ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ПРИМАРНЫХ ПОДГРУПП В ГРУППЕ $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$[1]

В. И. Зенков

Показано, что в конечной группе G с цоколем, изоморфным $L_n(2)$, примарные подгруппы A и B такие, что A нетривиально пересекается с любой сопряженной с B под действием G, существуют лишь тогда, когда группа G изоморфна группе $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, при этом A и B — 2-подгруппы. Приведено описание всех упорядоченных пар (A, B) таких подгрупп.

Ключевые слова: почти простая группа, пересечение примарных подгрупп.

V. I. Zenkov. On intersections of primary subgroups in the group $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$.

It is proved that, in a finite group G whose socle is isomorphic $L_n(2)$, there exist primary subgroups A and B such that the intersection of A and any subgroup conjugate to B under the action of G is nontrivial only if G is isomorphic to the group $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$; in this case, A and B are 2-subgroups. All ordered pairs (A, B) of such subgroups are described.

Keywords: almost simple group, nilpotent subgroup.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Рассмотрим множество всех пересечений вида $A\bigcap B^g,\ g \in G$. Определим в этом множестве два подмножества: M — множество всех минимальных по включению пересечений и m — множество всех минимальных по порядку пересечений вида $A\bigcap B^g,\ g \in G$. По определению $m \subseteq M$ и для подгрупп $\mathrm{Min}\,_G(A, B) = \langle M\rangle$ и $\mathrm{min}_G(A, B) = \langle m\rangle$ имеет место включение $\mathrm{min}_G(A, B) \leq \mathrm{Min}\,_G(A, B)$. В некоторых случаях $\mathrm{min}_G(A, B) < \mathrm{Min}\,_G(A, B)$. Соответствующий пример рассмотрен перед доказательством теоремы 1.

Подгруппы $\mathrm{Min}\,_G(A, B)$ и $\mathrm{min}_G(A, B)$ играют ключевую роль при изучении пересечений подгрупп A и B в конечной группе G в силу эквивалентности следующих условий:

1) $A\bigcap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G;

2) $\mathrm{Min}\,_G(A, B) \neq 1$;

3) $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$.

Отметим, что если подгруппы A и B абелевы, то согласно [1, теорема 1] $\mathrm{Min}\,_G(A, B) \leq F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Эта теорема справедлива для любой конечной группы.

Если G — простая неабелева группа, то по [2, теорема 1] для любой пары примарных подгрупп A и B имеем $\mathrm{Min}\,_G(A, B) = \mathrm{min}_G(A, B) = 1$.

В случае почти простой группы $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$ в статье доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, изоморфная $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \geq 3$, и S — силовская 2-подгруппа из G. Тогда $\mathrm{min}_G(S, S) = S$ в случае нечетного n и $\mathrm{min}_G(S, S) = O_2(N_G(P))$ в случае четного n, где P — параболическая подгруппа, соответствующая центральной точке в схеме Дынкина группы $L_n(2)$.*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и Программы поддержки ведущих университетов России (соглашение 02.A03.210006 от 27.08.2013).

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_n(2)$, $n \geq 3$, A и B — p-подгруппы из силовской подгруппы S группы G. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(1) $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$;
(2) $\min_G(A, B) \neq 1$;
(3) $p = 2$, $(A, B) \in \big\{(\min_G(S,S), \min_G(S,S)), (S, \min_G(S,S)), (\min_G(S,S), S), (S,S)\big\}$.

1. Предварительные сведения

Лемма 1. *Пусть $G \simeq L_n(2)$, $n \geq 3$, S_1 — силовская 2-подгруппа из G и z — инволюция из $Z(S_1)$. Тогда в группе G найдутся элементы x_1 и y_1 такие, что $S_1^{x_1} \bigcap S_1^{y_1} = \langle z \rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $G = L_n(2)$. Хорошо известно [7, с. 95], что подгруппа S_1 может быть задана в $L_n(2)$ либо группой верхних, либо группой нижних треугольных матриц. В частности, если S_1 задана верхними треугольными матрицами, то инволюция z, заданная матрицей

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

порождает $Z(S_1)$ [4, с. 56 (1.2)]. Рассмотрим инволюцию t, заданную матрицей

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно [3, (4.2)] инволюции t и z имеют ранг 1 и, следовательно, сопряжены в G. Пусть g — инверсно-транспонированный автоморфизм G [5, p. XVI], а h — инволюция, заданная матрицей

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $[h, g] = 1$, $hg \in C(t)$ и $S_1 \bigcap S_1^{gh} = \langle t \rangle$. Так как t и z сопряжены в G, то и $\langle z \rangle = S_1^{x_1} \bigcap S_1^{y_1}$ для некоторых элементов x_1 и y_1 из G.

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \geq 3$, S_1 — силовская 2-подгруппа из $\mathrm{Inn}\,(L_n(2)) \simeq L_n(2)$ и S — силовская 2-подгруппа из G, содержащая S_1. Тогда $S^x \bigcap S^y = \langle z \rangle$ для некоторых элементов x и y из G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь сохраняются обозначения из доказательства леммы 1. По лемме 1 инволюция t сопряжена с инволюцией z и $\langle t \rangle = S_1 \bigcap S_1^{hg}$. Покажем, что $S \bigcap S^{hg} = \langle t \rangle$. Допустим, что $S \bigcap S^{hg} = D > \langle t \rangle$. Тогда $|D| = 4$. Поэтому некоторый элемент $d \in D \backslash \langle t \rangle$

нормализует S и S^{hg} в силу $|S:S_1|=2$. Так как $[t,d]=1$ из-за $|D|=4$, то $d\in C_G(t)\backslash C_{G'}(t)$ и $C_G(t)=C_{G'}(t)\langle hg\rangle$. Поэтому $d=chg$, где $c\in C_{G'}(t)$. Но $C_{G'}(t)$ нормализует подгруппу N из S, где $N=O_2(R)$ для максимальной параболической подгруппы из G', содержащей $C_{G'}(t)$. Но тогда в силу $c^{-1}d=hg$ имеем $S\bigcap S^{c^{-1}d}\geq N^d$, так как элемент c нормализует N, и, таким образом, $S\bigcap S^{c^{-1}}\geq N$ и $(S\bigcap S^{c^{-1}})^d=S^d\bigcap S^{c^{-1}d}=S\bigcap S^{c^{-1}d}\geq N^d$ в силу того, что $d\in S$. Но $N\leq G'$ и $|N|>2$ в силу ограничения $n\geq 3$. Противоречие с тем, что $|(S\bigcap G')\bigcap (S\bigcap G')^{c^{-1}d}|=|(S\bigcap G')\bigcap (S\bigcap G')^{hg}|=2$.

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $G=L_n(2)$. Тогда $T=\langle t^{S_1}\rangle\simeq E_{2^{n-1}}$ элементарная абелева нормальная в S_1.*

Заметим, что во всех матрицах в лемме 3 ниже второй строки стоят 0, кроме главной диагонали, на которой стоят 1, и множество матриц $\{A,A_1,\dots,A_{n-2}\}$ строится для порождения подгруппы, изоморфной $E_{2^{n-1}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим матрицу $T_{2,j},\ j>2$, из G:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & & 1 & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

При сопряжении матрицей $T_{2,j}$ любой матрицы A происходит следующее: $A^{T_{2j}}=T_{2,j}AT_{2,j}$ в силу того, что $T_{2,j}$ — трансвекция. Кроме того, умножение матрицы A на $T_{2,j}$ справа приводит к добавлению 2-го столбца к j-му, а умножение матрицы A на $T_{2,j}$ слева приводит к добавлению j-й строки матрицы A ко второй. Так как умножение матриц ассоциативно, то, например, мы можем рассмотреть вначале произведение $AT_{2,j}$ и умножить его на $T_{2,j}$ справа.

Возьмем в качестве A матрицу, определяющую t:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда при $j=3$ имеем

$$A_1=T_{2,3}AT_{2,3}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $[A, A_1] = 1$ $(A = t)$ и это элементарная абелева подгруппа, которая может рассматриваться как векторное пространство размерности два над полем из двух элементов. В 1-й строке матрицы A_{j-2} первые j элементов единицы, остальные нули. Предположим по индукции для $j \geq 4$, что

$$A_{j-2} = T_{2,j} A_{j-3} T_{2,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Подсчитаем $A_{j-1} = T_{2,j+1} A_{j-2} T_{2,j+1}$, имеем

$$A_{j-2} T_{2,j+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{j-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Порождающее множество $\{A, A_1, \ldots, A_{n-2}\}$ группы T — очевидно, линейно независимая система, которую можно взять в качестве базиса векторного пространства над полем из двух элементов. Поэтому лемма 3 доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть* $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \geq 3$. *Тогда* $C_G(t) \simeq C_G(z)$, $O_2(C_G(t))$ *— экстраспециальная подгруппа порядка* 2^{2n-3} *и* $\overline{C_{G'}(t)} = C_{G'}(t)/O_2(C_{G'}(t)) \simeq L_{n-2}(2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено в лемме 1, инволюции t и z сопряжены в G'. Поэтому $C_G(t) \simeq C_G(z)$. Из матричного представления инволюции t из леммы 1 вытекает, что $C_{G'}(t)$ содержит подгруппу, изоморфную $L_{n-2}(2)$. Кроме того, из леммы 3 следует, что $C_{G'}(t)$ содержит элементарную абелеву подгруппу N, нормальную в $C_{G'}(t)$. Подгруппа N лежит в $S_1 \in \mathrm{Syl}_2(G')$, где S_1 представлена верхними треугольными матрицами, а также лежит в $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $S > S_1$. Из леммы 2 следует, что $S \bigcap S^{hg} = \langle t \rangle$. Следовательно, $N \bigcap N^{hg} = \langle t \rangle$. Тогда (см. [4, с. 56]) $\langle N, N^{hg} \rangle = O_2(C_{G'}(t))$ — экстраспециальная подгруппа порядка 2^{2n-3}.

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_2(7)$, S — силовская p-подгруппа из G, A и B — примарные p-подгруппы из G и $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда $p = 2$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(7))$, $S \simeq A \simeq B \simeq \min_G(A,B) = \min_G(S,S)$ Справедливо и обратное утверждение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $L_2(7) \simeq L_3(2)$ (см. [5, с. 3]), то $p = 2$, и для инволюции $\tau \in S \backslash S \bigcap G'$ имеем $C(\tau) = \langle \tau \rangle \times T$, $T \simeq S_3$ и по [6, лемма 3.2] $S \bigcap S^g = \langle \tau \rangle$. Без ограничения общности можно считать, что A и B лежат в S. Так как $\min_G(A,B) \neq 1$, то $A \bigcap B^g \neq 1$. Поэтому $|A \bigcap B^g| \geq 2$. С другой стороны, $S \bigcap S^g \geq A \bigcap B^g$. Следовательно, $2 = |S \bigcap S^g| \geq |A \bigcap B^g| \geq 2$. Поэтому $S \bigcap S^g = A \bigcap B^g = \langle \tau \rangle$. Значит, $\langle \tau \rangle \leq \min_G(A,B)$. Но тогда и $\langle \tau^S \rangle \leq \min_G(A,B)$. По лемме 2 имеем $Z(S) = \langle z \rangle = S^x \bigcap S^y$. Поэтому, сопрягая в $N_G(V)$, где $V \simeq E_4$ — четверная подгруппа, подгруппу S^x с S при помощи элемента t, имеем $S^{xt} \bigcap S^{yt} = S \bigcap S^{yt} = \langle z^t \rangle$. Следовательно, $V \leq \min_G(A,B)$. Очевидно, что $S \bigcap S^{yt\tau} = \langle z^{t\tau} \rangle$. Значит, $V^g \leq \min_G(A,B)$ и $S = A = B = \min_G(A,B)$. Обратное утверждение следует из [6, теорема B1].

Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_4(2)$, S — силовская p-подгруппа из G, A, B — p-подгруппы из G и $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда $p = 2$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(A_8)$, $\min_G(S,S) = O_2(C_G(z))$ и $(A,B) \in \{(\min_G(S,S), \min_G(S,S)), (\min_G(S,S), S), (S, \min_G(S,S)), (S,S)\}$. Справедливо и обратное утверждение.*

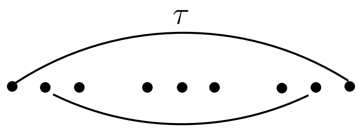
Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $L_4(2) \simeq A_8$ (см. [5, с. 22]), то $\mathrm{Aut}\,(L_4(2)) \simeq \mathrm{Aut}\,(A_8) \simeq S_8$ и по [2, теорема 1] $p = 2$ и $G \simeq S_8$. Пусть $\langle \tau \rangle$ — инволюция с $C_G(\tau) \simeq \langle \tau \rangle \times K$, где $K \simeq S_6$. Согласно [6, лемма 3.1] $\langle \tau \rangle = S \bigcap S^g$ для некоторого элемента g из G. Поэтому $\langle \tau \rangle \leq \min_G(S,S)$ и $\langle \tau \rangle \leq \min_G(A,B)$, где без ограничения общности считаем, что $A, B \leq S$. По леммам 3 и 4 $Z(S) = \langle z \rangle = S^x \bigcap S^y$ и $(z^t)^S = O_2(C_G(z))$. Так как $\langle z^t \rangle \leq \min_G(S,S)$ и $\langle z^t \rangle \leq \min_G(A,B)$, то $\langle (z^t)^S \rangle = O_2(C_{G'}(z)) \leq \min_G(S,S)$ и $\langle (z^t)^S \rangle \leq \min_G(A,B)$. Поскольку $C_{G'(z)}/O_2(C_{G'}(z)) \simeq S_3$, то по [5, с. 22] $\overline{C(z)} = C_G(z)/O_2(C_G(z)) \simeq S_3$. Следовательно, $\min_G(S,S) = \min_G(A,B) \geq O_2(C_{G'}(z))\langle \tau \rangle$. Допустим, что $\min_G(S,S) = \min_G(A,B) > O_2(C_G(z))$. По определению $\min_G(S,S)$ найдется элемент f из G такой, что $S \bigcap S^f < \min_G(S,S)$, но $S \bigcap S^f \not\leq O_2(C_G(z))$. Поэтому $O_2(C_G(z)) \bigcap S^f = 1$. Но $\overline{C_G(z)} \simeq S_3$. Следовательно, по [6, лемма 2.2] $S \bigcap S^h = 1$ для некоторого h из G. Противоречие с тем, что $\min_G(A,B) \neq 1$.

Так как $|S : \min_G(S,S)| = 2$, то прямое утверждение леммы доказано, а для доказательства обратного утверждения леммы достаточно установить, что $\min_G(\min_G(S,S), \min_G(S,S)) \neq 1$. Но так как $\min_G(S,S) = O_2(C_G(z))$ и $\overline{C_G(z)} \simeq S_3$, то это следует из [6, лемма 3.1, теорема $B1$]. Лемма 6 доказана. □

Перед доказательством теорем приведем пример группы G и 2-подгрупп A и B из G, в которой $\min_G(A,B) < \mathrm{Min}\,_G(A,B)$. Например, если в качестве группы G рассмотрим S_4, в качестве подгруппы A возьмем силовскую 2-подгруппу S группы G и положим $A > B \simeq Z_4$, то здесь $M = \{B, \langle t \rangle^f, \langle t \rangle^{f^2}\}$, где t — инволюция из B, а f — элемент порядка 3 из G. В то же время $m = \{\langle t \rangle^f, \langle t \rangle^{f^2}\}\}$. Соответственно, $\mathrm{Min}\,_G(A,B) = \langle M \rangle = S > \min_G(A,B) = O_2(G)$. В этой группе G в качестве подгруппы B можно взять любую 2-подгруппу порядка 4, не лежащую в $O_2(G)$, и все они дадут аналогичный пример со свойством $\min_G(A,B) < \mathrm{Min}\,_G(A,B)$.

2. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Пусть G — контрпример к теореме 1 и порядок G при этом минимален. По леммам 5 и 6 имеем $n > 4$. Далее, по леммам 3 и 4 $O_2(C_{G'}(z)) \leq \min_G(S,S)$. Из матричного представления подгруппы G', рассмотренного в леммах 3 и 4, видно, что подгруппа $C_{G'}(z)$ имеет подгруппу $G_1 \simeq L_{n-2}(2)$, так называемый фактор Леви (см. [4, С. 86–87; 5, P. XV]), если рассматривать $C_{G'}(z)$ как параболическую подгруппу G', на которой нетривиально действует симметрия τ диаграммы Дынкина



Из этой информации видно, что $C_{G'}(z) = M \bigcap M^{\tau}$, где M — параболическая подгруппа, полученная путем удаления из диаграммы Дынкина левой крайней вершины и правой крайней. Учитывая, что $n > 4$, имеем нетривиальное действие τ на $C_{G'}(z)$ и на $\overline{C_{G'}(z)} = C_{G'}(z)/O_2(C_{G'}(z) \simeq L_{n-2}(2)$ и, так как четность n и $n-2$ одинакова, при выполнении условий теоремы 1 по индукции должно выполняться заключение этой теоремы в факторгруппе $\mathrm{Aut}(L_{n-2}(2))$. Далее в теореме обозначение $\overline{H}$ будет применяться для факторгруппы $HO_2(C(z))/O_2((C(z))$ подгруппы H из $C_G(z)$. В силу того, что τ индуцирует нетривиальный автоморфизм на $\overline{C_{G'}(z)}$, имеем $O_2(C_G(z)) \leq G'$. Поэтому $O_2(C_G(z)) = O_2(C_{G'}(z)$ и, следовательно, корректно определена факторгруппа $\overline{C} = \overline{C_G(z)} = C_G(z)/O_2(C_G(z)$.Так как $G' \simeq L_n(2)$ — простая группа характеристики два, то группа верхних треугольных матриц в матричном представлении пересекается с группой нижних треугольных матриц по единичной подгруппе. Следовательно, $O_2(C_G(z)) \bigcap S^x = 1$ для некоторого элемента x из G. Поэтому $|C_G(z) \bigcap S^x| = |\overline{C_G(z) \bigcap S^x}|$. Обозначим подгруппу $C_G(z) \bigcap S^x$ через S_1. Тогда $\overline{S} \bigcap \overline{S_1}^{\overline{c}} \neq \overline{1}$ для любого элемента $\overline{c} \in \overline{C}$, иначе $\min_G(S,S) = 1$, что противоречит [6, теорема B1]. Таким образом, $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}_1) \neq 1$ и, тем более, $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}) \neq 1$. Так как $\overline{C} \simeq \mathrm{Aut}\,(L_{n-2}(2))$, $n \geq 5$, то $n-2 \geq 3$ и по [5, с. 15] $|\mathrm{Aut}\,(L_n(2)) : \mathrm{Inn}\,(L_n(2))| = 2$. Следовательно, в $L_{n-2}(2)$ найдется пара силовских 2-подгрупп, пересекающихся по единице, которые, в свою очередь, будучи вложенными в соответствующие силовские 2-подгруппы из $\overline{C} \simeq \mathrm{Aut}\,(L_{n-2}(2))$ обеспечивают равенство 2$= |\overline{S} \bigcap \overline{S}^{\overline{f}}|$ для некоторого элемента $\overline{f}$ из $\overline{C}$. Условие $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}_1) \neq 1$ вместе с теоремой Силова влечет, что найдется элемент $\overline{t}$ из $\overline{C}$, для которого и $\overline{S} \bigcap \overline{S}^{\overline{f}} = \overline{S} \bigcap \overline{S}_1^{\overline{t}}$. Следовательно, подгруппа $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}_1)$ порождается пересечениями вида $\overline{S} \bigcap \overline{S}_1^{\overline{f}}$, где $\overline{f} \in \overline{C}$ и каждое такое пересечение является образом некоторого пересечения $D = S \bigcap S^g$ порядка 2 из G по определению подгруппы S_1, которое принадлежит $\min_G(S,S)$. Таким образом, подгруппа $\min_G(S,S)$ в факторгруппе $\overline{C}$ содержит подгруппу $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$. С другой стороны, в силу условия $\min_G(S,S) \neq 1$ и леммы 2 найдется такое $D = S \bigcap S^y$ $(y \in G)$, что $|D| = 2$. Если $D \leq O_2(C_G(z))$, то $\overline{D} = \overline{1} \leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$. Если $D \not\leq O_2(C_G(z))$, то в силу того, что $S \geq O_2(C_G(z))$ и $|D| = 2$, получаем, что $O_2(C_G(z)) \bigcap S^y = 1$. Поэтому $|\overline{D}| = 2$ и если $\overline{D} \leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$, то $\overline{\min_G(S,S)} \leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$ и тогда в силу произвольности $\overline{D}$ имеет место равенство $\overline{\min_G(S,S)} = \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$.

Пусть $\overline{D} \not\leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}) = O_2(N_{\overline{C}}(\overline{P}))$, где по индукции $\overline{P}$ — подгруппа из теоремы 1 примененной к $\overline{C}$. Так как $D \in m$ и $\overline{D} \not\leq O_2(N(\overline{P}))$, то полный прообраз N в C подгруппы $N_{\overline{C}}(\overline{P})$ по теореме 1 удовлетворяет соотношению $\overline{N/O_2(N)} \simeq S_3$ в силу того, что каждой точке в диаграмме Дынкина для $L_n(2)$ соответствует фактор Леви, изоморфный $A_1(2) \simeq L_2(2) \simeq S_3$. Поскольку $\overline{D} \not\leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$, то справедливо равенство $O_2(N) \bigcap S^y = 1$. Но тогда по [6, лемма 3.2] имеем $S \bigcap S^h = 1$ для некоторого h из G. Противоречие с тем, что $\min_G(S,S) \neq 1$.

Следовательно, из равенства $\overline{\min_G}(S,S) = \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$ с учетом того, что $n \geq 5$ по индукции получаем строение $\min_{\overline{C}}(\overline{S},\overline{S})$, а беря полный прообраз и, учитывая, что числа n и $n-2$ имеют одинаковую четность и по леммам 3 и 4 $O_2(C(z)) \leq \min_G(S,S)$, получаем заключение теоремы для подгруппы $N_G(P)$. Но $|Z(P)| = 2$, поэтому $N_G(P) \leq N_C(P)$ и теорема 1 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Так как условия (1) и (2) в теореме 2 равносильны, то достаточно доказать, что условие (2) равносильно условию (3).

Пусть верно условие (2). Тогда для пары (A,B) p-примарных подгрупп, лежащих без ограничения общности в некоторой силовской подгруппе S из G, получаем по [6, теорема B(2б)], что $p=2$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \geq 3$, и по [6, теорема $B1$] $\min_G(S,S) \neq 1$. Пусть $D = S \bigcap S^g \in m$. Так как $|\mathrm{Aut}\,(L_n(2)) : \mathrm{Inn}\,(L_n(2))| = 2$ (см. [5, табл. 5]) и в $\mathrm{Inn}\,(L_n(2)) \simeq L_n(2) \simeq G'$ силовская 2-подгруппа, представленная верхними треугольными матрицами, пересекается с силовской 2-подгруппой, представленной нижними треугольными матрицами по единице, то неравенство $\min_G(S,S) \neq 1$ влечет, что $|D| = 2$. Поскольку $S \geq A$ и $S \geq B$, то $D = S \bigcap S^g \geq A \bigcap B^g \neq 1$ в силу условия $\min_G(A,B) \neq 1$. Поэтому $|D| = |S \bigcap S^g| = |A \bigcap B^g| = 2$. Следовательно, $D = A \bigcap B^g \leq \min_G(A,B)$. Так как D — произвольный элемент из m, то $\min_G(S,S) \leq \min_G(A,B)$. Следовательно, $A \geq \min_G(S,S)$. Но $A \bigcap B^g = (B \bigcap A^{g^{-1}})^g$. Значит, $\min_G(B,A) \neq 1$ и аналогично $B \geq \min_G(S,S)$. По теореме 1 либо n нечетно и $A = B = S$, либо n четно, $|S : \min_G(S,S)| = 2$ и, в таком случае, пара (A,B) принадлежит множеству $\{(S, \min_G(S,S)), (S,S), (\min_G(S,S), S), (\min_G(S,S), \min_G(S,S))$. Поэтому из условия (2) в теореме 2 следует условие (3).

Допустим, что в теореме 2 верно условие (3). Если n нечетно, то условие (2) следует из условия (3) согласно [6, теорема $B1$]. Если n четно, то по теореме 1 имеем $(A,B) \in \{(\min_G(S,S), \min_G(S,S)), (S, \min_G(S,S)), (\min_G(S,S), S), (S,S)\}$, где $\min_G(S,S) = O_2(N_G(P))$ и $N_G(P)/O_2(N_G(P)) \simeq S_3$ [5, с 22]. Так как пара $(A,B) = (\min_G(A,B), \min_G(A,B))$ минимальна по включению такому, что $(A,B) \supseteq (A_1,B_1)$, тогда и только тогда, когда $A \geq A_1$ и $B \geq B_1$, то достаточно доказать, что из условия (3) следует условие (2) только для этой пары.

Допустим, что в этом случае из условия (3) не следует условие (2). Тогда $A \bigcap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Так как $A = B = O_2(N_G(P))$, то для подгруппы $N_G(P)$ имеем $O_2(N_G(P)) \bigcap (O_2(N_G(P)))^g = 1$. Последнее равенство в силу $N_G(P)/_{O_2(N_G(P))} \simeq S_3$ (см. [6, лемма 3.1]) влечет равенство $S \bigcap S^x = 1$ для некоторого x из G. Противоречие с [6, теорема $B1$]. Следовательно, из условия (3) следует условие (2). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зенков В.И.** Пересечение абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 1–2. С. 150–152.
2. **Зенков В.И., Мазуров В.Д.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
3. **Aschbacher M., Seitz G.M.** Involutions in chevalley groups over fields of even order // Nagoya Math. J. 1976. T. 63, № 10. C. 1–92.
4. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
5. Atlas of finite group / J.H. Conway, R. Curter, S. Norton, R. Parker, R. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных подгруппах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.
7. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1972. 239 с.

Зенков Виктор Иванович

Поступила 05.12.2014

д-р физ.-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: zenkov@imm.uran.ru