ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.919

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО БЕЛОГО ШУМА[1]

Л. А. Калякин

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая локальное асимптотически устойчивое положение равновесия. Обсуждается проблема устойчивости относительно постоянно действующего возмущения типа белого шума. Устойчивость с заданными оценками установлена на большом промежутке времени — порядка квадрата обратной величины возмущения. Доказательство основано на построении барьера для параболического уравнения Колмогорова, связанного с возмущенной динамической системой.

Ключевые слова: динамическая система, случайное возмущение, устойчивость, параболическое уравнение, барьер.

L. A. Kalyakin. Stability of equilibrium with respect to a white noise.

A system of ordinary differential equations with a local asymptotically stable equilibrium is considered. The problem of stability with respect to a persistent perturbation of the white noise type is discussed. The stability with given estimates is proved on a large time interval with a length of the order of the squared reciprocal magnitude of the perturbation. The proof is based on the construction of a barrier function for the Kolmogorov parabolic equation associated with the perturbed dynamical system.

Keywords: dynamical system, random perturbation, stability, parabolic equation, barrier function.

1. Постановка задачи

Исходным объектом является система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dT} = \mathbf{a}(\mathbf{y}, T), \quad T \in \mathbb{R}^1; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{y}, T)$ — заданная вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^n$. Считается, что $\mathbf{a}(\mathbf{0}, T) \equiv 0$, так что точка $\mathbf{y} = 0$ представляет собой положение равновесия. Ставится вопрос об устойчивости этого тривиального решения $\mathbf{y}(T) \equiv 0$ относительно возмущения системы белым шумом.

Возмущенная задача записывается в форме стохастического уравнения Ито с начальным условием (см., например, [1; 2]):

$$d\mathbf{y} = \mathbf{a}(\mathbf{y}, T)dT + \mu\sqrt{2}B(\mathbf{y}, T)d\mathbf{w}(T), \ T > s; \ \ \mathbf{y}|_{T=s} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \ (s \geq 0). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{w}(T) \in \mathbb{R}^k$ — k-мерный винеровский процесс, $B(\mathbf{y}, T)$ — заданная матрица размером $n \times k$. Решение этой задачи определяет семейство (случайных при $\mu \neq 0$) траекторий $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)$, которые зависят как от начальной точки $\mathbf{x}, s$, так и от параметра возмущения $\mu \in \mathbb{R}^1$. Начальный момент $s \geq 0$ является дополнительным параметром. В обсуждаемом круге задач устойчивость получается равномерной по s, и поэтому мы не акцентируем внимание на случае $s = 0$.

Проблема устойчивости: *остается ли возмущенная траектория вблизи точки* $\mathbf{y} = 0$, *если малы* $|\mathbf{x}|$ *и* $|\mu|$?

В случае $\mu = 0$, когда возмущается только начальная точка, ответ дается в классических теоремах Ляпунова [3]. В частности, равновесие невозмущенной детерминированной системы может быть устойчиво либо асимптотически устойчиво по Ляпунову.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00078).

При возмущении уравнений (в случае $\mu \neq 0$) возможны разные постановки задачи. Если равновесие сохраняется в возмущенной системе, т.е. при $B(0,T) \equiv 0$ можно исследовать устойчивость равновесия по Ляпунову в возмущенной системе, как это сделано в [2; 4; 5]. Близость возмущенной траектории $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)$ к точке $\mathbf{y} = 0$ обеспечивается за счет малости начального значения $|\mathbf{x}|$ при фиксированном μ либо равномерно по μ на некотором промежутке. При этом условие асимптотической устойчивости равновесия в невозмущенной системе может оказаться решающим, если не уточнять структуру возмущения [6]. Отметим, что принципиальных отличий между детерминированным и стохастическим возмущением здесь не наблюдается.

В общем случае, когда $B(0,T) \not\equiv 0$, точка $\mathbf{y} = 0$ не является равновесием в возмущенной системе. Теперь, чтобы гарантировать близость возмущенной траектории $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)$ к точке $\mathbf{y} = 0$, нужна малость μ. Подобная задача для детерминированного возмущения решена Малкиным [7]. При этом требование асимптотической устойчивости по Ляпунову равновесия невозмущенной системы является необходимым для устойчивости относительно постоянно действующего возмущения[2]. Результаты Малкина обобщены на разные классы возмущений, в частности на некоторые случайные возмущения [5; 6; 8; 9].

Ситуация с устойчивостью значительно ухудшается при возмущении винеровским процессом, если возмущение не исчезает в равновесии: $B(0,T) \not\equiv 0$. Поскольку в этом случае почти любая возмущенная траектория (при $\mu \neq 0$) со временем посещает любую область, то обычной устойчивости на бесконечном временном промежутке не бывает[3]. Такой результат создает впечатление непригодности детерминированных моделей для приложений, поскольку шум всегда присутствует в реальных системах, а физически реализуемые состояния ассоциируются с устойчивыми траекториями. Конечно, здесь надо учитывать, что при малых возмущениях выход траекторий из окрестности равновесия происходит на далеких временах.

Теперь уместно напомнить, что на далеких временах решение модельной системы зачастую вообще не имеет отношения к реальной исходной системе. На уровне математических моделей подобный факт иногда указывается явно. Например, разные варианты методов усреднения [6; 10–12] приводят к модельным (усредненным) уравнениям, которые имеют отношение к исходной системе лишь на конечных, хотя и больших промежутках времени. Поэтому в задаче о постоянно действующих возмущениях представляется разумной ревизия понятия устойчивости в том, что касается поведения решения на бесконечном промежутке времени. Особенно это относится к задаче о возмущении белым шумом, и этот вопрос обсуждался в [6].

Один из альтернативных подходов использует понятие слабой устойчивости по вероятности [13; 14]. Устойчивость здесь означает, что в каждый момент бóльшая часть траекторий находится в малой окрестности равновесия при том, что почти каждая из траекторий может выходить из окрестности. Такая устойчивость была доказана при ограничениях, которые соответствуют глобальной асимптотической устойчивости невозмущенной системы [5; 13]. Существенно ослабить эти ограничения невозможно, и в [13] приведены соображения об отсутствии слабой устойчивости относительно шума при наличии в невозмущенной системе двух устойчивых по Ляпунову положений равновесия.

Более радикальный подход состоит в сведении проблемы устойчивости к определению среднего времени выхода семейства траекторий из заданной области [15] . В системе типа (1.2) это время оказывается экспоненциально большим: $T_\mu \approx \exp(C/\mu^2)$, $C = \text{const} > 0$ при $\mu \to 0$, и для практических задач вопрос устойчивости выглядит решенным. Однако полученные оценки зависят от области (посредством константы C) и не годятся при сжатии области к точке $\mathbf{y} = 0$, [15; 16]. Фактически такой результат соответствует определению устойчивости по Лагранжу: траектории, стартующие из окрестности равновесия, остаются в ограниченной (не малой) области. Подчеркнем важность введенной в [15] идеи о конечности промежутка устойчивости: $s < T \leq T_\mu$, который оказывается большим при малом возмущении.

Еще один похожий подход связывается с понятием технической устойчивости, под которой

[2]Если не накладывать дополнительные ограничения на структуру возмущения [6].

[3]Не бывает сильной устойчивости по вероятности (см., например, [2]).

понимается устойчивость с заданными оценками (в стиле Ляпунова) на конечном промежутке времени [6; 8]. Как раз с этим определением мы будем иметь дело в данной работе. Основное наше нововведение состоит в том, чтобы связать длину промежутка с параметром возмущения. Для рассматриваемой задачи удается доказать, что на интервале $s < T \leq \mu^{-2}$ гарантируется близость возмущенной траектории $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)$ к точке $\mathbf{y} = 0$, [17]. Следует указать, что эта идея не нова и использовалась ранее при анализе устойчивости относительно постоянно действующего возмущения в случае, когда равновесие в невозмущенной системе не является асимптотически устойчивым [6].

В качестве меры устойчивости для стохастической системы используется математическое ожидание $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2]$ квадрата расстояния от траектории до точки $\mathbf{y} = 0$.

Определение 1. Равновесие $\mathbf{y} = 0$ системы (1.1) называется ограниченно устойчивым относительно шума равномерно для матриц B из множества $\mathcal{B}$ и $s \geq 0$ при заданных оценках $\delta(\varepsilon)$, $\Delta(\varepsilon)$, если существует $T_{\mathcal{B}} > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ математическое ожидание на возмущенной траектории мало: $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2] < \varepsilon$ равномерно для всех $|\mathbf{x}| < \delta(\varepsilon)$, $|\mu| < \Delta(\varepsilon)$, $s < T < T_{\mathcal{B}}\mu^{-2}$, $B \in \mathcal{B}$, $s \geq 0$. Подразумевается, что $\delta(\varepsilon), \Delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Это определение соответствует слабой устойчивости по вероятности [13; 14], так что любая траектория может выходить из окрестности $|\mathbf{x}| < \varepsilon$, но в каждый момент бо́льшая часть траекторий остается в окрестности (на временах, не слишком больших). Сразу отметим, что в отличие от известных результатов [5; 13] в данной работе будет использоваться требование лишь локальной (а не глобальной) асимптотической устойчивости равновесия в невозмущенной системе. Расплатой за такое послабление является ограничение на промежуток времени.

Использование математического ожидания вдоль траектории в качестве меры устойчивости оказывается удобным приемом ввиду возможности использования параболического уравнения Колмогорова и техники барьерных функций для априорных оценок его решения. Как раз барьеры играют роль аналогов функций Ляпунова в рассматриваемом подходе. При конструировании барьера для параболического уравнения используется локальная функция Ляпунова невозмущенной системы. Основные затруднения связаны с необходимостью продолжения барьера из окрестности точки $\mathbf{y} = 0$ на все пространств $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, поскольку приходится оценивать решение задачи Коши.

Отметим близкие публикации автора на эту тему [17; 18]. Радикальное отличие данной работы заключается в условиях на структуру возмущения. В отличии от [17; 18] здесь не требуется положительная определенность матрицы диффузии BB^*. Это значительно расширяет возможности применения результатов об устойчивости, в частности, на случаи, когда размерность возмущения не совпадает с размерностью системы.

2. Связь с параболическим уравнением

Со стохастической системой (1.2) связано параболическое уравнение Колмогорова

$$\partial_s u + \mathbf{a}(\mathbf{x}, s)\partial_{\mathbf{x}} u + \mu^2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\mathbf{x}, s)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u = 0, \quad 0 \leq s < T,$$

для которого ставится задача с финальным условием $u|_{s=T} = \mathbb{E}(f(\mathbf{x}))]$. Квадратная матрица $A = \{\alpha_{i,j}\}$ выражается через матрицу возмущения и сопряженную к ней по формуле $A = BB^*$. Дело можно свести к задаче с начальным условием, если сделать замену времени $s = T - t$:

$$\partial_t u - \mathbf{a}(\mathbf{x}, T - t)\partial_{\mathbf{x}} u - \mu^2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\mathbf{x}, T - t)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leq T;$$

$$u(\mathbf{x}, t; T, \mu)|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Как видим, в неавтономном случае решение зависит от дополнительного параметра T. Связь с решением стохастического уравнения выражается посредством математического ожидания формулой (см., например, [2])

$$\mathbb{E}[u_0(\mathbf{y}_\mu(T;\mathbf{x},s))] = u(\mathbf{x},t;T,\mu)|_{t=T-s}.$$

В частном случае решение задачи Коши с начальной функцией $u_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ дает интересующую нас в стохастической задаче величину математического ожидания $\mathbb{E}[(\mathbf{y}_\mu(T;\mathbf{x},s))^2]$.

Таким образом, вопрос об устойчивости в смысле определения 1 сводится к оценке решения параболического уравнения равномерно по параметру T. При этом специфическая зависимость от времени в виде $T-t$ оказывается не по существу, и задачу можно поставить в чуть более общей форме. В слое $D^T = \{\mathbf{x},t\colon \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ 0\le t\le T\}$ для параболического уравнения

$$L_{T,\mu}u \equiv \partial_t u - \mathbf{a}_0(\mathbf{x},t;T)\partial_{\mathbf{x}}u - \mu^2\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + q(\mathbf{x},t;T)u = 0 \tag{2.1}$$

рассматривается задача Коши

$$u(\mathbf{x},t;T,\mu)|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n; \tag{2.2}$$

здесь $\partial_{\mathbf{x}} = (\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_n})$ — вектор градиента по $\mathbf{x}$. Условие нестрогой параболичности записывается в виде требования неотрицательности матрицы диффузии:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\xi_i\xi_j \ge 0 \ \ \forall\,\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n; \quad \xi\ne 0, \quad \mathbf{x},t\in D^T.$$

В задаче присутствуют два действительных параметра $T\in(0,\infty)$ и $0<\mu^2<\mu_0^2$. Уравнения (2.1), (2.2) представляют собой семейство задач, в котором параболический оператор $L_{T,\mu}$ содержит существенную зависимость от T — верхней границы области D^T. Наличие этого параметра в коэффициентах оператора $L_{T,\mu}$ необходимо, чтобы связать решение $u(\mathbf{x},t;T,\mu)$ со стохастической системой в неавтономном случае.

Главным результатом данной работы является равномерная по параметрам оценка решения $u(\mathbf{x},t;T,\mu)$ в окрестности линии $\{\mathbf{x}=0,\ t>0\}$ — нуля коэффициента $\mathbf{a}(0,t;T)\equiv 0$. В случае специальной зависимости от времени, когда $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(\mathbf{x},T-t)$, такой результат обеспечивает для динамической системы $d\mathbf{y} = \mathbf{a}(\mathbf{y},t)dt$ доказательство устойчивости равновесия $\mathbf{y}=0$ относительно постоянно действующего возмущения типа “белый шум”.

В отличии от более ранних результатов [17;18] здесь устойчивость доказывается независимо от структуры матрицы диффузии. В частности, эта матрица может быть вырожденной, что случается, когда размерность возмущения меньше размерности системы.

3. Функция Ляпунова

Рассматривается уравнение в частных производных (2.1). Ограничения на него накладываются в форме условий в терминах функции Ляпунова.

О п р е д е л е н и е 2. Неотрицательная функция $U(\mathbf{x},t;T)\ge 0$, непрерывно дифференцируемая по t и дважды непрерывно дифференцируемая по $\mathbf{x}$ (из класса $C_{2,1}(D^T)$), называется функцией Ляпунова для уравнения (2.1) равномерно по T, если существуют константы $r,\gamma>0$, не зависящие от T, такие что для $\forall\,T>0$ в цилиндре $\mathcal{C}_r^T = \{(\mathbf{x},t)\in D^T\colon |\mathbf{x}|<r\}$ выполняется соотношение

$$\partial_t U - \mathbf{a}_0(\mathbf{x},t;T)\partial_{\mathbf{x}}U \ge \gamma U. \tag{3.1}$$

П о я с н е н и е. В случае, когда $\mathbf{a}_0(\mathbf{x},t;T) = \mathbf{a}(\mathbf{x},T-t)$, такая функция получается из обычной функции Ляпунова $U_0(\mathbf{x},t)$ для динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ по формуле $U(\mathbf{x},t;T) = U_0(\mathbf{x},T-t)$.

Дополнительные ограничения накладываются в цилиндре $\mathcal{C}_r^T$в форме неравенств, равномерных по T:

$$|\mathbf{x}|^2 \le U(\mathbf{x},t;T) \le M_0|\mathbf{x}|^2, \quad |\partial_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x},t;T)|^2 \le M_1 U(\mathbf{x},t;T), \tag{3.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\partial_{x_i}\partial_{x_j} U \le M_2, \quad (\mathbf{x},t) \in \mathcal{C}_r^T. \tag{3.3}$$

В оставшейся части области требуются оценки

$$|\partial_{\mathbf{x}} U|^2 \le M_1 U, \quad L_{T,\mu} U \ge -M_3 U, \quad (\mathbf{x},t) \in D^T \setminus \mathcal{C}_r^T. \tag{3.4}$$

Здесь $M_1, M_2, M_3 = \text{const} > 0,\ M_0 > 1\ \forall T > 0$. Первое условие вместе с (3.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость равновесия (по Ляпунову) [8, с. 70], а второе дает ограниченность матрицы диффузии. Условия (3.4) описывают свойства продолжения функции Ляпунова в слой D^T.

При заданной $U(\mathbf{x},t;T)$ условия (3.3), (3.4) можно рассматривать как ограничения на матрицу диффузии. Задание констант M_2, M_3 выделяет множество этих матриц. Получаемые оценки решения параболической уравнения зависят от этих констант и не зависят от конкретной матрицы $a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)$. Таким образом, неравенства (3.3), (3.4) выделяют множество допустимых возмущений.

4. Барьер

Для определенности приведем определение барьера [19].

О п р е д е л е н и е 3. Барьером для уравнения (2.1) будем называть любую функцию $V(\mathbf{x},t;T,\mu)$, которая имеет непрерывные производные, фигурирующие в дифференциальном операторе $L_{T,\mu}$ из (2.1), и обладает следующим свойством: значение оператора на ней неотрицательно, а именно $L_{T,\mu}V(\mathbf{x},t;T,\mu) \ge 0$ в слое D^T.

При выборе барьера будем исходить из требования малости его при $|\mathbf{x}|,\ \mu \to 0$ равномерно по $t,\ T \le \mathcal{O}(\mu^{-2})$ и требования оценки в начальный момент таковы: $U(\mathbf{x},0;T) \le V(\mathbf{x},0;T,\mu)$. Конструирование барьера в окрестности линии $\{\mathbf{x}=0,\ t>0\}$ составляет основное содержание данного раздела.

В качестве окрестности выгодно использовать область, которая содержится внутри цилиндра $\mathcal{C}_r^T = \{|\mathbf{x}| < r,\ 0 < t < T\}$ и ограничена поверхностью уровня функции Ляпунова:

$$\mathcal{D}_r^T = \{(\mathbf{x},t) \in D^T : U(\mathbf{x},t;T) < r^2\}.$$

Эта окрестность содержит линию $\{\mathbf{x}=0,\ 0<t<T\}$, и при условии (3.2) граница области $\mathcal{D}_r^T$ зажата в цилиндрическом слое $\{r/\sqrt{M_0} \le |\mathbf{x}| \le r,\ t>0\}$.

Далее описывается конструкция барьера. Введем функцию

$$V_0(\mathbf{x},t;T,\mu) = U(\mathbf{x},t;T)\exp(-\alpha_0 t) + \frac{\mu^2 M_2}{\alpha_0}[1-\exp(-\alpha_0 t)], \quad \alpha_0 = \text{const} > 0.$$

При выборе $\alpha_0 \le \gamma$ и при условиях (3.1), (3.2) свойство барьера $L_{T,\mu}V_0(\mathbf{x},t;T,\mu) \ge 0$ выполняется в области $\mathcal{D}_r^T$. Если $r=\infty$, то $U(\mathbf{x},t;T)$ является глобальной функцией Ляпунова и $V_0(\mathbf{x},t;T,\mu)$ будет барьером в слое D^T. Этот случай соответствует [13].

В общем случае условие барьера для функции $V_0(\mathbf{x},t;T,\mu)$ нарушается при $|\mathbf{x}| > r$. Тогда вне области $\mathcal{D}_\rho^T$ $(0<\rho<r)$ добавляется функция

$$V_2(\mathbf{x},t;T,\mu) = P(U)\exp(\alpha t), \quad U = U(\mathbf{x},t;T), \quad (\mathbf{x},t) \in D^T \setminus D_\rho^T,$$

в которой $P(U)$ определяется формулами

$$P(U) = v + \mu^2\Big(m - \frac{\lambda\, v}{\mu^2 + \nu\, v}\Big), \quad v = [U - \rho^2\chi(U)]\frac{\gamma}{M_1}; \quad \alpha, m, \lambda, \nu = \mathrm{const} > 0.$$

Здесь $\chi(U) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — гладкая, монотонно убывающая функция такая, что

$$\chi(U) \equiv 1, \quad U \le \rho^2; \quad \chi(U) \equiv 0, \quad U \ge r^2.$$

В замыкание области $\mathcal{D}_\rho^T$ эта часть барьера продолжается функцией, похожей на погранслойную:

$$V_1(\mathbf{x}, t; T, \mu) = m\,\mu^2 \exp\Big(\alpha t + \frac{v}{\mu^2}\Big), \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{D_\rho^T}.$$

Так как в области $\mathcal{D}_\rho^T$ функция $v = [U(\mathbf{x}, t; T) - \rho^2]\gamma/M_1 < 0$ отрицательна, то $V_1(\mathbf{x}, t; T, \mu)$ будет экспоненциально мала при $\mu \to 0$. В более узкой области, где $U(\mathbf{x}, t; T) < \rho^2/2$, малость $V_1(\mathbf{x}, t; T, \mu) = \mathcal{O}(\mu^2)$ будет равномерной по $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}_\rho^T$ при $\forall\, T \le \mathcal{O}(\mu^{-2})$. Это свойство является основной целью предъявляемой конструкции.

Из описанных выше трех функций составляется барьерная функция по формуле

$$V = V_0(\mathbf{x}, t; T, \mu) + \begin{cases} V_1(\mathbf{x}, t; T, \mu), & (\mathbf{x}, t) \in \overline{\mathcal{D}_\rho^T}, \\ V_2(\mathbf{x}, t; T, \mu), & (\mathbf{x}, t) \in D^T \setminus \overline{\mathcal{D}_\rho^T} \end{cases} \tag{4.1}$$

Проверка свойств барьера при условиях (3.1)–(3.4), выполненная в [18], состоит в подходящем выборе констант $\mu_0, \alpha_0, \alpha, m, \lambda, \nu$ при всех достаточно малых $|\mu| < \mu_0$.

Обратим внимание, что один и тот же барьер годится для уравнений (2.1) с различными матрицами диффузии $A = \{a_{i,j}\}$, множество которых определяется заданием констант M_2, M_3 в условиях (3.3), (3.4). Это свойство является ключевым для выделения множества допустимых возмущений.

5. Устойчивость

В этом разделе анализируется динамическая система (1.1) и ее возмущение в форме стохастического уравнения (1.2). Результаты, полученные выше для параболического уравнения, позволяют доказать устойчивость в смысле определения 1 с заданными оценками $\delta(\varepsilon), \Delta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \to 0$. При этом на исходную динамическую систему с вектором $\mathbf{a}(\mathbf{y}, T)$ и на матрицу возмущения $B(\mathbf{y}, T)$ накладываются такие ограничения, которые индуцируют использованные выше ограничения для параболического уравнения при специальном выборе коэффициента $\mathbf{a}_0(\mathbf{x}, t, T) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, T - t)$ и матрицы диффузии $A(\mathbf{x}, t, T) = BB^*(\mathbf{x}, T - t)$.

Основное ограничение формулируется в виде условия (см. [8, с. 70]).

У с л о в и е 1. Для системы (1.1) в области $\mathcal{C}_R = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ T > 0 \colon |\mathbf{y}| < R\}$ существует функция Ляпунова $U_0(\mathbf{y}, T) \in C_{2,1}(\mathcal{C}_R)$ со свойствами

$$\partial_T U_0 + \mathbf{a}(\mathbf{y}, T)\partial_{\mathbf{y}} U_0 \le -\gamma U_0; \quad |\mathbf{y}|^2 < U_0(\mathbf{y}, T) < M_0|\mathbf{y}|^2; \quad |\partial_{\mathbf{y}} U_0|^2 \le M_1 U_0; \tag{5.1}$$

где $R, \gamma, M_0, M_1 = \mathrm{const} > 0$.

В теоремах устойчивости речь идет о глобальных решениях. Поэтому желательно указать условия, гарантирующие существование таких решений на полубесконечном интервале. Для этого помимо гладкости исходных данных требуются дополнительные ограничения, связанные с поведением на бесконечности [5, с. 107, 113; 20, с. 91]. Мы будем использовать помимо липшицевости требование ограничения на рост в бесконечности в следующей форме:

$$|\mathbf{a}(\mathbf{y}, T)| \le \mathrm{const} \cdot (1 + |\mathbf{y}|) \ \ \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ T > 0, \tag{5.2}$$

$$\|B(\mathbf{y},T)\| \overset{def}{=} \max_{i,j} |b_{i,j}(\mathbf{x},t;T)| \le M\cdot(1+|\mathbf{y}|)\ \forall\,\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n, \quad T>0. \tag{5.3}$$

Исходные матриц-функции $B(\mathbf{y},T)=\{b_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\}$, которые используются в возмущении, всегда можно считать квадратными размером $n\times n$, продолжая при необходимости нулями. Их множество представляет собой линейное пространство, обозначим его $\mathcal{M}^n$.

Поскольку малость возмущения характеризуется множителем μ, то множество возмущений можно выделять, задавая константу M в условиях (5.3). Формально такое множество в пространстве $\mathcal{M}^n$ можно идентифицировать, как шар конечного радиуса в подходящей топологии, например, можно задавать шар в весовой норме по формуле

$$S_M=\big\{B(\mathbf{y},T)\in\mathcal{M}^n\colon \sup_{\mathbf{y},T}||(1+|\mathbf{y}|)^{-1}B(\mathbf{y},T)||\le M\big\}.$$

Кроме того, из-за использовании параболического уравнения требуются дополнительные ограничения, которые гарантируют гладкость математического ожидания от функций на случайных траекториях. Такие ограничения касаются гладкости коэффициентов [21, с. 164]; например, $\mathbf{a}(\mathbf{y},T),B(\mathbf{y},T)\in C_{2,0}(D^\infty)$. Будем также считать, что для первых и вторых производных этих функций выполняются ограничения на рост в бесконечности такие же, как (5.2), (5.3). Шар радиуса M в пространстве таких матриц-функций обозначим через $S_M^{2,0}$.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1.1) *существует функция Ляпунова со свойствами* (5.1)*, коэффициент* $\mathbf{a}(\mathbf{y},T)\in C_{2,0}(D^\infty)$*, и выполнено условие* (5.2)*. Тогда для любого* $M>0$ *существуют* $\delta_M,\Delta_M>0$ *такие, что равновесие* $\mathbf{y}=0$ *ограниченно устойчиво относительно шума с заданными оценками* $\delta(\varepsilon)=\delta_M\sqrt{\varepsilon}$*,* $\Delta(\varepsilon)=\Delta_M\sqrt{\varepsilon}$*, равномерно для всех* $B(\mathbf{y},T)$ *из шара* $S_M^{2,0}$ *и* $s\ge 0$*.*

Доказательство сводится к оценке математического ожидания $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T;\mathbf{x},s)\big)^2]$ как решения параболического уравнения. Это уравнение, представленное в (2.1), определяется коэффициентами

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x},t;T)=\mathbf{a}(\mathbf{x},T-t), \quad \{a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\}=BB^*(\mathbf{x},T-t), \quad q(\mathbf{x},t;T-t)\equiv 0.$$

Оценка получается с помощью барьера. Для конструкции барьера надо локальную функцию Ляпунова $U_0(\mathbf{y},T)$ продолжить на $\mathbb{R}^n$, сохраняя оценки (3.4). Поскольку $|\mathbf{y}|^2<U_0(\mathbf{y},T)<M_0|\mathbf{y}|^2$ при $|\mathbf{y}|<R$, то можно понять, что поверхность $z=U_0(\mathbf{y},T)$ допускает продолжение между параболоидами $|\mathbf{y}|^2\le z\le M_0|\mathbf{y}|^2$. Приведем пример такого продолжения. Положим $r=R/\sqrt{2}$ и введем гладкую срезку $\chi(\varrho^2)$ со свойствами

$$\chi(\varrho^2)=1, \quad \varrho<r; \quad \chi(\varrho^2)=0, \quad \varrho>R.$$

Продолжение можно записать в виде

$$\tilde U(\mathbf{y},T)=\chi(|\mathbf{y}|^2)U_0(\mathbf{y},T)+|\mathbf{y}|^2\big[1-\chi(|\mathbf{y}|^2)\big].$$

Переменная T здесь играет роль параметра.

Для параболического уравнения (2.1) функция Ляпунова определяется соотношением $U(\mathbf{x},t;T)=\tilde U(\mathbf{x},T-t)$. Нетрудно проверить, что при выборе $r=R/\sqrt{2}$ все условия (3.1)–(3.4) выполнены. Зафиксируем область D_ρ^T, взяв $\rho=r/\sqrt{2}=R/2$ и соответствующий барьер (4.1). Построенный барьер мажорируется снизу $|\mathbf{x}|^2\le V(\mathbf{x},t;T,\mu)|_{t=0}$ в силу условия (5.2). Тогда по принципу максимума решение параболического уравнения с начальным данным $u|_{t=0}=|\mathbf{x}|^2$ оценивается через барьер: $0\le u(\mathbf{x},t;T,\mu)\le V(\mathbf{x},t;T,\mu)$.

Подчеркнем, что для применения принципа максимума не требуется строгая параболичность; достаточно, чтобы матрица диффузии была неотрицательна [19]. Это обстоятельство позволяет значительно расширить класс допустимых возмущений в уравнении (1.2) по сравнению с результатами [18].

Далее следует уточнить структуру барьера, чтобы получить требуемую оценку для решения. В области $\{|\mathbf{x}| < \rho/\sqrt{M_0},\ 0 < t < T\}$, которая содержится в D^T_ρ, барьер представляется формулой

$$V(\mathbf{x}, t; T, \mu) = U_0(\mathbf{x}, T-t)\exp(-\alpha_0 t) + \frac{\mu^2 M_3}{\alpha_0}[1 - \exp(-\alpha_0 t)] + m\,\mu^2 \exp\Big(\alpha t + \frac{v}{\mu^2}\Big), \qquad (5.4)$$

где $v = U_0(\mathbf{x}, T-t) - \rho^2 < 0$. Поэтому в цилиндре получается оценка

$$u(\mathbf{x}, t; T, \mu) \le M_0|\mathbf{x}|^2 + \mu^2\Big[\frac{M_3}{\alpha_0} + m\exp(\alpha t)\Big].$$

Тем самым на конечном промежутке $0 < t < t_0$, не зависящем от μ^2, имеем $u \le \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2 + \mu^2)$.

Чтобы получить оценку на далеких временах $0 < t < \mathcal{O}(\mu^{-2})$, приходится сужать область, например, взяв $D^T_{\rho/\sqrt{2}}$. Учтем, что в этой области содержится цилиндр $|\mathbf{x}| < \rho/\sqrt{2M_0}$, и справедливо неравенство

$$v = U_0(\mathbf{x}, T-t) - \rho^2 < \rho^2/2 - \rho^2 = -\rho^2/2 = -R^2/8.$$

Поэтому для времен $t \le R^2/8\alpha\mu^2$ экспонента в (5.4) ограничена и решение оценивается по формуле

$$u(\mathbf{x}, t; T, \mu) \le M_0|\mathbf{x}|^2 + \mu^2\Big[\frac{M_3}{\alpha_0} + m\Big].$$

Это неравенство выполняется в цилиндре $\{|\mathbf{x}| < R/\sqrt{8M_0},\ 0 < t \le T\}$, где $T \le R^2/4\alpha\mu^2$.

Следует иметь в виду, что полученная оценка носит условный характер, как и все априорные оценки. Условием является существование решения задачи Коши.

Чтобы применить полученную оценку к функции $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2]$, надо проверить, что эта функция является решением соответствующей параболической задачи. При наложенных ограничениях это свойство имеет место в силу известных результатов о глобальной разрешимости задачи Коши для стохастической системы (1.2) и о гладкости математического ожидания по $\mathbf{x}, t$ (см. [5, с. 107, 113; 21, с. 164]).

Таким образом, на случайной траектории для математического ожидания получена оценка

$$\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2] \le M_0|\mathbf{x}|^2 + \mu^2\Big[\frac{M_3}{\alpha_0} + m\Big].$$

Отсюда вытекает устойчивость в смысле определения 1: $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2] < \varepsilon$ при $|\mathbf{x}| < \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/2M_0}$, $|\mu| < \Delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/2\big[M_3/\alpha_0 + m\big]}$, $0 < T \le R^2/4\alpha\mu^2$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если для невозмущенной системы существует глобальная функция Ляпунова, то устойчивость будет на бесконечном промежутке $0 < t < \infty$ (см. [13]). В общем случае вопрос об устойчивости относительно шума на далеких временах $t \gg \mathcal{O}(\mu^{-2})$ остается открытым.

6. Пример

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dr}{dt} = a(t)\sin\varphi - \Gamma r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -r, \quad t > 0 \quad \big(\Gamma = \mathrm{const} \ge 0,\ a(t) > 0\big), \qquad (6.1)$$

которая, в частности, описывает математический маятник с учетом сопротивления. Математическая модель маятника выводится из закона Ньютона и обычно записывается в форме уравнения второго порядка. На уровне такой модели можно рассматривать возмущения типа белого шума, как случайную внешнюю силу [5, с. 122]. При переходе к системе уравнений первого порядка (6.1) возмущения оказываются в одном из уравнений (см. [22]). В этом случае параболическое уравнение Колмогорова получается вырожденным, поскольку для двумерной матрицы диффузии ранг оказывается единичным ($\operatorname{rank} A = 1$). Результаты из [18] опираются на условие строгой параболичности и потому не гарантируют устойчивость относительно таких возмущений. Между тем, как показано выше, вырожденность параболического уравнения не играет роли.

Рассмотрим возмущение системы (6.1) в общей ситуации в виде стохастических уравнений Ито:

$$dr = [a(t)\,\sin\varphi - \Gamma r]dt + \mu\, b_1 dw_1(t), \quad d\varphi = -r\,dt + \mu\, b_2 dw_2(t), \quad t > 0.$$

Здесь $0 < \mu^2 \ll 1$; $w_1(t), w_2(t)$ — независимые винеровские процессы. Некоторые из коэффициентов $b_1, b_2 = \mathrm{const}$ могут обращаться в нуль, так что для соответствующей матрицы диффузии гарантируется лишь неотрицательность.

В невозмущенной системе (при $\mu = 0$) имеются как устойчивые, так и неустойчивые положения равновесия. Относительно белого шума любое из равновесий будет неустойчиво в обычном смысле [13]. Однако свойство устойчивости сохраняется в ограниченном смысле.

Теорема 2. *Пусть функция* $a(t) \in C_2$ *и* $1 \le a(t) \le a_0 < \infty$. *Если* $\Gamma > 0$ *и* $a'(t) \le a_1 < \Gamma/(1+\Gamma^2/2)$, *то равновесие* $r = 0$, $\varphi = 0$ *в системе* (6.1) *ограниченно устойчиво относительно шума равномерно по* b_1, b_2 *на любом компакте с оценками* $\delta(\varepsilon), \Delta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для невозмущенной системы имеется функция Ляпунова

$$U_0(r, \varphi, t) = 2[r^2 + a(t)\varphi^2 - 2\alpha\, r\varphi], \quad r, \varphi \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

в которой параметр α надо выбрать из условия $a_1 < \alpha < \Gamma/(1+\Gamma^2/2)$. При таких ограничениях эта функция будет положительно определенной, а ее производная в силу системы (6.1) будет отрицательно определенной в окрестности точки $r = 0$, $\varphi = 0$. Поскольку условия (5.1) выполнены, то применима теорема 1. Следовательно, равновесия ограниченно устойчиво. Теорема доказана.

Отметим, что похожие задачи о случайных возмущениях для уравнений, возникающих в теории авторезонанса, обсуждаются в последнее время [22;23]. Приведенные здесь результаты и конструкции функций Ляпунова для уравнений главного резонанса [24] позволят на аналитическом уровне решить вопрос об устойчивости относительно шума для разных моделей авторезонанса.

Автор выражает признательность профессору Ф.С.Насырову за обсуждение и консультации по тематике случайных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Физматгиз, 1977. 568 с.
2. **Schuss Z.** Theory and applications of stochastic processes. New York: Springer, 2010. 468 p. (Appl. Math. Sci.; vol. 170.)
3. **Ляпунов М.А.** Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 472 с.
4. **Кац И.Я., Красовский Н.Н.** Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, №5. С. 809–823.
5. **Хасьминский Р.З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
6. **Хапаев М. М.** Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая шк., 1988. 184 с.
7. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 432 с.
8. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

9. **Гермаидзе В.Е., Красовский Н.Н.** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 6. С. 769–774.
10. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
11. **Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.** Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5–290. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления; т. 3).
12. **Калякин Л.А.** Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 5. С. 3–72.
13. **Хасьминский Р.З.** Об устойчивости при постоянно действующих случайных возмущениях. Теория передачи информации. Опознание образов: сб. М.: Наука, 1965. С. 74–87.
14. **Кац И.Я.** Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: Изд-во УрГАПС, 1998. 222 с.
15. **Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.** Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
16. **Ishii H., Souganidis P.E.** Metastability for parabolic equation with drift: Part 1 // arXiv:1312.5504v1 [math.AP] 19 Dec 2013. 32 p. URL: http://arxiv.org/abs/1312.5504.pdf.
17. **Kalyakin L.** Stability under persistent perturbation by white noise // J. Phys: Conf. Ser. 2014. Vol. 482. P. 1–8. DOI:10.1088/1742-6596/482/1/012019.
18. **Kalyakin L.A.** Lyapunov functions in barriers for parabolic equations and in stability problems with respect to “white noise” // Russ. J. Math. Phys. 2014. Vol. 21, no. 4. P. 472–483.
19. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
20. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2003. 407 с.
21. **Крылов Н.В.** Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977. 400 с.
22. Resonant acceleration of charged particles in the presence of random fluctuations / A. Artemyev, D. Vainchtein, A. Neishtadt, L. Zelenyi // Phys. Rev. E 84. 2011. P. 046213-1–5.
23. Autoresonance transition in the presence of noise and self-fields / I. Bart, L. Friedland, E. Sarid, A.G. Shagalov // Phys. Rev. Letters. 2009. Vol. 103. P. 155001-1–4.
24. **Калякин Л.А., Султанов О.А.** Устойчивость моделей авторезонанса // Дифференц. уравнения. 2013. Vol. 49, № 3. С. 279–293.

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики с вычислительным центром РАН
e-mail: klenru@mail.ru

Поступила 4.11.2014