbol{\sigma},(\nabla\boldsymbol{\psi})^T\big)=(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}))\,. \tag{1.9}$$

Так как $\boldsymbol{\psi}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0$, то

$$\int_\Gamma (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\psi}\, d\Gamma = \int_\Gamma (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_\tau \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau\, d\Gamma. \qquad (1.10)$$

Принимая во внимание (1.2), (1.5), (1.9) и (1.10), из соотношения (1.8) получаем (1.4).

Для доказательства разрешимости задачи (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) нам понадобится следующее утверждение.

Пусть E, F — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathcal{X}$ — линейное многообразие в пространстве F. Предположим, что F непрерывно вложено в E. Определим пространство X как замыкание $\mathcal{X}$ в пространстве E, а пространство Y — как замыкание $\mathcal{X}$ в F.

Пусть X_1 — гильбертово пространство такое, что вложение $X \subset X_1$ компактно.

Пространство, сопряженное с Y, обозначим Y^*. Значение функционала $q \in Y^*$ на элементе $u \in Y$ обозначим через $\langle q, u\rangle$.

Рассмотрим линейный непрерывный оператор $\boldsymbol{A} : X \to Y^*$ и нелинейный оператор $\boldsymbol{K}$: $X_1 \times X \to Y^*$.

Лемма. *Пусть выполнены условия*:

(i) $\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geq C\|\boldsymbol{v}\|_X^2$ *для любого элемента* $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}$,

(ii) $\langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{v}\rangle \geq 0$ *для любого элемента* $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}$,

(iii) *для любых последовательностей* $\{\boldsymbol{u}^m\} \subset X_1$, $\{\boldsymbol{v}^m\} \subset X$ *таких, что* $\boldsymbol{u}^m \to \boldsymbol{u}^0$ *в* X_1, $\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}^0$ *слабо в* X, *и любого* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{X}$ *выполнено*

$$\langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}^m], \boldsymbol{\varphi}\rangle \to \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v}^0], \boldsymbol{\varphi}\rangle.$$

Тогда для любого $\boldsymbol{f} \in Y^*$ *уравнение*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{f} \qquad (1.11)$$

имеет по крайней мере одно решение $\boldsymbol{v}_* \in X$ *в шаре* $\{\boldsymbol{v} \in X : \|\boldsymbol{v}\|_X \leq \|\boldsymbol{f}\|_{Y^*}/C\}$.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{\chi}^j\}_{j=1}^\infty$ — всюду плотное множество в пространстве X, а $\{\boldsymbol{\gamma}^j\}_{j=1}^\infty$ — всюду плотное множество в Y. Рассмотрим систему векторов

$$\boldsymbol{\varphi}^{11},\ \boldsymbol{\psi}^{11},\ \boldsymbol{\varphi}^{21},\ \boldsymbol{\psi}^{21},\ \boldsymbol{\varphi}^{22},\ \boldsymbol{\psi}^{22},\ \boldsymbol{\varphi}^{31},\ \boldsymbol{\psi}^{31}, \ldots \qquad (1.12)$$

такую, что $\boldsymbol{\varphi}^{ij}$, $\boldsymbol{\psi}^{ij} \in \mathcal{X}$ и

$$\|\boldsymbol{\varphi}^{ij} - \boldsymbol{\chi}^j\|_X \leq \frac{1}{i},\ \|\boldsymbol{\psi}^{ij} - \boldsymbol{\gamma}^j\|_Y \leq \frac{1}{i}.$$

Ясно, что система (1.12) является полной как в пространстве X, так и в пространстве Y. Исключим из этой системы все те элементы, каждый из которых может быть представлен как линейная комбинация предшествующих элементов. В результате получим линейно независимую систему векторов, которая также, как и исходная система, является полной и в пространстве X, и пространстве Y. Применим к полученной системе процесс ортогонализации в пространстве X. В результате построим $\{\boldsymbol{\omega}^j\}$ — ортогональный нормированный базис в X с элементами $\boldsymbol{\omega}^j \in \mathcal{X}$. Разумеется, система $\{\boldsymbol{\omega}^j\}$ не обязана быть ортогональным нормированным базисом в Y, однако эта система полна в Y.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим следующую «конечномерную» задачу: требуется найти вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{\omega}^j\rangle + \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v}^m], \boldsymbol{\omega}^j\rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}^j\rangle,\ j = 1, \ldots, m, \qquad (1.13)$$

$$\boldsymbol{v}^m = \sum_{j=1}^m \alpha_j \boldsymbol{\omega}^j. \qquad (1.14)$$

Рассмотрим отображение $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, заданное по правилу $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{\omega}^j\rangle + \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v}^m], \boldsymbol{\omega}^j\rangle$. Принимая во внимание (i), (ii), получаем

$$\big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}\big) = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v}^m\rangle + \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v}^m], \boldsymbol{v}^m\rangle \geq C\|\boldsymbol{v}^m\|_X^2 = C\|\boldsymbol{\alpha}\|^2_{\mathbb{R}^m},$$

т. е. оператор $\boldsymbol{F}$ является коэрцитивным. В этом случае (см. [22, гл. III, §2]) для любого вектора $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$ уравнение $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{h}$ имеет по крайней мере одно решение. Следовательно, задача (1.13), (1.14) разрешима.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ — решение (1.13), (1.14). Оценим величину $\|\boldsymbol{v}^m\|_X$. Умножим j-е уравнение (1.13) на α_j и просуммируем полученные равенства по j от 1 до m. С учетом свойств (i), (ii) получаем оценку

$$\|\boldsymbol{v}^m\|_X \leq \|\boldsymbol{f}\|_{Y^*}/C. \tag{1.15}$$

Так как нормы $\|\boldsymbol{v}^m\|_X$ равномерно ограничены по m, то существует элемент $\boldsymbol{v}_* \in X$ такой, что $\boldsymbol{v}^{m_j} \to \boldsymbol{v}_*$ слабо в X для некоторой подпоследовательности $\{m_j\}$. Для простоты будем считать, что $\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}_*$ слабо в X при $m \to \infty$. В силу компактности вложения $X \subset X_1$ имеет место сходимость $\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}_*$ в X_1.

Свойство (iii) позволяет осуществить предельный переход (при $m \to \infty$) в равенстве (1.13):

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{\omega}^j\rangle + \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{v}_*], \boldsymbol{\omega}^j\rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}^j\rangle \tag{1.16}$$

для любого $j \in \mathbb{N}$. Так как система $\{\boldsymbol{\omega}^j\}$ является полной в Y, то равенство (1.16) останется справедливым, если заменить в нем $\boldsymbol{\omega}^j$ на произвольный элемент $\boldsymbol{\omega} \in Y$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{v}_*$ — решение (1.11).

Из слабой сходимости $\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}_*$ в пространстве X и оценки (1.15) следует, что

$$\|\boldsymbol{v}_*\|_X \leq \|\boldsymbol{f}\|_{Y^*}/C.$$

Лемма доказана.

Сформулируем теперь основной результат данного раздела.

Теорема 1. 1) *Задача* (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) *имеет по крайней мере одно слабое решение* $\boldsymbol{v}$, *удовлетворяющее оценке*

$$\nu\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n})} + \lambda_0\,\|\boldsymbol{v}_\tau\|^2_{L_2(\Gamma,\mathbb{R}^n)} \leq C\|\boldsymbol{f}\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{R}^n)},$$

где C *— константа.*

2) *Множество слабых решений задачи* (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) *секвенциально слабо замкнуто в пространстве* $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства 1) применим лемму. Положим

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad X = X(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad E = H^1(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad F = H^3(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad X_1 = L_4(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Пространство Y определим как замыкание $\mathcal{X}$ в пространстве F.

Рассмотрим операторы $\boldsymbol{A} : X \to Y^*$, $\boldsymbol{K} : X_1 \times X \to Y^*$:

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle = \nu\,(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})) + \lambda_0 \int\limits_\Gamma \boldsymbol{v}_\tau \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau\, d\Gamma,$$

$$\langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{\psi}\rangle = -\sum_{i=1}^n \Big(u_i\boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\Big) - \varkappa\sum_{i=1}^n \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}), u_i\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i}\Big) + \int\limits_\Gamma [\lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|) - \lambda_0]\boldsymbol{v}_\tau \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau\, d\Gamma.$$

Нетрудно убедиться, что для операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}$ выполнены условия (i)–(iii) леммы. Отсюда и следует утверждение 1).

Докажем теперь 2). Пусть $\{\boldsymbol{v}^j\}$ — последовательность слабых решений задачи (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) и $\boldsymbol{v}^j \to \boldsymbol{v}^0$ слабо в $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Покажем, что $\boldsymbol{v}^0$ — слабое решение.

Согласно теоремам вложения соболевских пространств (см, например, [23]), пространство $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$ компактно вложено в $L_4\,(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, $\boldsymbol{v}^j \to \boldsymbol{v}^0$ сильно в $L_4\,(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(v_i^j \boldsymbol{v}^j, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \Big) \to \sum_{i=1}^{n} \Big(v_i^0 \boldsymbol{v}^0, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \Big),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^j), v_i^j \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i} \Big) \to \sum_{i=1}^{n} \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0), v_i^0 \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i} \Big)$$

для любой функции $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{X}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ при $j \to \infty$.

Используя свойство компактности оператора $\gamma_\Gamma : X(\Omega, \mathbb{R}^n) \to L_2(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ и теорему М.А. Красносельского об операторе суперпозиции (см. [24]), нетрудно установить, что

$$\int\limits_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau^j|)\boldsymbol{v}_\tau^j \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau \, d\Gamma \to \int\limits_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau^0|)\boldsymbol{v}_\tau^0 \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau \, d\Gamma.$$

В равенстве (1.4) заменим $\boldsymbol{v}$ на $\boldsymbol{v}^j$ и перейдем к пределу при $j \to \infty$:

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(v_i^0 \boldsymbol{v}^0, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \right) + \nu \left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}) \right) - \varkappa \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0), v_i^0 \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i} \right)$$

$$+ \int\limits_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau^0|)\boldsymbol{v}_\tau^0 \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau \, d\Gamma = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}).$$

Таким образом, функция $\boldsymbol{v}^0$ — слабое решение, что и требовалось установить.

Теорема 1 полностью доказана.

2. Начально-краевая задача, описывающая нестационарные течения полимерных жидкостей при условии проскальзывания вдоль границы

Рассмотрим теперь нестационарную систему уравнений (0.5), (0.3) в цилиндре $\Omega \times (0, T)$, $T > 0$, с условием непротекания (0.6), краевым условием

$$\lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|)\boldsymbol{v}_\tau = -\Big(\Big[\nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial t} \Big] \mathbf{n} \Big)_\tau \quad \text{на } \Gamma \tag{2.1}$$

и начальным условием

$$\boldsymbol{v}(0, \cdot) = \boldsymbol{u}. \tag{2.2}$$

Отметим, что краевое условие (2.1) следует из соотношений (0.4), (0.7).

Мы будем использовать стандартные обозначения $C([0,T], E)$, $C^1([0,T], E)$, $L_q(0,T;E)$ для пространств непрерывных, C^1-гладких и интегрируемых в степени q функций $\boldsymbol{v} : [0, T] \to E$, где E — некоторое банахово пространство.

Предположим, что $\boldsymbol{f} \in L_\infty\big([0,T]; L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)\big)$, $\boldsymbol{u} \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 2. *Слабым решением* задачи (0.5), (0.3), (0.6), (2.1), (2.2) назовем функцию $\boldsymbol{v} \in L_2\big(0, T; X(\Omega, \mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0, T], L_4(\Omega, \mathbb{R}^n)\big)$ такую, что $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{u}$ и

$$\frac{d}{dt}\,(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) - \sum_{i=1}^{n} \Big(v_i(t)\boldsymbol{v}(t), \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \Big) + \nu \left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}(t)), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}) \right) + \varkappa \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}(t)), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}) \right)$$

$$+\int_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau(t,\boldsymbol{x})|)\boldsymbol{v}_\tau\cdot\boldsymbol{\psi}_\tau\,d\Gamma=(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi})\ \forall\boldsymbol{\psi}\in\mathcal{X}(\Omega,\mathbb{R}^n)$$

в смысле распределений на $(0,T)$.

З а м е ч а н и е. В этом разделе для вычисления скалярного произведения функций пространства $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$ мы будем использовать формулу (ср. с формулой (1.3))

$$[[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]]_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}=\varkappa\big(\mathbf{D}\,(\boldsymbol{v})\,,\mathbf{D}\,(\boldsymbol{w})\big)+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}).$$

Такой выбор скалярного произведения упрощает вывод оценок нестационарных решений (см. доказательство теоремы 2).

Согласно [20, гл. 1, теорема 2.2], норма, соответствующая $[[\cdot,\cdot]]_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}$, эквивалентна норме, индуцированной из пространства $H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. *Начально-краевая задача* (0.5), (0.3), (0.6), (2.1), (2.2) *имеет по крайней мере одно слабое решение* $\boldsymbol{v}$, *удовлетворяющее оценкам*

$$\max_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}(t)\|^2_{L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le C\exp(T)\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\|\boldsymbol{f}\|^2_{L_2(0,T;[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*)}\right), \tag{2.3}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{L_2(0,T;X(\Omega,\mathbb{R}^n))}\le T\exp(T)\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\|\boldsymbol{f}\|^2_{L_2(0,T;[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*)}\right), \tag{2.4}$$

где C *— константа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\boldsymbol{\psi}^j\}$ — ортогональный нормированный базис в $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем $m\in\mathbb{N}$. Будем искать приближенные решения вида

$$\boldsymbol{v}^m(t,\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^m\alpha_{mj}(t)\boldsymbol{\psi}^j(\boldsymbol{x}), \tag{2.5}$$

где $\alpha_{mj}:[0,T]\to\mathbb{R}$ — неизвестные функции.

Рассмотрим задачу: требуется найти вектор-функцию $\boldsymbol{\alpha}_m(t)=(\alpha_{m1}(t),\dots,\alpha_{mm}(t))$ такую, что

$$\big([\boldsymbol{v}^m(t)]',\boldsymbol{\psi}^k\big)-\sum_{i=1}^n\left(v_i^m(t)\boldsymbol{v}^m(t),\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^k}{\partial x_i}\right)+\nu\big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\big)+\varkappa\big(\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]'),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\big)$$

$$+\int_\Gamma\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}^m_\tau(t,\boldsymbol{x})|)\boldsymbol{v}^m_\tau(t)\cdot\boldsymbol{\psi}^k_\tau\,d\Gamma=(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi}^k),\quad k=1,\dots,m, \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{v}^m(0,\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^m(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\psi}^j)_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\boldsymbol{\psi}^j(\boldsymbol{x}). \tag{2.7}$$

Ясно, что (2.6), (2.7) — это задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Прежде всего установим априорные оценки решений (2.6), (2.7).

Предположим, что вектор-функция $(\alpha_{m1}(t),\dots,\alpha_{mm}(t))$ удовлетворяет (2.6), (2.7), а функция $\boldsymbol{v}^m$ определена равенством (2.5). Умножим (2.6) на $\alpha_{mk}(t)$ и просуммируем полученные уравнения по k от 1 до m. С учетом соотношения

$$\sum_{i=1}^n\left(v_i^m(t)\boldsymbol{v}^m(t),\frac{\partial\boldsymbol{v}^m(t)}{\partial x_i}\right)=0$$

получаем

$$\big([\boldsymbol{v}^m(t)]',\boldsymbol{v}^m(t)\big)+\nu\big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t))\big)+\varkappa\left(\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]'),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m)\right)$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau^m(t,\boldsymbol{x})|)\|\boldsymbol{v}_\tau^m(t,\boldsymbol{x})\|^2_{\mathbb{R}^n}\,d\Gamma=\big(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}^m(t)\big). \tag{2.8}$$

Равенство (2.8) перепишем в виде

$$[[(\boldsymbol{v}^m(t))',\boldsymbol{v}^m(t)]]_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\nu\big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t))\big)$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau^m(t,\boldsymbol{x})|)\|\boldsymbol{v}_\tau^m(t,\boldsymbol{x})\|^2_{\mathbb{R}^n}\,d\Gamma=\big(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}^m(t)\big).$$

Отсюда находим, что $\dfrac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}^m(t)\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le 2\,|\big(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}^m(t)\big)|$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}^m(t)\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*}+\|\boldsymbol{v}^m(t)\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}. \tag{2.9}$$

Интегрируя (2.9) в пределах от 0 до t и применяя лемму Гронуолла, получаем

$$\|\boldsymbol{v}^m(t)\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le\exp(T)\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\int\limits_0^T\|\boldsymbol{f}(\tau)\|^2_{[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*}\,d\tau\right). \tag{2.10}$$

Из (2.10), (2.5) следует, что

$$\max_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^m\alpha^2_{mj}(t)\le\exp(T)\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\int_0^T\|\boldsymbol{f}(\tau)\|^2_{[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*}\,d\tau\right). \tag{2.11}$$

Оценка (2.11) показывает, что задача (2.6), (2.7) разрешима на отрезке $[0,T]$.

Обоснуем теперь возможность предельного перехода в (2.6), (2.7) при $m\to\infty$.

Умножим (2.6) на $\alpha'_{mk}(t)$ и просуммируем полученные уравнения по k от 1 до m:

$$\big([\boldsymbol{v}^m(t)]',[\boldsymbol{v}^m(t)]'\big)-\sum_{i=1}^n\left(v_i^m(t)\boldsymbol{v}^m(t),\frac{\partial[\boldsymbol{v}^m(t)]'}{\partial x_i}\right)+\nu\left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]')\right)$$

$$+\varkappa\left(\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]'),\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]')\right)+\int\limits_{\Gamma}\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau^m(t,\boldsymbol{x})|)\boldsymbol{v}_\tau^m(t)\cdot[\boldsymbol{v}_\tau^m(t)]'\,d\Gamma=(\boldsymbol{f}(t),[\boldsymbol{v}^m(t)]'). \tag{2.12}$$

Используя неравенство Коши и (2.10), из соотношения (2.12) можно вывести оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\|[\boldsymbol{v}^m(t)]'\|_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le C_0 \tag{2.13}$$

с мажорантой C_0, зависящей от параметров модели и не зависящей от m.

Из оценок (2.10), (2.13) вытекает, что последовательность $\boldsymbol{v}^m$ ограничена в пространстве $C^1\big([0,T],X(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$.

Из компактности вложения $X(\Omega,\mathbb{R}^n)\subset L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)$ и обобщенной теоремы Арцела — Асколи [18] следует, что вложение $C^1\big([0,T],X(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)\subset C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$ компактно. Поэтому множество $\{\boldsymbol{v}^m\colon m\in\mathbb{N}\}$ относительно компактно в пространстве $C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$, и, следовательно, существует функция $\boldsymbol{v}^0\in C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$ такая, что

$$\boldsymbol{v}^{m_j}\to\boldsymbol{v}^0\ \text{ сильно в } C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$$

для некоторой подпоследовательности m_j. Для простоты будем полагать, что

$$\boldsymbol{v}^{m}\to\boldsymbol{v}^0\ \text{ сильно в } C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big). \tag{2.14}$$

В силу оценки (2.10) имеет место также сходимость

$$\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}^0 \ \text{ слабо в } L_2\big(0,T;X(\Omega,\mathbb{R}^n)\big). \tag{2.15}$$

Пусть $\eta(t)$ — гладкая скалярная функция с носителем в $(0,T)$. Умножим скалярно в $L_2(0,T)$ равенство (2.6) на функцию $\eta(t)$:

$$\int\limits_0^T \Big([\boldsymbol{v}^m(t)]',\boldsymbol{\psi}^k\Big)\,\eta(t)\,dt - \int\limits_0^T \sum_{i=1}^n \Big(v_i^m(t)\boldsymbol{v}^m(t),\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^k}{\partial x_i}\Big)\eta(t)\,dt + \nu\int\limits_0^T \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\Big)\,\eta(t)\,dt$$

$$+\int\limits_0^T \varkappa\Big(\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]'),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\Big)\,\eta(t)\,dt + \int\limits_0^T\bigg(\int\limits_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau^m(t,\boldsymbol{x})|)\,\boldsymbol{v}_\tau^m(t)\cdot\boldsymbol{\psi}_\tau^k\,d\Gamma\bigg)\eta(t)\,dt$$

$$=\int\limits_0^T(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi}^k)\eta(t)\,dt. \tag{2.16}$$

Преобразуем по правилу интегрирования по частям первое и четвертое слагаемое из левой части (2.16) и перейдем к пределу при $m\to\infty$. С учетом (2.14), (2.15) получаем

$$-\int\limits_0^T \Big(\boldsymbol{v}^0(t),\boldsymbol{\psi}^k\Big)\,\eta'(t)\,dt - \int\limits_0^T \sum_{i=1}^n \Big(v_i^0(t)\boldsymbol{v}^0(t),\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^k}{\partial x_i}\Big)\eta(t)\,dt + \nu\int\limits_0^T \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\Big)\,\eta(t)\,dt$$

$$-\int\limits_0^T \varkappa\Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\Big)\,\eta'(t)\,dt + \int\limits_0^T\bigg(\int\limits_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau^0(t,\boldsymbol{x})|)\,\boldsymbol{v}_\tau^0(t)\cdot\boldsymbol{\psi}_\tau^k\,d\Gamma\bigg)\eta(t)\,dt$$

$$=\int\limits_0^T(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi}^k)\eta(t)\,dt \tag{2.17}$$

для произвольного $k\in\mathbb{N}$. Поскольку $\{\boldsymbol{\psi}^j\}$ — базис в пространстве $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$, равенство (2.17) останется справедливым, если заменить в нем $\boldsymbol{\psi}^k$ на произвольный элемент $\boldsymbol{\psi}\in X(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $\boldsymbol{v}^0$ — слабое решение задачи (0.5), (0.3), (0.6), (2.1), (2.2).

Оценки решения (2.3), (2.4) следуют из (2.10). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Павловский В.А.** К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 809–812.
2. **Осколков А.П.** О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. науч. семинара ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 98–136. (Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 7.)
3. **Осколков А.П.** О нестационарных течениях вязко-упругих жидкостей // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 159. С. 103–131. (Краевые задачи математической физики, 12.)
4. **Осколков А.П.** Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164. (Краевые задачи математической физики, 13.)
5. **Свиридюк Г.А.** Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1994. № 1. С. 62–70.
6. **Корпусов М.О., Свешников А.Г.** О разрушении решения системы уравнений Осколкова // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 4. С. 83–108.

7. **Барановский Е.С.** Исследование математических моделей, описывающих течения жидкости Фойгта с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2011. № 1. С.77–93.
8. **Барановский Е.С.** Задача оптимального граничного управления для уравнений движения полимерных растворов // Мат. тр. 2013. Т. 16, № 2. С. 13–27.
9. **Denn M.** Extrusion instabilities and wall slip // Annu. Rev. Fluid Mech. 2001. Vol. 33. P. 265–287.
10. **Hayat T., Masood Khan, Ayub M.** On non-linear flows with slip boundary condition // Z. Angew. Math. Phys. 2005. Vol. 56. P. 1012–1029.
11. **Раджагопал К.Р.** О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, № 2. С. 111–121.
12. **Farwig R.** Stationary solutions of compressible Navier–Stokes equations with slip boundary condition // Comm. Partial Diff. Eq. 1989. Vol. 14, iss. 11. P. 1579–1606.
13. **Tani A., Itoh S., Tanaka N.** The initial value problem for the Navier–Stokes equations with general slip boundary condition // Adv. Math. Sci. Appl. 1994. Vol. 4. P. 51–69.
14. **Itoh Sh., Tanaka N., Tani A.** Steady solution and its stability for Navier–Stokes equations with general Navier slip boundary condition // J. Math. Sci. 2009. Vol. 159, no. 4. P. 5–130.
15. **Masmoudi N., Rousset F.** Uniform regularity for the Navier–Stokes equation with Navier boundary condition // Arch. Rational Mech. Anal. 2012. Vol. 203, no. 2. P. 529–575.
16. **Ладыженская О.А.** О глобальной однозначной разрешимости двумерных задач для водных растворов полимеров // Зап. науч. семинара ПОМИ. 1997. Т. 243. С. 138–153. (Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 28.)
17. **Кузьмин М.Ю.** О краевых задачах некоторых моделей гидродинамики с условиями проскальзывания на границе: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2007. 106 с.
18. **Simon J.** Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1986. Vol. 146, no. 1. P. 65–96.
19. **Galdi G.P.** An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. Steady-state problems. New York: Springer, 2011. 1018 p.
20. **Литвинов В.Г.** Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 376 с.
21. **Барановский Е.С.** Задача оптимального управления стационарным течением среды Джеффриса при условии проскальзывания на границе // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 18–27.
22. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
23. **Adams R.A., Fournier J.J.F.** Sobolev spaces. Amsterdam: Elsevier, 2003. 320 p.
24. **Скрыпник И.В.** Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1991. 448 с.

Артемов Михаил Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Воронежский государственный университет
e-mail: artemov_m_a@mail.ru

Поступила 16.04.2014

Барановский Евгений Сергеевич
канд. физ.-мат. наук
доцент
Воронежский государственный университет
e-mail: esbaranovskii@gmail.com