ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.9

К L^1-ТЕОРИИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

А. А. Ковалевский

Рассмотрены нелинейные эллиптические вариационные неравенства второго порядка с вырождающимися (по пространственной переменной) и анизотропными коэффициентами и L^1-данными. Изучены случаи принадлежности множества ограничений определенному анизотропному весовому пространству Соболева и более широкому функциональному классу. В первом случае установлены новые свойства T-решений и сдвиговых T-решений исследованных вариационных неравенств, введено понятие $W^{1,1}$-регулярного T-решения и доказана теорема существования и единственности такого решения. Во втором случае введено понятие $\mathcal{T}$-решения рассмотренных вариационных неравенств и установлены условия существования и единственности такого решения.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические вариационные неравенства, анизотропия, вырождение, L^1-данные, T-решение, $\mathcal{T}$-решение.

A. A. Kovalevsky. Toward the L^1-theory of degenerate anisotropic elliptic variational inequalities.

We consider nonlinear elliptic second-order variational inequalities with degenerate (with respect to the spatial variable) and anisotropic coefficients and L^1-data. We study the cases where the set of constraints belongs to a certain anisotropic weighted Sobolev space and a larger function class. In the first case, some new properties of T-solutions and shift T-solutions of the investigated variational inequalities are established. Moreover, the notion of $W^{1,1}$-regular T-solution is introduced, and a theorem of existence and uniqueness of such a solution is proved. In the second case, we introduce the notion of $\mathcal{T}$-solution of the variational inequalities under consideration and establish conditions of existence and uniqueness of such a solution.

Keywords: nonlinear elliptic variational inequalities, anisotropy, degeneration, L^1-data, T-solution, $\mathcal{T}$-solution.

Введение

В статье [1] введены и изучены понятия T-решения и сдвигового T-решения для широкого класса нелинейных эллиптических вариационных неравенств с L^1-данными. При этом доказаны теоремы о существовании и единственности таких решений и описаны их свойства. В отличие от многих других работ по эллиптическим вариационным неравенствам с L^1-правыми частями и правыми частями мерами (см., например, [2–11]), класс вариационных неравенств, изученный в [1], характеризуется следующими двумя особенностями. Во-первых, коэффициенты оператора, порождающего левую часть рассматриваемых вариационных неравенств, могут иметь анизотропный порядок роста по координатам переменной, соответствующей градиенту неизвестной функции, и вместе с тем каждый коэффициент может иметь индивидуальное вырождение по пространственной переменной. Во-вторых, основное условие относительно соответствующего множества ограничений является довольно общим и допускает рассмотрение не только односторонних, как, например, в [2–9], и двусторонних, как в [10; 11], препятствий, но и других поточечных ограничений. В отличие от большинства из упомянутых работ в [1] рассмотрен, в частности, случай, когда множество ограничений, по сути общего характера, может не содержать ограниченные функции. Именно для этого случая приспособлено понятие сдвигового T-решения, а понятие T-решения является подходящим для более простого случая,

[1]Работа выполнена в рамках программы УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”).

когда множество ограничений содержит ограниченные функции. Отметим, что основные результаты статьи [1] были анонсированы в заметке [12], а более детальное изложение материала той же статьи было дано в препринте [13].

Настоящая работа является продолжением исследований, представленных в [1; 12; 13]. Статья состоит из трех основных разделов. В разд. 1 даны необходимые предварительные сведения. В разд. 2 изложены новые результаты о свойствах T-решений и сдвиговых T-решений вариационных неравенств с оператором и множествами ограничений, которые рассматривались в [1; 12; 13], и L^1-правыми частями. Эти свойства выражаются в виде некоторых включений и интегральных оценок для исследуемых решений. Полученные результаты позволяют, в частности, дать эквивалентные, но более информативные формулировки понятий T-решения и сдвигового T-решения. Кроме того, введено понятие $W^{1,1}$-регулярного T-решения вариационных неравенств с L^1-данными в случае, когда множество ограничений может не содержать ограниченных функций, и дана теорема существования и единственности такого решения. Заметим, что множества ограничений, рассмотренные в [1; 12; 13] и разд. 2, принадлежат анизотропному весовому пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, где Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, q — набор показателей $q_1,\dots,q_n$ и ν — набор весовых функций $\nu_1,\dots,\nu_n$. Однако T-решения и сдвиговые T-решения изученных вариационных неравенств с L^1-данными, вообще говоря, не принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, причем сами T-решения и ненулевые смещения сдвиговых T-решений содержатся в более широком функциональном множестве, обозначаемом через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому представляет интерес рассмотрение случая, когда множества ограничений для соответствующих вариационных неравенств с L^1-правыми частями непосредственно принадлежат классу $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Раздел 3 посвящен исследованию именно этого случая. Здесь введено и изучено понятие $\mathcal{T}$-решения вариационного неравенства с тем же набором коэффициентов, который рассматривался в [1; 12; 13], множеством ограничений из $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и L^1-правой частью. При этом с использованием результатов, изложенных в [1] и разд. 2, установлены условия существования и единственности $\mathcal{T}$-решения и даны примеры выполнения этих условий.

1. Предварительные сведения

Прежде всего опишем функциональные классы, используемые в работе, и сформулируем ряд предложений относительно их элементов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $q_i \in (1,n)$. Положим $q = \{q_i : i = 1,\dots,n\}$.

Пусть для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ ν_i — неотрицательная функция на Ω такая, что $\nu_i > 0$ п. в. на Ω,

$$\nu_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu_i}\right)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Положим $\nu = \{\nu_i : i = 1,\dots,n\}$. Через $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^1(\Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$ и $\nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega)$.

Пусть $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ — отображение $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $\mathbb{R}$ такое, что для любой функции $u \in W^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\|u\|_{1,q,\nu} = \int_\Omega |u|\,dx + \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \nu_i |D_i u|^{q_i}\,dx\right)^{1/q_i}.$$

Отображение $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ есть норма в $W^{1,q}(\nu,\Omega)$, и ввиду второго из включений (1.1) множество $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ есть банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$. Кроме того, в силу первого из включений (1.1) имеем $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^{1,q}(\nu,\Omega)$. Очевидно, что множество $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ является банаховым пространством относительно нормы, индуцированной нормой $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$. Это пространство рефлексивно. Доказательство данного факта изложено в [13]. Заметим также, что ввиду второго из включений (1.1) имеем $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$.

Согласно [1, предложение 2.1] из слабой сходимости какой-либо последовательности в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ вытекает ее сильная сходимость в $L^1(\Omega)$. Отсюда и из рефлексивности пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ следует такой результат.

Предложение 1. *Пусть $\{u_j\}$ — ограниченная последовательность в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $u\in L^1(\Omega)$, и пусть $u_j\to u$ сильно в $L^1(\Omega)$. Тогда $u\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $u_j\to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.*

Далее, пусть для любого $k>0$ $\quad T_k$ — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s)=\begin{cases} s, & \text{если } |s|\leqslant k,\\ k\operatorname{sign}s, & \text{если } |s|>k.\end{cases}$$

Аналогично известным результатам для невесовых соболевских пространств (см., например, [14, гл. 2]) имеем: если $u\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $k>0$, то $T_k(u)\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, и для любого $i\in\{1,\dots,n\}$

$$D_iT_k(u)=D_iu\cdot 1_{\{|u|<k\}}\quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{1.2}$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций $u:\Omega\to\mathbb{R}$ таких, что для любого $k>0$ имеем $T_k(u)\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Ясно, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega). \tag{1.3}$$

Вместе с тем $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\setminus L^1(\Omega)\neq\varnothing$, и следовательно, множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ шире пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Для любых $u:\Omega\to\mathbb{R}$ и $x\in\Omega$ положим $k(u,x)=\min\{l\in\mathbb{N}:|u(x)|\leqslant l\}$.

Определение 1. Пусть $u\in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $i\in\{1,\dots,n\}$. Тогда δ_iu — функция на Ω такая, что для любого $x\in\Omega$ $\quad \delta_iu(x)=D_iT_{k(u,x)}(u)(x)$.

Определение 2. Если $u\in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, то δu — отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x\in\Omega$ и $i\in\{1,\dots,n\}$ $\quad (\delta u(x))_i=\delta_iu(x)$.

Предложение 2. *Пусть $u\in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $i\in\{1,\dots,n\}$. Тогда для любого $k>0$ имеем $D_iT_k(u)=\delta_iu\cdot 1_{\{|u|<k\}}$ п. в. на Ω.*

Доказательство аналогично изложенному в [15] доказательству для невесового случая.

Из (1.2), (1.3) и предложения 2 вытекает, что если $u\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, то для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ имеем $\delta_iu=D_iu$ п. в. на Ω.

Предложение 3. *Пусть $u\in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $v\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Тогда $u-v\in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, и для любых $i\in\{1,\dots,n\}$ и $k>0$ имеем $D_iT_k(u-v)=\delta_iu-D_iv$ п. в. на $\{|u-v|<k\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о изложено в [13].

Далее, введем набор функций, которые будут коэффициентами рассматриваемых в работе вариационных неравенств.

Пусть $c_1, c_2 > 0$, $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, $g_1, g_2 \geqslant 0$ на Ω, и пусть для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ a_i — функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} (1/\nu_i)^{1/(q_i-1)}(x)|a_i(x,\xi)|^{q_i/(q_i-1)} \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)|\xi_i|^{q_i} + g_1(x), \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi)\xi_i \geqslant c_2 \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)|\xi_i|^{q_i} - g_2(x). \tag{1.5}$$

Кроме того, будем считать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,\xi) - a_i(x,\xi')](\xi_i - \xi_i') > 0. \tag{1.6}$$

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $u, v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то* $a_i(x, \nabla u) D_i v \in L^1(\Omega)$;

2) *если* $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$, $l \geqslant k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то* $a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - v) = a_i(x, \nabla T_l(u)) D_i T_k(u - v)$ *п. в. на* Ω;

3) *если* $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то* $a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - v) \in L^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) вытекает из (1.4). Утверждение 2) следует из предложений 2 и 3. Наконец, утверждение 3) выводим из предложения 3 и утверждений 1) и 2).

Положим $a = \{a_i : i = 1, \ldots, n\}$. Для любой функции $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega)$ определим

$$\mathcal{M}_a(u) = \{v \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega) : k > 0,\ i \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow a_i(x, \delta u) D_i T_k(v) \in L^1(\Omega)\}.$$

В силу предложения 3 и утверждения 3) предложения 4 имеем

$$u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega),\ v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \Longrightarrow u - v \in \mathcal{M}_a(u). \tag{1.7}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — оператор из $\mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $(\mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u) D_i v \Big\} dx.$$

В следующем разделе рассмотрим вариационные неравенства, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ и набору a, множествам ограничений из $\mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и правым частям из $L^1(\Omega)$. В частности, покажем, что заключительное включение в импликации (1.7) справедливо для T-решений исследуемых вариационных неравенств при любых, необязательно ограниченных, сдвигах из множества ограничений. В разд. 3 изучим вариационные неравенства, соответствующие набору a, множествам ограничений из $\mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и правым частям из $L^1(\Omega)$.

2. Вариационные неравенства с множествами ограничений из $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$

2.1. T-решения

Пусть V — замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$V\cap L^\infty(\Omega)\neq\varnothing, \tag{2.1}$$

$$\text{если } u,v\in V \text{ и } k>0, \text{ то } u-T_k(u-v)\in V. \tag{2.2}$$

Определение 3. Пусть $f\in L^1(\Omega)$. T-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A},V,f)$, будем называть функцию $u\in\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такую, что:

(i) для любых $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$ и $k\geqslant 1$ имеем $v-T_k(v-u)\in V$;

(ii) если $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$, $k\geqslant1$ и $k_1=k+\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle\mathcal{A}T_{k_1}(u),T_k(u-v)\rangle\leqslant\int\limits_\Omega f\,T_k(u-v)dx.$$

В работе [1] установлено, что для любой функции $f\in L^1(\Omega)$ существует единственное T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A},V,f)$. При этом в отличие от вариационных неравенств с достаточно регулярными данными, условие строгой монотонности (1.6) существенно использовано не только для обоснования единственности, но и для доказательства существования T-решения.

Положим

$$c_3=\frac{1}{c_1}\left(\frac{2c_1}{c_2}+1\right)^n,\qquad c_4=\frac{1}{c_1}\,\|g_1\|_{L^1(\Omega)}+\frac{2}{c_2}\,\|g_2\|_{L^1(\Omega)},$$

и пусть $\Phi_{q,\nu}$ — отображение $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $L^1(\Omega)$ такое, что для любой функции $v\in\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\Phi_{q,\nu}(v)=\sum_{i=1}^n\nu_i|D_iv|^{q_i}.$$

Предложение 5. *Пусть $f\in L^1(\Omega)$. Пусть u — T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A},V,f)$. Пусть $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$, $k\geqslant1$ и $l=k+\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Тогда*

$$\int\limits_{\{|u-v|<k\}}\Phi_{q,\nu}(T_l(u))dx\leqslant\frac{2k}{c_2}\,\|f\|_{L^1(\Omega)}+c_3\|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)}+c_4. \tag{2.3}$$

Доказательство. В силу определения 3 и того, что $|T_k|\leqslant k$ на $\mathbb{R}$, имеем

$$\langle\mathcal{A}T_l(u),T_k(u-v)\rangle\leqslant k\|f\|_{L^1(\Omega)}\,. \tag{2.4}$$

Оценим левую часть неравенства (2.4) снизу. Для этого положим

$$I=\int\limits_{\{|u-v|<k\}}\Phi_{q,\nu}(T_l(u))dx,\qquad J=\int\limits_{\{|u-v|<k\}}\left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\nabla T_l(u))D_iv\right\}dx.$$

В силу предложений 2 и 3 для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ имеем $D_iT_k(u-v)=(D_iT_l(u)-D_iv)\cdot 1_{\{|u-v|<k\}}$ п. в. на Ω. Тогда, используя определение оператора $\mathcal{A}$ и неравенство (1.5), получаем $\langle\mathcal{A}T_l(u),T_k(u-v)\rangle\geqslant c_2I-J-\|g_2\|_{L^1(\Omega)}$. Отсюда и из (2.4) выводим, что

$$c_2I\leqslant J+k\|f\|_{L^1(\Omega)}+\|g_2\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Кроме того, используя неравенство Юнга и (1.4), устанавливаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla T_l(u)) D_i v \leqslant \frac{c_2}{2}\, \Phi_{q,\nu}(T_l(u)) + \frac{c_2}{2c_1}\, g_1 + \left(\frac{2c_1}{c_2} + 1\right)^{n-1} \Phi_{q,\nu}(v) \ \text{ п. в. на } \Omega.$$

Следовательно,

$$J \leqslant \frac{c_2}{2}\, I + \frac{c_2}{2c_1}\, \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + \left(\frac{2c_1}{c_2} + 1\right)^{n-1} \|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Отсюда и из (2.5) выводим неравенство (2.3). Тем самым предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$*. Пусть* u *—* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$*. Пусть* $v \in V$ *и* $k \geqslant 1$*. Тогда*

$$\int\limits_{\{|u-v|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} \right\} dx \leqslant \frac{2k}{c_2}\, \|f\|_{L^1(\Omega)} + c_3 \|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)} + c_4. \tag{2.6}$$

Доказательство. Зафиксируем $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ положим $v_j = \psi - T_j(\psi - v)$. Используя (1.2), устанавливаем, что

$$\|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)} \to \|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Положим

$$w = \sum_{i=1}^{n} \nu_i |\delta_i u|^{q_i}, \qquad H = \{|u - v| < k\}$$

и для любого $j \in \mathbb{N}$ определим $H_j = \{|u - v_j| < k\}$. Заметим, что

$$1_{H_j \cap H} \to 1_H \ \text{ на } \Omega. \tag{2.8}$$

Действительно, пусть $x \in H$. Поскольку $v_j(x) \to v(x)$, существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$, имеем $|v_j(x) - v(x)| < k - |u(x) - v(x)|$. Тогда, зафиксировав $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$, получаем $|v_j(x) - u(x)| \leqslant |v_j(x) - v(x)| + |u(x) - v(x)| < k$. Следовательно, $x \in H_j$. Это позволяет заключить, что $1_{H_j \cap H}(x) \to 1_H(x)$. К такому же результату приходим, очевидно, и в случае $x \in \Omega \setminus H$. Таким образом, утверждение (2.8) справедливо.

Далее, пусть $j \in \mathbb{N}$. Поскольку $\psi \in L^\infty(\Omega)$ и $|T_j| \leqslant j$ на $\mathbb{R}$, имеем $v_j \in L^\infty(\Omega)$. Кроме того, поскольку $\psi, v \in V$, ввиду условия (2.2) справедливо включение $v_j \in V$. Таким образом, $v_j \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Положим $k_j = k + \|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}$. Используя предложение 5, получаем

$$\int\limits_{H_j} \Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u))\, dx \leqslant \frac{2k}{c_2}\, \|f\|_{L^1(\Omega)} + c_3 \|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)} + c_4. \tag{2.9}$$

В силу предложения 2 и того, что почти все точки множества H_j содержатся во множестве $\{|u| < k_j\}$, имеем $\Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u)) = w$ п. в. на H_j. Отсюда и из (2.9) вытекает, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\Omega} w \cdot 1_{H_j \cap H}\, dx \leqslant \frac{2k}{c_2}\, \|f\|_{L^1(\Omega)} + c_3 \|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)} + c_4. \tag{2.10}$$

Теперь из (2.7), (2.8), (2.10) и леммы Фату выводим неравенство (2.6). Предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$*. Пусть* u *—* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$*. Пусть* $v \in V$ *и* $k \geqslant 1$*. Тогда*

$$T_k(u - v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega), \tag{2.11}$$

$$v - T_k(v-u) \in V, \tag{2.12}$$

$$i \in \{1,\dots,n\} \Longrightarrow D_i T_k(u-v) = \delta_i u - D_i v \;\; \textit{п. в. на} \;\; \{|u-v|<k\}, \tag{2.13}$$

$$i \in \{1,\dots,n\} \Longrightarrow a_i(x,\delta u) D_i T_k(u-v) \in L^1(\Omega), \tag{2.14}$$

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u) D_i T_k(u-v) \Big\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u-v) dx. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$v_j = \psi - T_j(\psi - v), \qquad z_j = T_k(u - \psi + T_j(\psi - v)).$$

Поскольку $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $\{v_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу предложения 3 имеем $\{z_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Ясно, что

$$z_j \to T_k(u-v) \;\text{ сильно в }\; L^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Покажем, что последовательность $\{z_j\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и положим $k_j = k + \|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ввиду предложений 2 и 3 для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $D_i z_j = (D_i T_{k_j}(u) - D_i v_j) \cdot 1_{\{|u-v_j|<k\}}$ п. в. на Ω. Следовательно,

$$\|\Phi_{q,\nu}(z_j)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant 2^n \int\limits_{\{|u-v_j|<k\}} \Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u)) dx + 2^n \|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Оценивая интеграл функции $\Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u))$ по множеству $\{|u-v_j|<k\}$ с помощью предложения 5 и учитывая, что $\|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)} + \|\Phi_{q,\nu}(\psi)\|_{L^1(\Omega)}$, из (2.17) выводим, что последовательность $\{\Phi_{q,\nu}(z_j)\}$ ограничена в $L^1(\Omega)$. Теперь ясно, что последовательность $\{z_j\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому в силу (2.16) и предложения 1 имеем $T_k(u-v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и

$$z_j \to T_k(u-v) \;\text{ слабо в }\; \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega). \tag{2.18}$$

Тогда, учитывая, что ввиду (1.2) последовательность $\{v_j\}$ сходится к v сильно в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, имеем $v_j + z_j \to v + T_k(u-v)$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Кроме того, поскольку $\{v_j\} \subset V \cap L^\infty(\Omega)$, из свойства (i) определения 3 вытекает, что $\{v_j + z_j\} \subset V$. Теперь, учитывая, что множество V слабо замкнуто в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, из указанных свойств последовательности $\{v_j + z_j\}$ выводим, что $v - T_k(v-u) \in V$. Таким образом, включения (2.11) и (2.12) доказаны.

Далее, положим $H = \{|u-v|<k\}$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ определим $H_j = \{|u-v_j|<k\}$.

Зафиксируем $i \in \{1,\dots,n\}$, и пусть $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. Заметим, что ввиду второго из включений (1.1) для любой функции $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ справедливо включение $D_i w \in L^1(\Omega)$. Учитывая это, определим функционал $F_i : \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\langle F_i, w\rangle = \int_H \varphi D_i w dx$, $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Легко убедиться в том, что $F_i \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega))^*$. Поэтому ввиду (2.18) имеем $\langle F_i, z_j\rangle \to \langle F_i, T_k(u-v)\rangle$. Значит,

$$\int\limits_H \varphi D_i z_j dx \to \int\limits_H \varphi D_i T_k(u-v) dx. \tag{2.19}$$

В силу предложений 2 и 3 для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $D_i z_j \cdot 1_H = (\delta_i u - D_i v) \cdot 1_{H_j \cap H} + (D_i v - D_i v_j) \cdot 1_{H_j \cap H}$ п. в на Ω. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\int\limits_H \varphi D_i z_j dx = \int\limits_\Omega \varphi(\delta_i u - D_i v) \cdot 1_{H_j \cap H} dx + \int\limits_\Omega \varphi(D_i v - D_i v_j) \cdot 1_{H_j \cap H} dx. \tag{2.20}$$

Ввиду второго из равенств (1.1) и предложения 6 функция $\varphi(\delta_i u - D_i v) \cdot 1_H$ суммируема на Ω. Поэтому, учитывая, что $1_{H_j \cap H} \to 1_H$ на Ω, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int_\Omega \varphi(\delta_i u - D_i v) \cdot 1_{H_j \cap H} dx \to \int_H \varphi(\delta_i u - D_i v) dx. \tag{2.21}$$

Кроме того, так как вследствие (1.2) имеем $D_i v_j \to D_i v$ сильно в $L^1(\Omega)$, то

$$\int_\Omega \varphi(D_i v - D_i v_j) \cdot 1_{H_j \cap H} dx \to 0. \tag{2.22}$$

Из (2.19)–(2.22) вытекает, что

$$\int_H \varphi D_i T_k(u-v) dx = \int_H \varphi(\delta_i u - D_i v) dx.$$

Отсюда в силу произвольности функции $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ выводим, что $D_i T_k(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на H. Тогда, используя неравенство Юнга и (1.4), устанавливаем, что

$$|a_i(x, \delta u) D_i T_k(u-v)| \leqslant (2c_1 + 1) \sum_{l=1}^n \nu_l |\delta_l u|^{q_l} + \nu_i |D_i v|^{q_i} + 2g_1 \ \text{ п. в. на } \ H.$$

Отсюда и из предложения 6 вытекает, что $a_i(x, \delta u) D_i T_k(u-v) \cdot 1_H \in L^1(\Omega)$. Поэтому, учитывая, что ввиду равенства $T_k(u-v) = T_k(T_k(u-v))$ на Ω, (2.11) и (1.2) имеем $D_i T_k(u-v) = D_i T_k(u-v) \cdot 1_H$ п. в. на Ω, заключаем, что $a_i(x, \delta u) D_i T_k(u-v) \in L^1(\Omega)$. Таким образом, импликации (2.13) и (2.14) доказаны.

Наконец, докажем неравенство (2.15). Положим $H' = \{|u-v| = k\}$, $H'' = \{|u-v| > k\}$,

$$g = \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u + g_2, \qquad w = \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i v + g_2$$

и для любого $j \in \mathbb{N}$ определим

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u)[D_i v_j - D_i v], \qquad k_j = k + \|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Используя неравенство (1.4) и предложения 2 и 6, устанавливаем, что сужения функций g и w на H суммируемы на H и для любого $j \in \mathbb{N}$ сужения функций g, w и w_j на H_j суммируемы на H_j. Кроме того, в силу (1.5) функция g неотрицательна п. в. на Ω.

Пусть $j \in \mathbb{N}$. В силу свойства (ii) из определения 3 имеем

$$\langle \mathcal{A} T_{k_j}(u), T_k(u - v_j) \rangle \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u - v_j) dx. \tag{2.23}$$

Используя определение оператора $\mathcal{A}$, утверждение 2) предложения 4 и предложения 2 и 3, получаем

$$\langle \mathcal{A} T_{k_j}(u), T_k(u - v_j) \rangle = \int_{H_j} g\, dx - \int_{H_j} w\, dx - \int_{H_j} w_j\, dx. \tag{2.24}$$

Кроме того, с помощью предложения 2 устанавливаем, что если $\mathrm{meas}(H_j \cap H') > 0$, то $g = w$ п. в. на $H_j \cap H'$. В силу этого факта и неотрицательности функции g имеем

$$\int_{H_j} g\, dx - \int_{H_j} w\, dx \geqslant \int_{H_j \cap H} g\, dx - \int_{H_j \cap H} w\, dx - \int_{H_j \cap H''} w\, dx. \tag{2.25}$$

Из (2.23)–(2.25) выводим, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{H_j\cap H} g\,dx \leqslant \int\limits_{H_j\cap H} w\,dx + \int\limits_{H_j\cap H''} w\,dx + \int\limits_{H_j} w_j\,dx + \int\limits_{\Omega} f\,T_k(u-v_j)dx. \tag{2.26}$$

Учитывая, что функции f, $g\cdot 1_H$ и $w\cdot 1_H$ суммируемы на Ω, $T_k(u-v_j)\to T_k(u-v)$ на Ω и $1_{H_j\cap H}\to 1_H$ на Ω, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int\limits_{\Omega} f\,T_k(u-v_j)dx \to \int\limits_{\Omega} f\,T_k(u-v)dx, \qquad \int\limits_{H_j\cap H} g\,dx \to \int\limits_{H} g\,dx, \qquad \int\limits_{H_j\cap H} w\,dx \to \int\limits_{H} w\,dx. \tag{2.27}$$

Покажем, что

$$\int\limits_{H_j\cap H''} w\,dx \to 0, \qquad \int\limits_{H_j} w_j\,dx \to 0. \tag{2.28}$$

Прежде всего заметим, что в силу предложения 5 и ограниченности $\{\Phi_{q,\nu}(v_j)\}$ в $L^1(\Omega)$ существует $M>0$ такое, что для любого $j\in\mathbb{N}$ имеем

$$c_1\int\limits_{H_j}\Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u))dx + \|g_1\|_{L^1(\Omega)} \leqslant M. \tag{2.29}$$

Теперь зафиксируем $\varepsilon\in(0,1)$. Используя неравенство Юнга с ε, неравенство (1.4), равенство $\nabla T_{k_j}(u)=\delta u$ п. в. на H_j ($\forall\, j\in\mathbb{N}$), вытекающее из предложения 2, и, наконец, учитывая (2.29), получаем, что для любого $j\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_{H_j\cap H''} |w|dx \leqslant M\varepsilon + \varepsilon^{1-n}\int\limits_{H_j\cap H''}\Phi_{q,\nu}(v)dx + \int\limits_{H_j\cap H''} g_2dx, \tag{2.30}$$

$$\int\limits_{H_j}|w_j|dx \leqslant M\varepsilon + \varepsilon^{1-n}\|\Phi_{q,\nu}(v_j-v)\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.31}$$

В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега, сходимости $\{v_j\}$ к v на Ω и теоремы Егорова существуют число $\lambda>0$ и измеримое множество $\Omega'\subset\Omega$ такие, что

$$\int\limits_{H''\setminus\{|u-v|>k+\lambda\}}[\Phi_{q,\nu}(v)+g_2]dx \leqslant \varepsilon^n, \qquad \int\limits_{\Omega\setminus\Omega'}[\Phi_{q,\nu}(v)+g_2]dx \leqslant \varepsilon^n \tag{2.32}$$

и $\{v_j\}$ сходится к v равномерно на Ω'. Ввиду этой равномерной сходимости существует $j_0\in\mathbb{N}$ такое, что для любых $j\in\mathbb{N}$, $j\geqslant j_0$, и $x\in\Omega'$ имеем $|v_j(x)-v(x)|<\lambda$. Тогда, зафиксировав $j\in\mathbb{N}$, $j\geqslant j_0$, получаем, что $H_j\cap\{|u-v|>k+\lambda\}\cap\Omega'=\varnothing$. Учитывая это равенство и используя неравенства (2.32), оцениваем

$$\int\limits_{H_j\cap H''}[\Phi_{q,\nu}(v)+g_2]dx \leqslant \int\limits_{H''\setminus\{|u-v|>k+\lambda\}}[\Phi_{q,\nu}(v)+g_2]dx + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega'}[\Phi_{q,\nu}(v)+g_2]dx \leqslant 2\varepsilon^n.$$

Отсюда и из (2.30) ввиду произвольности $\varepsilon\in(0,1)$ следует первое из предельных соотношений (2.28). Второе же вытекает из (2.31) и того, что в силу (1.2) имеем $\Phi_{q,\nu}(v_j-v)\to 0$ сильно в $L^1(\Omega)$.

Теперь, учитывая, что $\nabla T_k(u-v)=\nabla T_k(u-v)\cdot 1_H$ п. в. на Ω, из (2.26)–(2.28) и (2.13) выводим неравенство (2.15). Предложение доказано.

Предложение 8. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Пусть u — T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Пусть $v \in V$. Тогда $u-v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, и для любых $k > 0$ и $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $D_iT_k(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на $\{|u-v| < k\}$ и $a_i(x,\delta u)D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $k > 0$. Предположим, что $k < 1$. Имеем $T_k(u-v) = T_k(T_1(u-v))$. Отсюда и из включения $T_1(u-v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, справедливого в силу предложения 7, выводим, что верно включение (2.11). Из того же предложения вытекает, что включение (2.11) справедливо и в случае $k \geqslant 1$. Таким образом, для любого $k > 0$ имеем $T_k(u-v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Значит, $u-v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Далее, пусть $k > 0$ и $i \in \{1,\dots,n\}$. Предположим, что $k < 1$. Поскольку $T_k(u-v) = T_k(T_1(u-v))$, ввиду (1.2) имеем $D_iT_k(u-v) = D_iT_1(u-v)\cdot 1_{\{|T_1(u-v)|<k\}}$ п. в. на Ω, причем в силу предложения 7 имеем $D_iT_1(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на $\{|u-v| < 1\}$. Тогда, учитывая равенство $\{|u-v|<k\} = \{|T_1(u-v)|<k\}$, получаем $D_iT_k(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на $\{|u-v| < k\}$, после чего аналогично изложенному в доказательстве предложения 7 устанавливаем, что $a_i(x,\delta u)D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$. Такие же результаты справедливы и в случае $k \geqslant 1$, что вытекает из предложения 7. Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда u есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в том и только в том случае, если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого $v \in V$ имеем $u - v \in \mathcal{M}_a(u)$;*

2) *для любых $v \in V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v-u) \in V$ и*

$$\int\limits_\Omega \bigg\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u)D_iT_k(u-v)\bigg\}dx \leqslant \int\limits_\Omega f\,T_k(u-v)dx.$$

Доказательство. Пусть u — T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Ясно, что $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Из предложений 7 и 8 выводим, что справедливы утверждения 1) и 2). Обратно, пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и справедливы утверждения 1) и 2). Из этих утверждений и утверждения 2) предложения 4 вытекает, что имеют место свойства (i) и (ii) из определения 3. Значит, u есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Теорема доказана.

2.2. Сдвиговые T-решения и $W^{1,1}$-регулярные T-решения

Пусть V — замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющее только условию (2.2).

Определение 4. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. ψ-сдвиговым T-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, будем называть функцию $u : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям:

(i) если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$, то $v + \psi + T_k(u - v - \psi) \in V$;

(ii) если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u-\psi)), T_k(u-v-\psi)\rangle \leqslant \int\limits_\Omega f\,T_k(u-v-\psi)dx.$$

В работе [1] установлено, что для любых функций $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$ существует единственное ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

Используя результаты, установленные в предыдущем подразделе, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Пусть u — ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для любого $v \in V$ имеем $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$;

2) для любых $v \in V$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i T_k(u - v) = \delta_i(u - \psi) - D_i(v - \psi)$ п. в. на $\{|u - v| < k\}$ и $a_i(x, \nabla\psi + \delta(u - \psi))D_i T_k(u - v) \in L^1(\Omega)$;

3) для любых $v \in V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v - u) \in V$ и

$$\int\limits_\Omega \biggl\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla\psi + \delta(u - \psi))D_i T_k(u - v) \biggr\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u - v) dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ определим функцию $\tilde{a}_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\tilde{a}_i(x, \xi) = a_i(x, \nabla\psi(x) + \xi), \qquad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n. \tag{2.33}$$

В силу неравенств (1.4) и (1.5) функции $\tilde{a}_i$ удовлетворяют таким же неравенствам, но с другими константами $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ и неотрицательными функциями $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in L^1(\Omega)$ вместо констант c_1, c_2 и функций g_1, g_2, которые фигурируют в (1.4) и (1.5). Кроме того, ввиду неравенства (1.6) такое же неравенство верно для функций $\tilde{a}_i$.

Далее, так как $\psi \in V$ и множество V удовлетворяет условию (2.2), то множество $-\psi + V$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2).

Наконец, поскольку по условию теоремы u — ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в силу определения 4 имеем: $u - \psi \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$; если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$, то $v - T_k(v - (u - \psi)) \in -\psi + V$; если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\int\limits_\Omega \biggl\{ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \nabla T_{k_1}(u - \psi))D_i T_k(u - \psi - v) \biggr\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u - \psi - v) dx.$$

Это означает, что функция $u - \psi$ есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\tilde{\mathcal{A}}, -\psi + V, f)$, где $\tilde{\mathcal{A}} : \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega))^*$ — оператор такой же структуры, как и оператор $\mathcal{A}$, но с коэффициентами $\tilde{a}_i$. Поэтому из предложения 8 и теоремы 1 выводим, что справедливы следующие утверждения:

$1'$) для любого $v \in -\psi + V$ имеем $u - \psi - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$;

$2'$) для любых $v \in -\psi + V$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i T_k(u - \psi - v) = \delta_i(u - \psi) - D_i v$ п. в. на $\{|u - \psi - v| < k\}$ и $\tilde{a}_i(x, \delta(u - \psi))D_i T_k(u - \psi - v) \in L^1(\Omega)$;

$3'$) для любых $v \in -\psi + V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v - (u - \psi)) \in -\psi + V$ и

$$\int\limits_\Omega \biggl\{ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \delta(u - \psi))D_i T_k(u - \psi - v) \biggr\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u - \psi - v) dx.$$

Из утверждений $1'$)–$3'$) выводим, что утверждения 1)–3) заключения теоремы справедливы и тем самым ее доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что если $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и для любых $v \in V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v - u) \in V$, то для любого $v \in V$ справедливо включение $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Теорема 3. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Тогда u есть ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в том и только в том случае, если $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и справедливы следующие утверждения:*

1) *для любых* $v \in V$ *и* $k \geqslant 1$ *имеем* $v - T_k(v-u) \in V$*;*

2) *для любых* $v \in V$*,* $k > 0$ *и* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имеем* $a_i(x, \nabla\psi + \delta(u-\psi))D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$*;*

3) *для любых* $v \in V$ *и* $k \geqslant 1$ *имеем*

$$\int\limits_\Omega \biggl\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla\psi + \delta(u-\psi))D_iT_k(u-v)\biggr\}dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u-v)dx.$$

Доказательство. Если u есть ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, то $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и в силу теоремы 2 справедливы утверждения 1)–3).

Обратно, пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и справедливы утверждения 1)–3). Из утверждения 1) следует, что выполняется условие (i) определения 4. Далее, пусть $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу утверждения 1) и замечания 1 справедливо включение $u - \psi \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда в силу утверждения 2) предложения 4 применительно к случаю, когда вместо функций a_i рассматриваются функции $\tilde{a}_i$, определенные формулой (2.33), для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla\psi + \delta(u-\psi))D_iT_k(u-\psi-v) = a_i(x, \nabla\psi + \nabla T_{k_1}(u-\psi))D_iT_k(u-\psi-v)$ п. в. на Ω. Отсюда и из утверждения 3) и определения оператора $\mathcal{A}$ вытекает неравенство, позволяющее заключить, что выполняется условие (ii) определения 4. Таким образом, u есть ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Теорема доказана.

Теперь введем понятие $W^{1,1}$-регулярного T-решения вариационных неравенств с L^1-данными, опишем его связь с понятием сдвигового T-решения и докажем теорему о существовании и единственности $W^{1,1}$-регулярного T-решения.

Определение 5. Пусть $f \in L^1(\Omega)$. $W^{1,1}$-регулярным T-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f), будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ такую, что:

(i) для любого $v \in V$ имеем $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$;

(ii) для любых $v \in V$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla u)D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$;

(iii) для любых $v \in V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v-u) \in V$ и

$$\int\limits_\Omega \biggl\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u)D_iT_k(u-v)\biggr\}dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u-v)dx.$$

Предложение 9. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$ *и* $\psi \in V$*. Пусть* u *—* ψ*-сдвиговое* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$*. Пусть* $u - \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$*. Тогда* u *есть* $W^{1,1}$*-регулярное* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a, V, f)*.*

Доказательство. Поскольку $V \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, $\psi \in V$ и $u - \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, имеем $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. К тому же очевидно, что справедливы утверждения 1)–3) теоремы 2. Согласно первому из них имеет место свойство (i) из определения 5. Следовательно, $u - \psi \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Используя это включение и предложение 2, а также включение $u - \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, устанавливаем, что $\delta(u-\psi) = \nabla u - \nabla\psi$ п. в. на Ω. Отсюда и из утверждений 2) и 3) теоремы 2 вытекает, что имеют место свойства (ii) и (iii) из определения 5. Предложение доказано.

Предложение 10. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$*. Пусть* u *—* $W^{1,1}$*-регулярное* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a, V, f)*. Пусть* $\psi \in V$*. Тогда* u *есть* ψ*-сдвиговое* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ввиду определения 5 имеем $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ и $u - \psi \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, то, используя предложение 2 и учитывая, что $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, получаем $\delta(u-\psi) = \nabla u - \nabla\psi$ п. в. на Ω. Отсюда и из свойств (ii) и (iii) из определения 5 выводим, что справедливы утверждения 1)–3) из формулировки теоремы 3. Тогда согласно этой теореме u есть ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предложение доказано.

Положим

$$\overline{q} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}\right)^{-1}$$

и для любого $m \in \mathbb{R}^n$ такого, что $m_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, определим

$$p_m = n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1+m_i}{m_i q_i} - 1\right)^{-1}.$$

Заметим, что если $m \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $m_i \geqslant 1/(q_i-1)$, то $p_m > 1$. Кроме того, заметим, что если $m \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $m_i \geqslant 1/(q_i-1)$ и $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, то пространство $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L^{p_m}(\Omega)$. Более подробно по этому поводу см. [1; 13].

Теорема 4. *Пусть существует элемент $m \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами такой, что*

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\} \qquad \frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q}-1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i}, \quad \frac{1}{\nu_i} \in L^{m_i}(\Omega). \tag{2.34}$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда существует единственное $W^{1,1}$-регулярное T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\psi \in V$. В силу [1, теорема 7.1] существует ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Это означает, что существует функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (i) и (ii) определения 4. Тогда, как указано в доказательстве теоремы 2, функция $u-\psi$ есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\tilde{\mathcal{A}}, -\psi + V, f)$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ — оператор, упомянутый в том же доказательстве. Поэтому, учитывая (2.34), в силу [1, следствие 6.3] имеем $u - \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. Отсюда и из предложения 9 вытекает, что u есть $W^{1,1}$-регулярное T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f).

Далее, пусть u_1 и u_2 — $W^{1,1}$-регулярные T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f). Зафиксировав $\psi \in V$, в силу предложения 10 получаем, что u_1 и u_2 — ψ-сдвиговые T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда в силу [1, теорема 7.2] имеем $u_1 = u_2$ п. в. на Ω. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. В изотропном и невырождающемся случае ($q_1 = \dots = q_n$ и $\nu_1 = \dots = \nu_n \equiv 1$) существование элемента $m \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами такого, что выполняется условие (2.34), равносильно требованию $q_1 > 2 - 1/n$.

В заключение раздела отметим, что разнообразные примеры замкнутых выпуклых множеств в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2), приведены в [1, § 8].

3. Вариационные неравенства с множествами ограничений из $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$

Пусть V — множество в $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такое, что $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$.

Поскольку $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, имеем $V\cap L^\infty(\Omega)\subset V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому

$$V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\neq\varnothing. \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что множество $V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ выпукло и замкнуто в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

В дальнейшем будет полезен такой результат.

Предложение 11. *Предположим, что выполняется следующее условие*:

$(*)$ *для любых* $w\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$ *и* $k>0$ *имеем* $v-T_k(v-w)\in V$.

Тогда для любых $w,v\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *и* $k>0$ *имеем* $v-T_k(v-w)\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $w,v\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $k>0$. Зафиксируем $\psi\in V\cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $j\in\mathbb{N}$ положим $v_j=\psi-T_j(\psi-v)$. Ввиду условия $(*)$ имеем $\{v_j\}\subset V\cap L^\infty(\Omega)$. Теперь положим $z=v-T_k(v-w)$ и для любого $j\in\mathbb{N}$ определим $z_j=v_j-T_k(v_j-w)$. Очевидно, что $\{z_j\}\subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому, учитывая включение $\{v_j\}\subset V\cap L^\infty(\Omega)$ и условие $(*)$, имеем

$$\{z_j\}\subset V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega). \tag{3.2}$$

Поскольку $v_j\to v$ на Ω, имеем $z_j\to z$ на Ω. Кроме того, для любого $j\in\mathbb{N}$ имеем $|z_j|\leqslant |w|+2|v|+4|\psi|$ на Ω. Поэтому, учитывая, что $w,v,\psi\in L^1(\Omega)$, получаем

$$z_j\to z \text{ сильно в } L^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Наконец, используя (1.2), для любых $j\in\mathbb{N}$ и $i\in\{1,\dots,n\}$ получаем $|D_iz_j|\leqslant|D_iw|+|D_iv|+|D_i\psi|$ п. в. на Ω. Отсюда и из вышеприведенной оценки для модулей функций z_j вытекает, что последовательность $\{z_j\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Тогда, учитывая (3.3), из предложения 1 выводим, что $z_j\to z$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому в силу (3.2) и выпуклости и замкнутости множества $V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ заключаем, что $z\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Предложение доказано.

Введем понятие $\mathcal{T}$-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке (a,V,f), где $f\in L^1(\Omega)$, и докажем несколько результатов, связанных с этим понятием.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть $f\in L^1(\Omega)$. $\mathcal{T}$-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке (a,V,f), будем называть функцию $u\in V$ такую, что:

(i) для любого $v\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ имеем $u-v\in\mathcal{M}_a(u)$;

(ii) для любых $v\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $k\geqslant 1$ имеем

$$\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u)D_iT_k(u-v)\Big\}dx\leqslant\int\limits_\Omega f\,T_k(u-v)dx.$$

Предложение 12. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

$(*_1)$ *для любых* $w\in V$, $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$ *и* $k>0$ *имеем* $v-T_k(v-w)\in V$;

$(*_2)$ *если* $w\in\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$ *и для любого* $k\in\mathbb{N}$ *имеем* $v-T_k(v-w)\in V$, *то* $w\in V$.

Пусть $f\in L^1(\Omega)$. *Тогда* u *есть* $\mathcal{T}$*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a,V,f), *в том и только в том случае, если* $u\in\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *и справедливы следующие утверждения*:

a) *для любых* $v \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *и* $k \geqslant 1$ *имеем* $v - T_k(v-u) \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$;

b) *если* $v \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ *и* $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, *то*

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u-v)\rangle \leqslant \int\limits_\Omega f\,T_k(u-v)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что ввиду (3.1), условия $(*_1)$ и предложения 11 множество $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2).

Пусть u есть $\mathcal{T}$-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a,V,f). Тогда $u \in V$ и имеет место свойство (ii) из определения 6. Используя включение $u \in V$, условие $(*_1)$ и предложение 3, устанавливаем, что утверждение a) справедливо. Кроме того, в силу свойства (ii) из определения 6 и утверждения 2) предложения 4 получаем, что справедливо утверждение b).

Обратно, пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и справедливы утверждения a) и b). Тогда, учитывая замечание относительно множества $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, сделанное в начале доказательства, из теоремы 1 применительно к множеству $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ выводим, что имеют место свойства (i) и (ii) из определения 6 и справедлива импликация $v \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $k \geqslant 1 \Longrightarrow v - T_k(v-u) \in V$. Эта импликация вместе с условием $(*_2)$ влечет включение $u \in V$. Таким образом, u есть $\mathcal{T}$-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a,V,f). Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 3. То, что $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и справедливы утверждения a) и b), приведенные в формулировке предложения 12, означает, что u есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega), f)$.

Теорема 5. *Предположим, что выполняются условия* $(*_1)$ *и* $(*_2)$ *предложения* 12. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$. *Тогда существует единственное* $\mathcal{T}$*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a,V,f).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая замечание относительно множества $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, сделанное в начале доказательства предложения 12, из [1, теорема 4.1] применительно к множеству $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ выводим, что существует функция $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такая, что справедливы утверждения a) и b) из формулировки предложения 12. Из этого предложения вытекает, что u есть $\mathcal{T}$-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a,V,f).

Далее, пусть u_1 и u_2 — $\mathcal{T}$-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке (a,V,f). Из предложения 12 следует, что u_1 и u_2 — T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega), f)$. Тогда согласно [1, теорема 5.1] применительно к множеству $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ имеем $u_1 = u_2$ п. в. на Ω. Теорема доказана.

Теорема 6. *Предположим, что выполняются условия* $(*_1)$ *и* $(*_2)$ *предложения* 12. *Пусть* $m \in \mathbb{R}^n$, *причем для любого* $i \in \{1,\dots,n\}$ *имеем* $m_i \geqslant 1/(q_i - 1)$ *и* $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. *Пусть* $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$. *Тогда* u *есть* $\mathcal{T}$*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a,V,f), *в том и только в том случае, если* $u \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *и*

$$\forall\, v \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \qquad \langle \mathcal{A}u, u-v\rangle \leqslant \int\limits_\Omega f(u-v)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы есть следствие [1, предложение 3.1] применительно к множеству $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и предложения 12.

В заключение приведем несколько примеров множества $V \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такого, что $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$, множество $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ выпукло и замкнуто в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и выполняются условия $(*_1)$ и $(*_2)$ предложения 12.

П р и м е р 1. $V = \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

П р и м е р 2. $V = \{v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega) : v \geqslant 0$ п. в. на $\Omega\}$.

П р и м е р 3. $V = \{v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega) : h(x, \delta v(x)) \leqslant 0$ для п. в. $x \in \Omega\}$, где $h : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, причем для почти всех $x \in \Omega$ справедливо неравенство $h(x,0) \leqslant 0$ и функция $h(x,\cdot)$ непрерывна и выпукла на $\mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 4. Учитывая непустоту множества $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \setminus \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, легко видеть, что если $V = \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, то множество V не удовлетворяет условию $(*_2)$ предложения 12.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ковалевский А.А., Горбань Ю.С.** О T-решениях вырождающихся анизотропных эллиптических вариационных неравенств с L^1-данными // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 1. С. 101–160.
2. **Boccardo L., Gallouët T.** Problèmes unilatéraux avec données dans L^1 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1990. Vol. 311, no. 10. P. 617–619.
3. **Boccardo L., Cirmi G.R.** Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1 data // J. Convex Anal. 1999. Vol. 6, no. 1. P. 195–206.
4. **Oppezzi P., Rossi A.M.** Esistenza di soluzioni per problemi unilateri con dato misura o in L^1 // Ric. Mat. 1996. Vol. 45, no. 2. P. 491–513.
5. **Oppezzi P., Rossi M.** Unilateral problems with measure data: links and convergence // Differential Integral Equations. 2001. Vol. 14, no. 9. P. 1051–1076.
6. **Leone C.** Existence and uniqueness of solutions for nonlinear obstacle problems with measure data // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. 2001. Vol. 43, no. 2. P. 199–215.
7. **Brandolini B., Randazzo L.** An existence result for a class of variational inequalities with L^1-data // Ric. Mat. 2001. Vol. 50, no. 2. P. 195–207.
8. **Benkirane A., Bennouna J.** Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1-data in Orlicz spaces // Ital. J. Pure Appl. Math. 2004. № 16. P. 87–102.
9. **Aharouch L., Akdim Y., Azroul E.** Quasilinear degenerate elliptic unilateral problems // Abstr. Appl. Anal. 2005. № 1. P. 11–31.
10. **Atik Y., Rakotoson J.-M.** Local T-sets and degenerate variational problems. I // Appl. Math. Lett. 1994. Vol. 7, no. 4. P. 49–53.
11. **Atik Y.** Local T-sets and degenerate quasilinear elliptic bilateral problems with an L^1-datum // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. 1999. Vol. 38, no. 7. P. 827–867.
12. **Kovalevsky A.A., Gorban Y.S.** Degenerate anisotropic variational inequalities with L^1-data // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2007. Vol. 345, no. 8. P. 441–444.
13. **Ковалевский А.А., Горбань Ю.С.** Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с L^1-данными: препринт / Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины. Донецк, 2007. 92 с.
14. **Киндерлерер Д., Стампаккья Г.** Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
15. **Kovalevsky A.A.** On a sharp condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1-right-hand sides // Ukr. Mat. Bull. 2005. Vol. 2, no. 4. P. 507–545.

Ковалевский Александр Альбертович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: alexkvl71@mail.ru

Поступила 18.12.2014