

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА АВТОРЕЗОНАНСНОГО СОЛИТОНА<sup>1</sup>

О. М. Киселев

Исследована автофазировка в одномерной среде при воздействии внешней силы с медленно меняющейся частотой. В типичной ситуации автофазировка описывается нестационарным нелинейным уравнением Шредингера с внешней силой. При больших значениях временной переменной построен главный член локализованного в пространстве растущего асимптотического решения с солитонным профилем в главном порядке. Оказалось, что растущее по времени асимптотическое решение может быть получено для внешнего возбуждения с убывающей амплитудой. Выведены необходимые условия роста такого решения при диссипации.

Ключевые слова: авторезонанс, автофазировка, солитон.

O. M. Kiselev. Asymptotics of an autoresonance soliton.

Phase locking is studied in a one-dimensional medium under the action of an external force with slowly changing frequency. In a typical situation, the phase locking is described by a nonstationary nonlinear Schrödinger equation with external force. For large values of the time variable, the leading term of a space-localized growing asymptotic solution with soliton profile in the principal order is constructed. It turned out that a time-growing asymptotic solution can be obtained for an external perturbation with decreasing magnitude. Necessary growth conditions are deduced for such a solution under dissipation.

Keywords: autoresonance, phase locking, soliton.

## Введение

В работе исследуется асимптотическое при  $\tau \rightarrow \infty$  решение уравнения

$$-i\partial_\tau \Psi + \partial_\zeta^2 \Psi + (|\Psi|^2 - \tau) \Psi + F - i\frac{\nu}{2} \Psi = 0. \quad (0.1)$$

Это уравнение определяет огибающую одиночной моды плоской волны малой амплитуды в нелинейной среде с внешним осциллирующим возбуждением, частота которого линейно меняется. Здесь комплекснозначная функция  $F$  определяется огибающей возмущения в среде, параметр  $\nu$  определяется диссипацией в среде. Уравнение (0.1) можно рассматривать как обобщение нелинейного уравнения Шредингера [1–3], а также как аналог известного обыкновенного уравнения главного резонанса [4; 5] и как нелинейное обобщение уравнения локального резонанса [6].

С точки зрения приложений в физике важно изучить асимптотические свойства решений этого уравнения при больших  $\tau$  и выделить растущие по  $\tau$  и локализованные по  $\zeta$  решения, если таковые существуют. В ситуации общего положения существование растущих решений открывает путь к генерации уединенной волны конечной амплитуды на авторезонансе или, что то же самое, при автофазировке. Ранее были получены асимптотические формулы для генерации огибающей в виде солитона нелинейного уравнения Шредингера на локальном резонансе [7; 8]. Для авторезонанса известны в большей степени численные результаты по генерации кноидальных волн, близких к солитонам [9; 10], и по управлению параметрами солитона как конечной, так и малой амплитуды с помощью внешней накачки [11–13].

Хорошо известно уравнение главного резонанса, определяющее нелинейную динамическую систему с авторезонансом:

$$i\psi' + (|\psi|^2 - \tau)\psi = F. \quad (0.2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00078).

Существуют авторезонансные решения уравнения (0.2), растущие, как  $\sqrt{\tau}$  при  $F = \text{const}$  (см., например, обзор [5]).

Удивительный факт — существование специального решения  $\psi = \sqrt{\tau}e^{ia}$ , где  $a \in [0, 2\pi)$ , уравнения главного резонанса (0.2) с убывающей накачкой  $F = ie^{ia}/(2\sqrt{\tau})$ . Это специальное решение растет так же быстро, как авторезонансные решения уравнения с постоянной неубывающей накачкой  $F$ . По сути, все растущие, как  $\sqrt{\tau}$ , решения уравнения (0.2) с амплитудой накачки  $F$  из интервала  $\mathcal{O}(1/\sqrt{\tau}) \leq F \leq \mathcal{O}(\sqrt{\tau})$  можно рассматривать как возмущения этого специального решения.

Цель предлагаемой работы — построить солитонный аналог специального растущего решения для (0.1), который бы являлся главным членом авторезонансной асимптотики.

Результат работы состоит в том, что приведены необходимые условия для параметров главного члена растущего по  $\tau$  и локализованного по  $\zeta$  асимптотического решения уравнения (0.1):

$$\Psi \sim -\sqrt{2\tau} \frac{2i\eta_0 \exp(-2i\kappa_0\sqrt{\tau}\zeta - 2i(\kappa_0^2 - \eta_0^2)\tau^2 + i\alpha_0)}{\cosh(2\eta_0\sqrt{\tau}\zeta + 4\eta_0\kappa_0\tau^2 + \beta_0)}.$$

В частности, для наиболее простого случая  $F = \text{const}$  параметры решения  $\kappa_0, \eta_0, \alpha_0, \beta_0$  такие, что

$$4(\kappa_0^2 + \eta_0^2) = 1, \quad \alpha_0 - \frac{\kappa_0\beta_0}{\eta_0} = \frac{\pi}{2} - \arg(F).$$

## 1. Вывод модельного уравнения для авторезонанса

Для прояснения связи между параметрами нелинейной среды и уравнением (0.1) полезно привести схему вывода уравнения (0.1), например, воспользовавшись уравнением sine-Gordon. Уравнение sine-Gordon является популярной моделью при исследовании уединенных волн в различных нелинейных средах с дисперсией. Учет внешних возмущений среды приводит к различным вариантам возмущений уравнения sine-Gordon. В предлагаемой работе изучается зарождение уединенной волны — бризера в возмущенном уравнении

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = \varepsilon^3 f \cos(S) - \varepsilon^3 \nu u_t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.1)$$

Фаза возмущения  $S = kx + \omega t - \varepsilon^2 t^2/2$ , где  $\omega^2 = k^2 + 1$ ,  $k$  — произвольный параметр. Амплитуда возмущения —  $f$ . Возмущенное уравнение (1.1) учитывает, например, слабое внешнее воздействие.

В этом разделе приведена схема вывода нелинейного уравнения солитонного авторезонанса. Эта схема повторяет известный формальный вывод автономного нелинейного уравнения Шредингера для слабонелинейных волн [1–3]. Приведенные ниже выкладки объясняют появление неавтономного слагаемого в нелинейном уравнении Шредингера и связь этого слагаемого с модулированной частотой внешнего возмущения уравнения (1.1). Математическое обоснование приведенной здесь схемы возможно при педантичном следовании [14].

Будем считать переменные  $x, t$  быстрыми, а переменные  $t_1 = \varepsilon t$ ,  $x_1 = \varepsilon x$ ,  $t_2 = \varepsilon^2 t$  — медленными. Асимптотическое решение с малой амплитудой будем строить с помощью метода многих масштабов:

$$u(x, t, \varepsilon) \sim \varepsilon u_1(x, t, x_1, t_1, t_2, \varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, t, x_1, t_1, t_2, \varepsilon) + \varepsilon^3 u_3(x, t, x_1, t_1, t_2, \varepsilon). \quad (1.2)$$

Зависимость от быстрых и медленных переменных удобно разделить, оставив зависимость от быстрых переменных и малого параметра только в фазовой переменной  $S$ :

$$u_1(x, t, x_1, t_1, t_2, \varepsilon) = A(t_1, x_1, t_2) \exp(iS) + c.c.,$$

где  $c.c.$  — комплексно сопряженное слагаемое.

После подстановки асимптотической формулы (1.2) в уравнение (1.1) и разложения по степеням параметра  $\varepsilon$  в порядке  $\varepsilon$  получится тождественный нуль. В порядке  $\varepsilon^2$  получается неоднородное уравнение для  $u_2$ :

$$\partial_{tt}u_2 - \partial_{xx}u_2 + u_2 = (-i\omega\partial_{t_1}A + ik\partial_{x_1}A) \exp(iS) + c.c.. \quad (1.3)$$

Зависимость от быстрых переменных в множителе  $\exp(iS)$  из правой части этого уравнения содержит решение однородного уравнения для  $u_2$ . Такая правая часть приводит к растущим по быстрой переменной решениям уравнения для  $u_2$ . Для равномерной ограниченности по  $t$  необходимо выполнение условия

$$\omega\partial_{t_1}A - k\partial_{x_1}A = 0. \quad (1.4)$$

Это условие — уравнение для  $A$ . Решение этого уравнения — произвольная функция от характерной переменной  $\xi_1 = kt_1 + \omega x_1$ . В результате уточнена зависимость  $u_1$  от медленных переменных  $x_1$  и  $t_1$ :  $A = A(\xi_1, t_2)$ .

В порядке  $\varepsilon^3$  получается уравнение

$$\partial_{tt}^2u_3 - \partial_{xx}^2u_3 + u_3 = f \cos(S) + \frac{1}{6}u_1^3 - 2i\omega\partial_{t_2}u_1 + \partial_{\xi_1}^2u_1 - 2t_2\omega u_1 - i\nu\omega u_1. \quad (1.5)$$

Для ограниченности  $u_3$  по быстрой переменной  $t$  необходимо исключить слагаемые, соответствующие решениям однородного уравнения из правой части. В результате получается уравнение для функции  $A$ :

$$-2i\omega\partial_{t_2}A + \partial_{\xi_1}^2A + \left(-2\omega t_2 + \frac{1}{2}|A|^2\right)A + \frac{1}{2}f - i\nu\omega A = 0. \quad (1.6)$$

Переобозначим  $t_2 = \tau$  и сделаем замены:  $\sqrt{2\omega}\xi_1 = \zeta$ ,  $A(t_2, \xi_1) = 2\sqrt{\omega}\Psi(\tau, \zeta)$ ,  $F = f/(8\sqrt{\omega^3})$ . В результате получится уравнение (0.1). Это уравнение является обобщением нелинейного уравнения Шредингера для авторезонанса с диссипацией.

Результат этого раздела — формальный вывод уравнения (0.1) как уравнения для огибающей волны малой амплитуды в среде с дисперсией и диссипацией.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Уравнение (0.1) является необходимым условием ограниченности при  $t = O(\varepsilon^{-2})$  поправок в формальном асимптотическом решении (1.2) уравнения (1.1).

## 2. Специальное возмущение нелинейного уравнения Шредингера

Для того чтобы убедиться, что уравнение (0.1) действительно определяет авторезонансную накачку в нелинейной среде, необходимо показать, что это уравнение допускает решения растущие по  $\tau$  и локализованные по переменной  $\zeta$ . В этом разделе исследуется бездиссипативная система, т. е.  $\nu = 0$ .

Для исследования растущих при  $\tau \rightarrow \infty$  решений удобно сделать замены

$$\bar{\Psi} = \sqrt{2\sqrt{2\sigma}}\phi(\sigma, z) \exp(-i\sigma), \quad \sigma = \frac{\tau^2}{2}, \quad z = \sqrt[4]{2\sigma}\zeta.$$

Здесь и ниже черта сверху означает комплексное сопряжение.

Подставим формулу для  $\Psi$  в уравнение. После несложных преобразований получим

$$i\partial_{\sigma}\phi + \partial_{zz}\phi + 2|\phi|^2\phi + \frac{\mathcal{F}}{\sigma^{3/4}} \exp(i\sigma) + \frac{i}{4\sigma}\phi = 0, \quad (2.1)$$

где  $\mathcal{F} = \bar{F}/(2\sqrt[4]{2})$ . Это уравнение ниже называется возмущенным нелинейным уравнением Шредингера. Как возмущение здесь рассматриваются слагаемые с убывающими при  $\sigma \rightarrow \infty$  коэффициентами.

В результате построение авторезонансного решения при  $\sigma \rightarrow \infty$  сводится к построению решения возмущенного нелинейного уравнения Шредингера с неубывающей амплитудой.

Солитонное решение невозмущенного нелинейного уравнения Шредингера при  $\nu = 0$  имеет вид

$$\psi_0 = \frac{2i\eta \exp(-2i\kappa z - i\Omega + \alpha)}{\cosh(2\eta z + V + \beta)},$$

где  $\Omega = 4(\kappa^2 - \eta^2)\sigma$ ,  $V = 8\kappa\eta\sigma$ . Параметры решения:  $\kappa, \eta, \alpha, \beta$  вещественные.

С помощью прямых замен можно показать, что при  $\mathcal{F} \equiv 0$  амплитуда солитонных решений возмущенного уравнения (2.1) убывает при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Для этого достаточно заметить, что уравнение (0.1) при  $\nu = 0$  и  $\mathcal{F} \equiv 0$  заменой  $\bar{\Psi} = \sqrt{2\sqrt{2}}\psi \exp(-i\tau)$  приводится к невозмущенному нелинейному уравнению Шредингера для функции  $\psi$ . В соответствии с заменой для  $\phi$  солитонные решения нелинейного уравнения для  $\psi$  переходят в локализованные убывающие решения уравнения (2.1) при  $\mathcal{F} \equiv 0$ .

Прямая подстановка  $\psi_0$  в возмущенное уравнение (2.1) дает формулу для возмущения

$$\mathcal{F} = \frac{-i}{4\sigma^{1/4}}\psi_0,$$

при котором заведомо существует авторезонансное решение.

Такой выбор возмущения выглядит как специальный трюк. В следующем разделе будет показано, что при возмущении более общего характера солитонное решение является главным членом асимптотического решения при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Если полагать, что амплитуда накачки зависит от временной переменной  $\sigma$  монотонно, тогда получим ограничение на параметры солитонной асимптотики

$$4(\eta^2 + \kappa^2) = 1. \tag{2.2}$$

В результате для внешней накачки, убывающей по  $\sigma$  и локализованной по  $z$ , получим формулу

$$\mathcal{F} = \frac{\eta \exp(-2i\kappa y/\eta)}{2\sqrt[4]{\sigma} \cosh(y)}, \quad y = 2\eta z + 8\kappa\eta\sigma.$$

В этом разделе приведена в явном виде формула для амплитуды накачки, при которой существует авторезонансное локализованное решение.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Утверждение 2.** *В случае внешней накачки специального вида  $\mathcal{F}$  существует экспоненциально убывающее по  $|\zeta|$  решение уравнения (0.1), амплитуда которого растет, как  $\mathcal{O}(\sqrt{\tau})$ .*

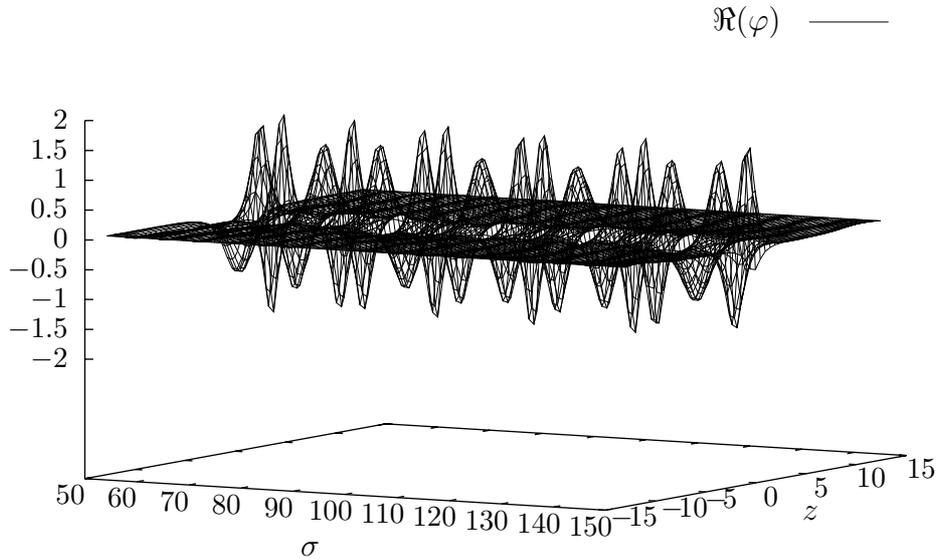
### 3. Численное решение

Для построения численного решения уравнения (2.1) при  $\mathcal{F} \equiv 1$  поставим смешанную задачу с солитонным начальным условием при большом значении  $\sigma$  и нулями на границе при большом значении  $|z|$ . Численное решение построено с помощью неявной схемы и метода прогонки. Частные производные по  $z$  вычисляются по пяти точкам с шагом 0.05. Шаг сетки по  $\sigma$  равен 0.001. Численное решение получено для смешанной задачи для уравнения (2.1) с начальным условием

$$\phi = \frac{-2\eta \exp(-4i\eta^2\sigma)}{\cosh(2\eta z)}$$

при  $\sigma = 50$ , параметром  $\eta = 1/2$  и нулях при  $|z| = 15$ .

Результат вычислений представлен на рисунке. Там показана вещественная часть неубывающего и сохраняющего солитонную форму численного решения. Такое решение соответствует авторезонансу. В соответствии с результатом предыдущего раздела параметры авторезонансного решения:  $\kappa = 0$ ,  $\eta = 1/2$ .



Вещественная часть незатухающего численного решения с солитонным профилем.

#### 4. Асимптотическое решение возмущенного нелинейного уравнения Шредингера

Здесь построен главный член асимптотики для уравнения (2.1) при  $\sigma \rightarrow \infty$  в солитонной форме. При построении удобно воспользоваться известными результатами теории возмущения солитонов [15–17]. Напрямую они неприменимы, поскольку разработаны для возмущения уравнения по произвольному малому параметру и для построения семейства решений по этому параметру. Здесь же исследуется уравнение с возмущением, убывающим при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Поправки теории возмущений в порядках  $\mathcal{O}(\sigma^{-\gamma})$ , где  $\gamma > 1$ , могут быть построены методами [15–17]. Однако для построения главного члена приходится использовать немного измененный вид.

Будем искать решение возмущенного уравнения (2.1) при  $\sigma \rightarrow \infty$  с главным членом в виде

$$\phi \sim \psi_0 + \sigma^{-3/4} \psi_1. \quad (4.1)$$

Здесь  $\psi_1 = \psi_1(\sigma, z)$  — поправка теории возмущений. Параметры солитонного решения будем строить в виде

$$\alpha \sim \alpha_0 + \sigma^{-1/4} \alpha_1, \quad \beta \sim \beta_0 + \sigma^{-1/4} \beta_1.$$

Основная цель — получить формулы для связи параметров главного члена асимптотики как необходимые условия для ограниченности поправки  $\psi_1$ .

Для того чтобы вычислить асимптотику параметров возмущенного солитона, удобно воспользоваться двумя хорошо известными законами сохранения. С помощью стандартной процедуры выведем уравнения для эволюции параметров. Рассмотрим пару комплексно сопряженных уравнений

$$\partial_\sigma \phi - i \partial_{zz} \phi - 2i |\phi|^2 \phi - i \hbar = 0, \quad (4.2)$$

$$\partial_\sigma \bar{\phi} + i \partial_{zz} \bar{\phi} + 2i |\phi|^2 \bar{\phi} + i \bar{\hbar} = 0. \quad (4.3)$$

Умножим первое уравнение на  $\bar{\phi}$ , второе — на  $\phi$ , просуммируем полученные уравнения и проинтегрируем по всей вещественной оси  $z$ . Предполагая убывание решения при больших  $|z|$

и принадлежность решения классу  $L_2$ , получим

$$\frac{d}{d\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi|^2 dz - i \int_{-\infty}^{\infty} (h\bar{\phi} - \bar{h}\phi) dz = 0.$$

Подставим формулу для главного члена асимптотики в интегральное тождество. В результате

$$4 \frac{d\eta}{d\sigma} = i \int_{-\infty}^{\infty} (h\bar{\psi}_0 - \bar{h}\psi_0) dz. \quad (4.4)$$

Еще одно уравнение для вычисления параметров солитона получается из закона сохранения импульса для нелинейного уравнения Шредингера. Умножим уравнение (4.2) на  $\partial_z \bar{\phi}$ , уравнение (4.3) — на  $\partial_z \phi$ . Вычтем из первого полученного выражения второе и с помощью интегрирования по частям получим

$$\frac{d}{d\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_z \phi \bar{\phi} dz + i \int_{-\infty}^{\infty} (h\partial_z \bar{\phi} + \bar{h}\partial_z \phi) dz = 0. \quad (4.5)$$

В формулу (4.5) подставим выражение для главного члена асимптотики, в результате так же, как и выше, имеем

$$8 \frac{d}{ds} (\eta\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} (h\partial_z \bar{\psi}_0 + \bar{h}\partial_z \psi_0) dz.$$

Эту формулу удобно преобразовать, используя формулу для производной

$$\partial_z \psi_0 = -2i\kappa\psi_0 - 2\eta\psi_0 \tanh(2\eta z + V + \beta).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} 8 \frac{d}{ds} (\eta\kappa) &= 2i\kappa \int_{-\infty}^{\infty} (h\bar{\psi}_0 - \bar{h}\psi_0) dz \\ &- 2\eta \int_{-\infty}^{\infty} (h\bar{\psi}_0 \tanh(2\eta z + V + \beta) + \bar{h}\psi_0 \tanh(2\eta z + V + \beta)) dz. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Формулы (4.4) и (4.6) получаются как необходимые условия для ограниченности поправок теории возмущений. В нашем случае эти формулы определяют допустимые параметры для решения уравнения (2.1) в солитонной форме. Здесь  $h$  — невязка:

$$h = i\partial_\sigma \psi_0 + \partial_{zz} \psi_0 + 2|\psi_0|^2 \psi_0 + \frac{\mathcal{F}}{\sigma^{3/4}} \exp(i\sigma) - i \frac{\psi_0}{4\sigma}.$$

Если известна детальная структура амплитуды накачки  $\mathcal{F}$ , тогда уравнения (4.4) и (4.6) для параметров солитонного решения могут быть упрощены. Как пример рассмотрим один из самых простых и, следовательно, распространенных случаев — накачку с постоянной амплитудой  $\mathcal{F} = \text{const}$ . Положим,  $\kappa \sim \kappa_0 + o(\sigma^{-1})$ ,  $\eta \sim \eta_0 + o(\sigma^{-1})$ ,  $\{\kappa_0, \eta_0\} \in \mathbb{R}$ .

Обозначим

$$H_0 = i \int_{-\infty}^{\infty} (h\bar{\psi}_0 - \bar{h}\psi_0) dz, \quad H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (h\bar{\psi}_0 \tanh(2\eta z + V + \beta) + \bar{h}\psi_0 \tanh(2\eta z + V + \beta)) dz.$$

Тогда  $H_0 \sim o(\sigma^{-1})$ ,  $H_1 \sim o(\sigma^{-1})$ .

Вычислим асимптотику интеграла  $H_0$ :

$$\begin{aligned} H_0 &\sim \frac{\eta}{\sigma} + \frac{i}{\sigma^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \mathcal{F} e^{i\sigma} \frac{-2i\eta e^{2i\kappa z + i\Omega + i\alpha}}{\cosh(2\eta z + V + \beta)} - \overline{\mathcal{F}} e^{-i\sigma} \frac{2i\eta e^{-2i\kappa z - i\Omega - i\alpha}}{\cosh(2\eta z + V + \beta)} \right) dz \\ &\sim \frac{\eta}{\sigma} - \frac{2|\mathcal{F}|\eta}{\sigma^{3/4}} \cos \left( \sigma + \arg(\mathcal{F}) - \frac{\kappa V}{\eta} + \Omega + \alpha - \frac{\kappa\beta}{\eta} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\kappa X/\eta) dX}{\cosh(X) 2\eta} \\ &= \frac{\eta}{\sigma} - \frac{\pi|\mathcal{F}| \cos \left( \sigma + \arg(\mathcal{F}) - \kappa V/\eta + \Omega + \alpha - \kappa\beta/\eta \right)}{\sigma^{3/4} \cosh(\pi\kappa/(2\eta))}. \end{aligned}$$

Требование  $H_0 \sim 0$  дает

$$\frac{\eta}{\sigma} - \frac{\pi|\mathcal{F}|\sigma^{1/4} \cos \left( \sigma + \arg(\mathcal{F}) - \kappa V/\eta + \Omega + \alpha - \kappa\beta/\eta \right)}{\cosh(\pi\kappa/(2\eta))} \sim 0.$$

В главном порядке в аргументе косинуса  $\mathcal{O}(\sigma)$

$$4(\kappa_0^2 + \eta_0^2) = 1.$$

В порядке в аргументе косинуса  $\mathcal{O}(1)$

$$\arg(\mathcal{F}) + \alpha_0 - \frac{\kappa_0\beta_0}{\eta_0} = \frac{\pi}{2}.$$

В порядке  $\mathcal{O}(\sigma^{-1})$

$$\eta_0 = \frac{|\mathcal{F}|\pi(\alpha_1 - \kappa_0\beta_1/\eta_0)}{\cosh(\pi\kappa_0/(2\eta_0))}.$$

Подстановка асимптотических формул в  $H_1$  дает

$$H_1 \sim \int_{-\infty}^{\infty} (h\partial_z \overline{\phi_0} + \overline{h}\partial_z \phi_0) dz \sim o(\sigma^{-1}). \quad (4.7)$$

Подставляя формулу для  $h$  в (4.7), получим

$$\begin{aligned} H_1 &\sim \frac{1}{\sigma^{3/4}} |\mathcal{F}| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma + i\arg(\mathcal{F})} \left( \frac{4i\eta^2 e^{2i\kappa z + i\Omega + i\alpha}}{\cosh(2\eta z + V + \beta)} \tanh(2\eta z + V + \beta) \right) \\ &\quad + e^{-i\sigma - i\arg(\mathcal{F})} \left( -\frac{4i\eta^2 e^{-2i\kappa z - i\Omega - i\alpha}}{\cosh(2\eta z + V + \beta)} \tanh(2\eta z + V + \beta) \right) dz \\ &= \frac{4\eta}{\sigma^{3/4}} |\mathcal{F}| \cos \left( \sigma + \arg(\mathcal{F}) + \Omega - \frac{\kappa V}{\eta} + \alpha - \frac{\kappa\beta}{\eta} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\kappa X/\eta) \tanh(X)}{\cosh(X)} dX. \end{aligned}$$

В силу вычисленного выше аргумента функции косинус имеем  $H_1 = o(\sigma^{-1})$ . В результате параметры главного члена в солитонной форме —  $\{\kappa_0, \eta_0, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1\}$  определяются из уравнений

$$4(\kappa_0^2 + \eta_0^2) = 1, \quad (4.8)$$

$$\alpha_0 - \frac{\kappa_0\beta_0}{\eta_0} = \frac{\pi}{2} - \arg(\mathcal{F}), \quad (4.9)$$

$$\alpha_1 - \frac{\kappa_0\beta_1}{\eta_0} = \frac{\eta_0}{|\mathcal{F}|\pi} \cosh \left( \frac{\pi\kappa_0}{2\eta_0} \right). \quad (4.10)$$

Поправка  $\psi_1$  может быть вычислена с помощью стандартных подходов теории возмущений солитонов [15–17]. Такие вычисления довольно громоздки. Они представляют интерес скорее с точки зрения модификации теории возмущений для уравнения (2.1), чем для теории автофазировки и авторезонансного возбуждения солитонов. Поэтому вычисления для поправок здесь не приводятся.

В этом разделе приведены формулы (4.8)–(4.10) для связи параметров солитонного решения  $\psi_0$ . Эти формулы являются необходимыми условиями для ограниченности поправки  $\psi_1$ .

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Утверждение 3.** *Для представления формального асимптотического решения в виде (4.1) при  $\sigma \rightarrow \infty$  необходимо, чтобы параметры  $\psi_0$  удовлетворяли соотношениям (4.8)–(4.10).*

## 5. Влияние диссипации

Рассмотрим уравнение (0.1) при  $\nu > 0$ . Для функции  $\phi$  и переменных  $\sigma, z$  исходное уравнение примет вид

$$i\partial_\sigma\phi + \partial_{zz}\phi + |\phi|^2\phi + \frac{\mathcal{F}}{\sigma^{3/4}}e^{i\sigma} + i\frac{\nu}{2\sqrt{\sigma}}\phi + i\frac{\phi}{4\sigma} = 0. \quad (5.1)$$

В этом случае диссипативное слагаемое с параметром  $\nu$  и внешняя сила  $\mathcal{F}$  дают уравнения для параметров солитона в виде

$$\frac{2\nu\eta_0}{\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{\sigma^{3/4}} \frac{\pi|\mathcal{F}|\cos(\sigma + \arg(\mathcal{F}) + \Omega - \kappa V/\eta + \alpha - \kappa\beta/\eta)}{\cosh(\pi\kappa_0/(2\eta_0))} \sim 0.$$

Отсюда следует, что при  $\sigma \rightarrow \infty$  и постоянной амплитуде  $\mathcal{F}$  параметр  $\eta_0$  убывает, как  $\sigma^{-1/4}$ . Следовательно, построенная асимптотика  $\Psi = \mathcal{O}(1)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Рост асимптотического решения сохраняется, если растет амплитуда вынуждающей силы, а именно, при  $\mathcal{F} = G\nu\sigma^{1/4}$  или как  $\mathcal{O}(\sqrt{\tau})$  в терминах исходной переменной. При этом

$$4(\kappa_0^2 + \eta_0^2) = 1, \quad 2\nu\eta_0 + \frac{\pi|G|\cos(\arg(G) + \alpha - \kappa\beta/\eta)}{\cosh(\pi\kappa_0/(2\eta_0))} = 0. \quad (5.2)$$

Здесь показано, что для существования солитонного решения с главным членом  $\psi_0$  в присутствии диссипации необходим рост амплитуды накачки  $\mathcal{F}$ .

Необходимость роста амплитуды возбуждения для сохранения авторезонанса в динамической системе была известна ранее [18].

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Утверждение 4.** *Для существования ограниченного асимптотического решения уравнения (5.1) в виде (4.1) необходимы рост амплитуды накачки  $\mathcal{F}$  и выполнение соотношений (5.2) для параметров  $\psi_0$ .*

## Заключение

Для уравнения главного резонанса в частных производных (0.1) — неавтономного нелинейного уравнения Шредингера — построен главный член растущего, как  $\sqrt{\tau}$ , асимптотического решения в солитонной форме. Оказалось, что для авторезонансного роста солитона достаточно накачки с убывающей, как  $\mathcal{O}(1/\sqrt{\tau})$ , амплитудой. Показано, что при диссипации для растущего асимптотического решения необходим рост амплитуды накачки, как  $\mathcal{O}(\nu\sqrt{\tau})$ .

Выражаю признательность С. Г. Глебову за многочисленные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kelley P.L.** Self-focusing of optical beams // *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15. P. 1005–1008.
2. Таланов В.И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // *Письма в ЖЭТФ.* 1965. Т. 2, № 5. С. 218–222.
3. **Zakharov V.E.** Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep liquid // *Zh. Prikladnoi Mekh. Tekh. Fiz.* 1968. Vol. 2. P. 86–94.
4. **Fajans J., Friedland L.** Autoresonant (non-stationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators // *Am. J. Phys.* 2001. Vol. 69, no. 10. P. 1096–1102.
5. **Kalyakin L.A.** Asymptotic analysis of autoresonance models // *Russian Math. Surveys.* 2008. Vol. 63, no. 5. P. 791–857.
6. **Neu J.C.** Resonantly interacting waves // *SIAM J. Appl. Math.* 1983. Vol. 43, no. 1. P. 141–156.
7. **Glebov S.G., Kiselev O.M., Lazarev V.A.** Slow passage through resonance for a weakly nonlinear dispersive wave // *SIAM J. Appl. Math.* 2005. Vol. 65, no. 6. P. 2158–2177.
8. **Glebov S., Kiselev O., Tarkhanov N.** Weakly nonlinear dispersive waves under parametric resonance perturbation // *Stud. Appl. Math.* 2010. Vol. 124, no. 1. P. 19–37.
9. **Friedland L., Shagalov A.G.** Excitation of solitons by adiabatic multiresonant forcing // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 8, iss. 20. P. 4357–4360.
10. **Shagalov A.G., Friedland L.** Autoresonant excitation of multiphase waves in the sine-Gordon model // *Phys. D.* 2009. Vol. 238, no. 16. P. 1561–1568.
11. **Калякин Л.А., Гарифуллин Р.Н., Шамсутдинов М.А.** Авторезонансное возбуждение бризера в слабых ферромагнетиках // *Журн. вычислительной математики и мат. физики.* 2007. Vol. 47, № 7. С. 1208–1220.
12. **Маслов Е.М., Калякин Л.А., Шагалов А.Г.** Резонансный захват фазы бризера внешним возмущением // *Теорет. и мат. физика.* 2007. Т. 152, № 2. С. 356–367.
13. **Гарифуллин Р.Н.** Авторезонансное возбуждение солитона нелинейного уравнения Шредингера // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2012. Т. 18, № 2. С. 62–66.
14. **Калякин Л.А.** Длинноволновые асимптотики. Интегрируемые уравнения как асимптотический предел нелинейных систем // *Успехи мат. наук.* Т. 44, вып. 1. 1989. С. 5–34.
15. **Каур Д.Д.** A perturbation expansion for the Zakharov–Shabat inverse scattering transform // *SIAM J. Appl. Math.* 1976. Vol. 31, no. 1. P. 121–133.
16. **Карпман В.И., Маслов Е.М.** Теория возмущений для солитонов // *Журн. эксперим. и теорет. физики.* 1977. Vol. 73, вып. 2(8). С. 281–291.
17. **Ньюелл А.** Обратное преобразование рассеяния // *Солитоны: кн. / ред. С.П. Новиков. М.: Мир,* 1983. С. 193–270.
18. **Калякин Л.А., Шамсутдинов А.М.** Авторезонансные асимптотики в осциллирующей системе с диссипацией // *Теорет. и мат. физика.* 2009. Т. 160, № 1. С. 102–111.

Киселев Олег Михайлович

д-р физ. мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

e-mail: olegkiselev@matem.anrb.ru

Поступила 10.12.2014